

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXXXV

1938 (XVI)

SERIE SESTA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII



ROMA

DOTT. GIOVANNI BARDI

TIPOGRAFO DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1938 (XVI)



Digitized by the Internet Archive
in 2023

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 9 gennaio 1938 - Anno XVI

Presidenza del prof. F. MILLOSEVICH

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Elettrochimica. — *Equazioni per il calcolo termodinamico delle forze elettromotrici delle pile a gas* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ del Corrisp. O. SCARPA.

La equazione di Helmholtz e Gibbs per il calcolo delle f. e. m. delle pile con funzionamento reversibile ⁽³⁾:

$$(1) \quad e = \frac{J\Delta U}{F} + T \frac{de}{dT}$$

non può essere rigorosamente applicata allo studio delle f. e. m. delle pile a gas poichè la derivata: $\frac{de}{dT}$, va riferita ⁽⁴⁾ a condizioni di *volume costante* mentre il valore del rapporto $\frac{\Delta e}{\Delta T}$ viene dedotto determinando sperimentalmente l'incremento Δe di forza elettromotrice che, operando a pressione costante

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Elettrochimica del R. Politecnico di Milano.

(2) Presentata nella seduta del 9 gennaio 1938.

(3) ΔU indica la diminuzione dell'energia interna (espressa in calorie) che avviene in corrispondenza della generazione di F Coulomb fluenti nel circuito.

(4) Tanto la equazione generale di Helmholtz-Gibbs, quanto quella particolare relativa alle forze elettromotrici è generalmente esposta nei trattati di Chimica-fisica e di termodinamica-chimica, senza dare alcuna indicazione circa le condizioni in cui deve essere effettuata la derivazione. Soltanto in pochissimi è detto che tale derivata deve essere effet-

(cioè quando la pila è sottoposta, per esempio, alla pressione atmosferica) consegue a un incremento ΔT della temperatura.

Per dedurre in modo generale una equazione direttamente applicabile al calcolo delle f. e. m. delle pile il cui volume varia notevolmente durante il funzionamento, ho seguito due vie che, concordemente hanno condotto al medesimo risultato. Si può infatti trasformare la equazione di Helmholtz e Gibbs tenendo direttamente conto anche del lavoro (positivo o negativo) compiuto dal sistema elettrochimico contro la pressione esterna (supposta costante) in conseguenza della variazione di volume durante il funzionamento

isotermico; oppure considerare la relazione che passa fra i valori di $\frac{de}{dT}$

(cioè dei cosiddetti coefficienti di temperatura delle forze elettromotrici) ricavati dai risultati delle misure delle f. e. m. effettuate in condizioni di pressione costante, con quelli riferiti a condizioni di volume costante. Poichè la grandezza della forza elettromotrice di ogni pila avente una determinata costituzione chimica fisica è funzione continua delle variabili P e T , si ha:

$$\frac{de}{dT} = \frac{\partial e}{\partial P} \cdot \frac{dP}{dT} + \frac{\partial e}{\partial T}$$

Epperchè se si considerano pile comprendenti fasi gassose il cui volume varia di ΔV mentre funzionando a temperatura e pressione costante, generano F Coulomb, e se si ammette (come avviene in pratica) che la variazione del volume del sistema è sensibilmente eguale a quella delle fasi gassose, e si ammettono i gas perfetti, poichè per questi vale la relazione:

$$P \Delta V = \nu RT$$

(ν = numero di mole gassose contenute nel volume ΔV) risulta, sostituendo nella equazione di Helmholtz-Gibbs, la equazione:

$$(2) \quad e = \frac{J \Delta U}{F} + T \left(\frac{de}{dT} \right)_{P \text{ cost}} + P \left(\frac{de}{dP} \right)_{T \text{ cost}}$$

tuata ponendo la condizione di volume costante. Se si esaminano le dimostrazioni elementari di tale equazione si trova che mentre alcuni trattatisti considerano cicli reversibili costituiti da due isoterme finite e da due adiabatiche infinitesime, altri pongono che queste due ultime trasformazioni sieno isobare, altri infine che avvengano ad entropia costante (isentropiche). Ne risultano incertezze che possono causare errori notevoli.

Considerando le dimostrazioni più rigorose è possibile convincersi che deve essere imposta la condizione di volume costante. Soltanto quando le trasformazioni avvengono in sistemi condensati, ad esempio si studia il funzionamento delle pile di Daniell, di Clark ecc., poichè in tali casi, alle variazioni di volume che accompagnano le trasformazioni corrispondono lavori esterni di grandezza intima rispetto al lavoro elettrico contemporaneamente prodotto, il valore di $\frac{de}{dT}$ riferiti a condizioni di volume costante non differisce, praticamente, da quello riferito a condizioni di pressione costante.

Se mediante considerazioni termodinamiche si ricava l'espressione di $\frac{de}{dP}$ per le pile a gas funzionanti a temperatura costante, si ottiene la nota equazione:

$$\frac{de}{dP} = -\frac{\Delta V}{F}$$

e quindi sostituendo nella (2) risulta:

$$(3) \quad e = \frac{J\Delta U}{F} + T \left(\frac{de}{dT} \right)_{P \text{ cost}} - \frac{\nu RT}{F}.$$

che coincide con quella a cui si arriva seguendo la prima delle due vie sopraccegnate.

Se si indica con Q_V la somma algebrica dei calori di reazione, misurati a volume costante, che corrispondono alle reazioni chimiche che avvengono nella pila mentre essa genera F Coulomb, e con Q_P il corrispondente valore misurato a pressione costante, la equazione (3) si può mettere sotto le forme:

$$(4) \quad e = \frac{JQ_V}{F} + T \left(\frac{de}{dT} \right)_{P \text{ cost}} - \frac{\nu RT}{F}$$

$$(5) \quad e = \frac{JQ_P}{F} + T \left(\frac{de}{dT} \right)_{P \text{ cost}}$$

Ricordo che il valore del termine: $\frac{\nu RT}{F}$, per la pila a gas di Grove (a idrogeno e ossigeno) corrisponde a 0,019 Volt alla temperatura di 20° c., mentre quello del termine: $T \left(\frac{de}{dT} \right)_{P \text{ cost}}$ corrisponde a 0,293 Volt per la stessa temperatura e la pressione di una atmosfera.

Se si confronta la equazione (3) con quella risultante dalla diretta applicazione della sola legge della conservazione dell'energia, da me esposta in una precedente pubblicazione⁽¹⁾, ma riferita al caso di pile con funzionamento reversibile:

$$e = \frac{J\Delta U}{F} - \frac{JQ_r}{F} - \frac{\nu RT}{F}$$

risulta che il calore Peltier (Q_r) che si sviluppa nelle pile a gas con funzionamento reversibile, mentre circolano F Coulomb, è dato da:

$$Q_r = -\frac{F}{J} T \left(\frac{de}{dT} \right)_{P \text{ cost}}.$$

(1) « Gazzetta Chimica Italiana » (in corso di stampa).

Chimica fisica. — *L'effetto Volta nelle leghe metalliche solide* ⁽¹⁾. Nota I ⁽²⁾ del Corrisp. O. SCARPA (con la collaborazione per la parte sperimentale del dott. C. ROSSI ⁽³⁾).

Esaminando il comportamento delle leghe metalliche rispetto alle diverse proprietà chimico-fisiche, e in particolare rispetto alle proprietà elettriche (conduttività potere termoelettrico, potenziale elettrochimico, ecc.), sono stato indotto a pensare che anche la grandezza dell'effetto Volta deve subire delle variazioni al variare del titolo delle leghe, e che i suoi valori debbono assumere andamenti diversi, al variare dei titoli, a seconda del tipo del diagramma di stato appartenente alle leghe considerate.

Mi apparve che tutto ciò deve avvenire qualunque sia la vera origine dell'effetto Volta, cioè se esso, come oggi si ritiene, è un puro fenomeno fisico, dipendente dalle concentrazioni degli elettroni liberi nell'interno dei metalli e dal particolare stato del gas elettronico (teorie moderne dell'effetto Volta), oppure se, secondo la vecchia teoria chimica, esso deriva dalla diversa affinità dei metalli rispetto agli agenti esterni (ossigeno ecc.) ⁽⁴⁾.

Ne segue che la determinazione del diagramma: *Effetto Volta - composizione della lega*, potrebbe avere notevole importanza anche per lo studio chimico delle leghe, poichè è noto che per ricercarne l'intima costituzione, e in particolare per determinare l'esistenza di composti intermetallici (specialmente quando essi provengono da trasformazioni allo stato solido) non è sempre sufficiente l'analisi termica, anche se suffragata dalle osservazioni micrografiche e dagli studi effettuati con raggi X (misure sugli spettri Debye, ecc.); mentre le deduzioni che si ricavano dallo studio delle singo-

(1) Lavoro compiuto nel Laboratorio di Elettrochimica del R. Politecnico di Milano.

(2) Presentata nella seduta del 9 gennaio 1938.

(3) Fu nella occasione degli studi che mi hanno condotto a scoprire la esistenza di pile metalliche isotermitiche (vedere per la bibliografia nella pubblicazione riassuntiva, nel *Journal de Physique et Le Radium*, dicembre 1933, ser. VII, to. IV, n. 12, pp. 725-731) che ho dovuto considerare più particolarmente il fenomeno dell'effetto Volta nelle leghe, e perciò ho allora affidato a un mio Assistente (il dott. Corrado Rossi) l'esecuzione di una serie di esperienze sistematiche, anche allo scopo di colmare questo vuoto esistente nella letteratura scientifica.

Ragioni varie, fra cui la partenza del dott. Rossi per seguire Corsi di Perfezionamento all'estero, hanno fatto interrompere nell'ottobre 1929 le esperienze dei cui risultati ho dato soltanto un brevissimo cenno a p. 1 della mia Memoria sulle Pile metalliche isotermitiche pubblicata nel volume 1°, anno 1931, della R. Accademia d'Italia. Avendo potuto ora riprendere studi sul medesimo argomento, ho redatto la presente Nota.

(4) Ricordo che recentissime esperienze di KRÜGER e SCHULZ (« Annalen der Physik », anno 1936, vol. 26) condurrebbero, secondo gli AA., a nuovamente avvalorare la vecchia teoria chimica dell'effetto Volta. Vedere le mie osservazioni nella rivista: « La ricerca scientifica » (organo del C. N. delle R.) in corso di stampa.

larità che si presentano nei diagrammi della conduttività elettrica, del coefficiente di temperatura, del potenziale elettrochimico, della durezza, ecc., abbisognano talvolta di altre conferme. Come esempio ricordo il caso degli ottoni binari, per i quali, malgrado numerosi studi, non si è ancora potuto concludere in modo decisivo sulla reale esistenza di composti intermetallici fra rame e zinco ⁽¹⁾.

Furono tutte queste osservazioni che mi indussero a istituire misure sistematiche di effetto Volta nelle leghe.

Il metodo di misura dell'effetto Volta che si presentò più conveniente per orientamento (e che venne adottato nelle ricerche qui esposte) fu quello classico del condensatore con capacità variabile. Questo venne costituito con due dischi aventi il diametro di circa cm. 7, di cui quello fisso venne costruito con il metallo di riferimento. La superficie di questo disco, dopo essere stata ben spianata e ben smerigliata, venne accuratamente verniciata con gommalacca. Il disco mobile venne sempre costruito con la lega in esame, opportunamente ricotta. Anch'esso fu sempre accuratamente spianato e smerigliato.

Per determinare il valore dell'effetto Volta venne adottato il metodo di compensazione (metodo di Lord Kelvin) adoperando come strumento di zero un elettrometro Dolezaleck sensibile al millesimo di Volt. I dischi mobili, dopo la lavorazione meccanica, la pulitura e la smerigliatura, vennero lasciati non meno di 48 ore in ambiente secco ⁽²⁾. Lo spazio circoscritto dalla gabbia di Faraday venne mantenuto asciutto con cloruro di calcio solido. Si poterono così effettuare le misure dell'effetto Volta (nell'aria) in condizioni di sufficiente stabilità.

Ogni esperienza con il condensatore di capacità variabile, venne ripetuta più volte e poichè gli scarti fra le successive letture si poterono ridurre, nelle misure definitive (cioè quando furono adottate le maggiori cure) al massimo dell'ordine di pochi centesimi di volt, i valori medi, espressi fino al centesimo di Volt, hanno peso notevole.

Come rappresentante tipico delle leghe con solubilità illimitata allo stato solido senza esistenza di composti intermetallici, venne scelto il sistema Rame-Nichel, e ciò anche perchè le corrispondenti leghe, sono facilmente lavorabili al tornio, ottenendo dischi con superfici ben piane e levigate.

(1) Vedere, anche per la bibliografia, la estesa Memoria di BRONIEWSKY e STRASBURGER pubblicata nell'anno 1931 nella: «Revue de Métallurgie», XXVIII, pp. 19 e 79. Vedi pure in HANSEN, *Der Aufbau der Zweistofflegierungen*, Berlin, 1936, pp. 667 e sg.

(2) È noto che i valori dell'effetto Volta misurati subito dopo la pulitura delle superfici, vanno lentamente variando al passare del tempo e tendono verso valori limiti. Nelle presenti esperienze si osservò che a un periodo della durata di circa tre ore dalla pulitura, durante il quale l'effetto Volta cresce di alcuni centesimi di volt, succede un periodo durante il quale l'effetto Volta torna a diminuire molto lentamente tendendo a valori di regime.

Il primo periodo sembra corrispondere all'assettamento dello strato superficiale del metallo, il secondo si crede corrisponda a una leggera ossidazione della superficie.

Per le discussioni relative a questo sistema è da notare che il nichel subisce a 368° una trasformazione per la quale passa da paramagnetico a ferromagnetico, stato che esiste, alla temperatura ordinaria, nelle sue leghe con il rame aventi tenori in nichel, superiori al 68 %; è che nei diagrammi di stato delle leghe rame-nichel pubblicati nel tempo passato, era indicata in corrispondenza di tale trasformazione una lacuna di miscibilità, lacuna che più non compare nei diagrammi recenti⁽¹⁾.

Le misure di effetto Volta di queste leghe furono effettuate rispetto al rame: i risultati sono elencati nella seguente tabella. In questa sono ripor-

TABELLA I.
Sistema Rame-Nichel.

Coppia	I ^a serie Effetto Volta rispetto al rame	Media Volt	II ^a serie Effetto Volta rispetto al rame	Media Volt
Cu/Ni	+ 0.40	+ 0.387	+ 0.335	+ 0.335
	0.375		0.335	
	0.375		0.335	
	0.40		0.335	
Cu/lega con 80 % di Ni	+ 0.29	+ 0.290	+ 0.27	+ 0.268
	0.29		0.26	
	0.29		0.27	
	0.29		0.27	
Cu/lega con 60 % di Ni	+ 0.215	+ 0.215	+ 0.19	+ 0.192
	0.215		0.19	
	0.215		0.19	
	—		0.20	
Cu/lega con 40 % di Ni	+ 0.14	+ 0.132	+ 0.11	+ 0.112
	0.13		0.12	
	0.13		0.11	
	0.13		0.11	
Cu/lega con 20 % di Ni	+ 0.06	+ 0.068	+ 0.05	+ 0.055
	0.07		0.06	
	0.07		0.06	
	0.07		0.05	

(1) HÄNSEN, *Der Aufbau der Zweistofflegierungen*, Berlin, 1936, p. 586.

tati tutti i valori che furono ottenuti in due serie di misure (effettuate alla distanza di 36 ore l'una dall'altra) e ciò allo scopo di mostrare il grado di precisione che si potè ottenere.

Dal relativo diagramma (fig. 1) disegnato in base ai valori medi, risulta che, in queste leghe, la grandezza dell'effetto Volta rispetto al rame cresce al

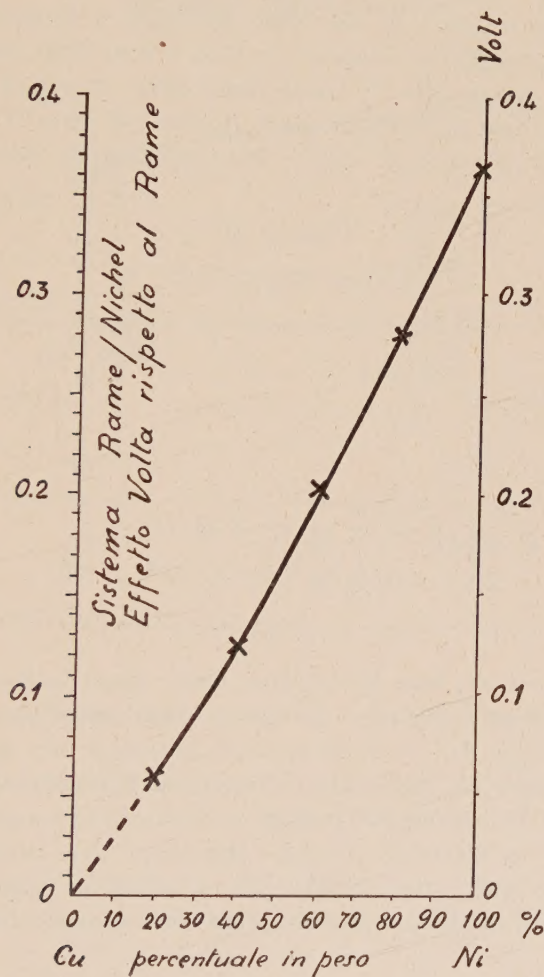


Fig. 1.

crescere del tenore in nichel seguendo la regola dei miscugli. Infatti si nota soltanto una leggera convessità verso l'asse delle ascisse e nessun punto singolare.

È assai interessante considerare questo risultato in relazione alla costituzione dei reticoli cristallini di questo tipo di leghe, e alle teorie sulla natura dell'effetto Volta.

Come rappresentante delle leghe binarie i cui componenti presentano completa (o pressochè completa) insolubilità mutua allo stato solido senza esistenza di composti intermetallici, fu scelto il sistema stagno-zinco. Questo sistema possiede un eutettico alla concentrazione di circa 9 % di stagno ⁽¹⁾. Il disco di comparazione (fisso) venne costituito, in questo caso, con zinco; esso fu, al solito, verniciato con gommalacca. Tale disco si dimostrò più elettronegativo di un disco di zinco non verniciato, e le tensioni Voltiane, fra i due, assunsero valori compresi fra 0.01 e 0.04 Volt con una media di 0.02 Volt. Di questo valore fu tenuto conto come correzione per il calcolo dell'effetto Volta dalle leghe stagno-zinco rispetto allo zinco ⁽²⁾. I valori medi risultanti da otto sottoserie di misure sono esposti nella Tabella II.

TABELLA II.
Sistema Stagno-Zinco.

Coppia	Effetto Volta Volt
Sn/Zn	— 0.40
Sn/lega al 4 % Zn	— 0.07
Sn/lega al 8 % Zn	— 0.06
Sn/lega al 15 % Zn	— 0.04

Risulta quindi che, nelle leghe binarie stagno-zinco, bastano piccole quantità di zinco aggiunte allo stagno per far pressochè annullare l'effetto Volta rispetto allo zinco.

È molto importante notare che il diagramma dell'effetto Volta di questo sistema (fig. 2) ha andamento analogo a quello del potenziale elettrochimico ⁽³⁾.

Nelle leghe stagno-zinco tanto il valore dell'effetto Volta quanto quello del potenziale elettrochimico vengono quindi essenzialmente determinati dalla

(1) Vedi in HANSEN, loc. cit., p. 1080.

(2) È da ricordare che due leghe di stagno-zinco con altri tenori di zinco (maggiori del 50 %) si sono pur mostrate leggermente elettropositive (centesimi di Volt) rispetto al disco di zinco verniciato. Malgrado la piccolezza del fenomeno (che potrebbe dipendere da una leggera ossidazione dei cristalli primari di zinco esistenti alla superficie dei corrispondenti dischi) verranno istituite, per meglio chiarire questa apparente singolarità, nuove ricerche.

(3) Vedere, ad esempio, il diagramma ricavato da FUCHS: « Zeits. An. Chem. » vol. 199, 1920, e quello più recente ricavato dal CREPAZ: « Giornale di Chimica Industriale e Applicata », vol. V, 1923.

presenza dei minutissimi cristalli microscopici di zinco (o di soluzione solida dello stagno nello zinco, ad altissimo tenore in zinco) che, compresi nell'eutettico, esistono nelle leghe ipoeutettiche, eutettiche, e ipereutettiche, e da quelli primari dello zinco che esistono nelle leghe ipereutettiche.

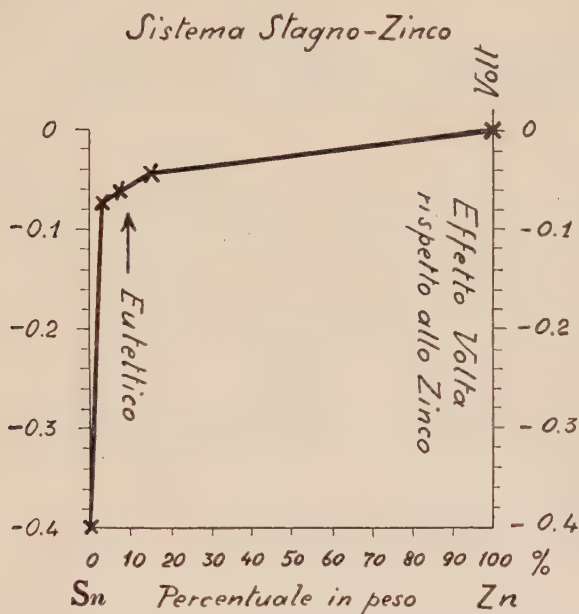


Fig. 2.

È oltremodo interessante mettere in relazione questo comportamento del metallo più elettropositivo, esistente libero in tali leghe, con le teorie sulla natura dell'effetto Volta.

Il caso delle leghe contenenti composti intermetallici è esposto nella Nota successiva.

Chimica fisica. — *L'effetto Volta nelle leghe metalliche solide.* Nota II di O. SCARPA (con la collaborazione per la parte sperimentale del dott. C. ROSSI).

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla curvatura di una superficie e di una varietà.* Nota di T. BOGGIO, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

È ben nota la proprietà, scoperta da Gauss, che la curvatura totale di una superficie si può esprimere mediante i coefficienti della prima forma quadratica fondamentale relativa alla superficie (cioè quella che esprime il ds^2) e le loro derivate prime e seconde.

Di qui risulta, fra altro, che se due superficie sono applicabili, esse hanno in punti corrispondenti la stessa curvatura totale. Di questa proprietà è stata data, mediante le omografie vettoriali, una dimostrazione diretta dal Burali-Forti⁽²⁾, che è poi stata perfezionata dall'ing. Rimini⁽³⁾.

In questa Nota espongo due nuove dimostrazioni vettoriali, assai semplici ed elementari (senza ricorrere alle omografie) del citato teorema di Gauss; la prima risulta immediatamente da una semplicissima identità vettoriale⁽⁴⁾.

Per ultimo sviluppo l'analogo calcolo, che pure risulta assai semplice, per la curvatura riemanniana di una varietà qualsiasi, secondo una data giacitura.

i. Indichiamo con S la superficie luogo del punto $P(u, v)$, funzione di due variabili numeriche indipendenti u, v (coordinate curvilinee di Gauss sulla superficie) avente derivate parziali successive dei primi tre ordini.

Poniamo poi, per brevità (anche per una funzione qualunque di u, v):

$$P_u = \frac{\partial P}{\partial u}, \quad P_v = \frac{\partial P}{\partial v}, \quad P_{uv} = \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v}, \text{ ecc.}$$

e supposto che i vettori P_u e P_v non siano paralleli, poniamo:

$$(1) \quad A = \text{mod} (P_u \wedge P_v),$$

(1) Nella seduta del 9 gennaio 1938.

(2) BURALI-FORTI, *Fondamenti per la Geometria differenziale su di una superficie* ecc. «Rendiconti Circolo Matematico di Palermo», to. XXXIII, 1° sem. 1912.

(3) RIMINI, *Dimostrazione assoluta di un teorema di Gauss.* «Bollettino Unione Matematica Italiana», anno X, 1931.

(4) Un'altra dimostrazione, che richiede però calcoli complicati, si trova nel vol. I, § 48, dell'opera: BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale*, 3ª ediz. Zanichelli, Bologna, 1927.

e indichiamo con \mathbf{N} un vettore unitario, normale alla superficie S in P , e il cui verso sia tale che:

$$(2) \quad \mathbf{P}_u \wedge \mathbf{P}_v = A\mathbf{N}, \quad \text{cioè} \quad \mathbf{P}_u \wedge \mathbf{P}_v \times \mathbf{N} = A.$$

Consideriamo poi il punto M definito da $M = O + \mathbf{N}$, ove O è un punto fisso arbitrario; esso, col variare di P sopra S , si muove sopra una superficie sferica Σ di centro O e raggio unitario, e la corrispondenza fra i punti P di S e i punti M di Σ costituisce la *rappresentazione sferica* di Gauss.

2. Ciò premesso, si definisce la curvatura totale (o di Gauss) \mathcal{K} della superficie S in P , come il reciproco del rapporto fra l'elemento d'area di S in P e il corrispondente elemento d'area di Σ nella rappresentazione sferica; di qui segue senz'altro:

$$\mathcal{K} = \mathbf{N}_u \wedge \mathbf{N}_v \times \mathbf{N} / (\mathbf{P}_u \wedge \mathbf{P}_v \times \mathbf{N}),$$

od anche, per la (2):

$$\mathcal{K} = (\mathbf{N}_u \wedge \mathbf{N}_v) \times (\mathbf{P}_u \wedge \mathbf{P}_v) / A^2,$$

e sviluppando:

$$A^2 \mathcal{K} = \mathbf{N}_u \times \mathbf{P}_u \cdot \mathbf{N}_v \times \mathbf{P}_v - \mathbf{N}_u \times \mathbf{P}_v \cdot \mathbf{N}_v \times \mathbf{P}_u.$$

Poichè $\mathbf{N} \times \mathbf{P}_u = 0$, ne segue, derivando rispetto a v :

$$\mathbf{N}_v \times \mathbf{P}_u = -\mathbf{N} \times \mathbf{P}_{uv}, \quad \text{e così} \quad \mathbf{N}_u \times \mathbf{P}_u = -\mathbf{N} \times \mathbf{P}_{uu}, \text{ ecc.};$$

perciò si può scrivere:

$$(3) \quad A^2 \mathcal{K} = \mathbf{N} \times \mathbf{P}_{uu} \cdot \mathbf{N} \times \mathbf{P}_{vv} - (\mathbf{N} \times \mathbf{P}_{uv})^2, \quad (1)$$

od ancora, per la (2):

$$A^4 \mathcal{K} = \mathbf{P}_u \wedge \mathbf{P}_v \times \mathbf{P}_{uu} \cdot \mathbf{P}_u \wedge \mathbf{P}_v \times \mathbf{P}_{vv} - (\mathbf{P}_u \wedge \mathbf{P}_v \times \mathbf{P}_{uv})^2.$$

Ricordando ora la nota identità vettoriale ⁽²⁾:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \times \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} \times \mathbf{z} = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \times \mathbf{x} & \mathbf{a} \times \mathbf{y} & \mathbf{a} \times \mathbf{z} \\ \mathbf{b} \times \mathbf{x} & \mathbf{b} \times \mathbf{y} & \mathbf{b} \times \mathbf{z} \\ \mathbf{c} \times \mathbf{x} & \mathbf{c} \times \mathbf{y} & \mathbf{c} \times \mathbf{z} \end{vmatrix},$$

(1) Questa formula equivale alla nota formula di Gauss:

$$\mathcal{K} = (DD'' - D'^2)/(EG - F^2).$$

(2) Cfr. BURALI-FORTI e MARCOLONGO, *Elementi di Calcolo vettoriale*, 2ª ediz., p. 33, Zanichelli, Bologna, 1920. — Un'identità perfettamente analoga vale pure per i vettori di un iperspazio; cfr. BOGGIO, *Formule di calcolo vettoriale negli iperspazi e applicazioni*. «Atti R. Accademia Scienze di Torino», vol. LXVI, 1931.

avremo:

$$A^4 \mathcal{K} = \begin{vmatrix} P_u^2 & P_u \times P_v & P_u \times P_{vv} \\ P_u \times P_v & P_v^2 & P_v \times P_{vv} \\ P_u \times P_{uu} & P_v \times P_{uu} & P_{uu} \times P_{vv} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} P_u^2 & P_u \times P_v & P_u \times P_{uv} \\ P_u \times P_v & P_v^2 & P_v \times P_{uv} \\ P_u \times P_{uv} & P_v \times P_{uv} & P_{uv}^2 \end{vmatrix},$$

cioè:

$$(3') \quad A^4 \mathcal{K} = \begin{vmatrix} P_u^2 & P_u \times P_v & P_u \times P_{vv} \\ P_u \times P_v & P_v^2 & P_v \times P_{vv} \\ P_u \times P_{uu} & P_v \times P_{uu} & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} P_u^2 & P_u \times P_v & P_u \times P_{uv} \\ P_u \times P_v & P_v^2 & P_v \times P_{uv} \\ P_u \times P_{uv} & P_v \times P_{uv} & 0 \end{vmatrix} + \\ + [P_u^2 \cdot P_v^2 - (P_u \times P_v)^2] (P_{uu} \times P_{vv} - P_{uv}^2),$$

ove è utile osservare che l'ultimo termine può pure scriversi così:

$$(4) \quad A^2 \left[\frac{\partial (P_v \times P_{uu})}{\partial v} - \frac{\partial (P_v \times P_{uv})}{\partial u} \right].$$

3. Considerando ora l'elemento d'arco ds della superficie S , si ha:

$$ds^2 = (dP)^2 = (P_u du + P_v dv)^2 = P_u^2 du^2 + 2 P_u \times P_v du dv + P_v^2 dv^2,$$

e ponendo:

$$E = P_u^2, \quad F = P_u \times P_v, \quad G = P_v^2,$$

si ha la forma ordinaria:

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

Ora è facile vedere che gli elementi che figurano nei determinanti della (3') e nella (4) si esprimono molto facilmente mediante E, F, G e le loro derivate prime e seconde; infatti, dalla (2) si deduce intanto:

$$A^2 = (P_u \wedge P_v)^2 = P_u^2 \cdot P_v^2 - (P_u \times P_v)^2 = EG - F^2,$$

inoltre:

$$P_u \times P_{uu} = \frac{1}{2} \frac{\partial P_u^2}{\partial u} = \frac{1}{2} E_u, \quad P_u \times P_{uv} = \frac{1}{2} \frac{\partial P_u^2}{\partial v} = \frac{1}{2} E_v,$$

$$P_v \times P_{uv} = \frac{1}{2} \frac{\partial P_v^2}{\partial u} = \frac{1}{2} G_u, \quad P_v \times P_{vv} = \frac{1}{2} \frac{\partial P_v^2}{\partial v} = \frac{1}{2} G_v,$$

$$P_u \times P_{vv} = \frac{\partial (P_u \times P_v)}{\partial v} - P_v \times P_{uv} = F_v - \frac{1}{2} G_u,$$

$$P_v \times P_{uu} = \frac{\partial (P_u \times P_v)}{\partial u} - P_u \times P_{uv} = F_u - \frac{1}{2} E_v,$$

e sostituendo nella (3'), e badando alla (4), risulta:

$$A^2 \mathcal{K} = \begin{vmatrix} E & F & F_v - G_u/2 \\ F & G & G_v/2 \\ E_u/2 & F_u - E_v/2 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} E & F & E_v/2 \\ F & G & G_u/2 \\ E_v/2 & G_u/2 & 0 \end{vmatrix} - \\ - A^2 (E_{vv} - 2F_{uv} + G_{uu})/2,$$

che dimostra quanto abbiamo affermato.

4. Si arriva alla stessa conclusione anche con queste altre semplicissime considerazioni.

L'espressione $\mathbf{N} \times \mathbf{P}_{uu} \cdot \mathbf{N}$ non è altro che la componente del vettore \mathbf{P}_{uu} nella direzione della normale \mathbf{N} ; perciò vale $P_{uu} - P_{uu}^S$, ove P_{uu}^S indica la componente tangenziale (cioè sul piano tangente) del vettore \mathbf{P}_{uu} , e analogamente per $\mathbf{N} \times \mathbf{P}_{uv} \cdot \mathbf{N}$; perciò si può scrivere la (3) così:

$$A^2 \mathcal{K} = (P_{uu} - P_{uu}^S) \times P_{vv} - (P_{uv} - P_{uv}^S) \times P_{uv}, \\ A^2 \mathcal{K} = P_{uu} \times P_{vv} - P_{uv}^2 - (P_{uu}^S \times P_{vv} - P_{uv}^S \times P_{uv}), \\ (5) \quad A^2 \mathcal{K} = \frac{\partial (P_v \times P_{uu})}{\partial v} - \frac{\partial (P_v \times P_{uv})}{\partial u} - (P_{uu}^S \times P_{vv} - P_{uv}^S \times P_{uv}).$$

Possiamo scomporre il vettore tangenziale P_{uu}^S così:

$$(6) \quad P_{uu}^S = h P_u + k P_v,$$

ove h, k sono funzioni numeriche; ne segue:

$$P_{uu}^S \times P_u = h P_u^2 + k P_u \times P_v, \\ P_{uu}^S \times P_v = h P_u \times P_v + k P_v^2,$$

e i primi membri, che possono anche scriversi, $P_{uu} \times P_u$, $P_{uu} \times P_v$, hanno per valore, come si trovò nel n. 3:

$$E_u/2, \quad F_u - E_v/2;$$

da queste eguaglianze si ricavano subito i valori di h e k (perchè il determinante dei coefficienti vale $EG - F^2$, che è supposto diverso da 0) che risultano espressi mediante E, F, G e le loro derivate prime; dopo ciò si ha dalla (6):

$$P_{uu}^S \times P_{vv} = h P_u \times P_{vv} + k P_v \times P_{vv},$$

ossia, per formule precedenti:

$$P_{uu}^S \times P_{vv} = h (F_v - G_u/2) + k G_v/2;$$

in modo analogo si ottiene $P_{uv}^S \times P_{uv}$ espresso mediante E, F, G e le loro derivate prime, e sostituendo nella (5) avremo la curvatura \mathcal{K} espressa mediante i coefficienti E, F, G e le loro derivate prime e seconde.

5. Le considerazioni precedenti si estendono senza difficoltà alla curvatura riemanniana di una varietà di un iperspazio.

Sia $P(q_1, q_2, \dots, q_n)$ un punto funzione delle n variabili numeriche indipendenti q_1, q_2, \dots, q_n , e, indicando brevemente con P_r la derivata parziale $\partial P / \partial q_r$, supponiamo che i vettori P_1, P_2, \dots, P_n siano linearmente indipendenti; il luogo dei punti P è una varietà, con n dimensioni, V_n , che si può sempre supporre immersa in uno spazio euclideo con un numero di dimensioni abbastanza grande.

Considerando poi la giacitura determinata da due spostamenti infinitesimi $dQ, \delta Q$ sulla varietà V_n , è noto che la curvatura riemanniana della V_n secondo la orientazione considerata può esprimersi colla formola seguente, che ho dato circa una ventina d'anni addietro (1):

$$\mathcal{K} = \frac{(\delta_v d_v dP - d_v \delta_v dP) \times \delta P}{ds^2 \delta s^2 \sin^2 \alpha},$$

ove α è l'angolo dei vettori $dP, \delta P$, e $ds, \delta s$ sono i moduli di questi vettori, e infine $d_v u, \delta_v u$ indicano per un vettore *tangenziale* u (cioè tangente alla V_n) i differenziali *superficiali* di u (2), corrispondenti agli incrementi dP e δP (che pure sono vettori tangenziali).

Esprimendo dP e δP colle formule:

$$dP = \sum_1^n P_h dq_h, \quad \delta P = \sum_1^n P_k \delta q_k,$$

l'espressione precedente si trasforma tosto in quest'altra:

$$(7) \quad \mathcal{K} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \sum_{i,j,h,k} \left[\left(\frac{\partial_v}{\partial q_j} \frac{\partial_v P_h}{\partial q_i} - \frac{\partial_v}{\partial q_i} \frac{\partial_v P_h}{\partial q_j} \right) \times P_k \right] \frac{dq_i}{ds} \frac{\delta q_j}{\delta s} \frac{dq_h}{ds} \frac{\delta q_k}{\delta s},$$

ove è da notare che l'espressione chiusa entro le parentesi quadre può ancora scriversi ovviamente:

$$(8) \quad \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial_v P_h}{\partial q_i} \times P_k \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial_v P_h}{\partial q_j} \times P_k \right) - \frac{\partial_v P_h}{\partial q_i} \times \frac{\partial_v P_k}{\partial q_j} + \frac{\partial_v P_h}{\partial q_j} \times \frac{\partial_v P_k}{\partial q_i}.$$

(1) BOGGIO, *Geometria assoluta degli spazi curvi*. « Rendiconti R. Accademia Lincei », vol. XXVIII, ser. 5^a, 1^o sem. 1919; cfr. anche: BURGATTI, BOGGIO, BURALI-FORTI, *Geometria differenziale*, p. 200, Zanichelli, Bologna, 1930.

(2) Essi sono le proiezioni sullo spazio euclideo tangente alla V_n in P degli ordinari differenziali del vettore u ; analogamente per le derivate superficiali $\partial_v u / \partial q_i$; cfr. BURGATTI, BOGGIO, BURALI-FORTI, op. cit., p. 177.

6. Si ha ora:

$$ds^2 = (dP)^2 = \left(\sum_h^n P_h dq_h \right)^2 = \sum_{h,k}^n P_h \times P_k dq_h dq_k,$$

e ponendo:

$$(9) \quad a_{hk} = P_h \times P_k$$

si ottiene l'espressione ordinaria per il ds^2 :

$$(10) \quad ds^2 = \sum_{h,k}^n a_{hk} dq_h dq_k.$$

È ora facile mostrare che i vari termini che figurano nella (8) si possono esprimere mediante i coefficienti a_{hk} e le loro derivate prime e seconde.

Infatti, si vede subito che:

$$\begin{aligned} \frac{\partial_v P_h}{\partial q_i} \times P_k &= \frac{\partial P_h}{\partial q_i} \times P_k = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial (P_i \times P_k)}{\partial q_h} + \frac{\partial (P_h \times P_k)}{\partial q_i} - \frac{\partial (P_i \times P_l)}{\partial q_k} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial q_h} + \frac{\partial a_{hk}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{ih}}{\partial q_k} \right) = \left[\begin{matrix} i & h \\ & k \end{matrix} \right], \end{aligned}$$

ove $\left[\begin{matrix} i & h \\ & k \end{matrix} \right]$ è il noto simbolo di Christoffel, con 3 indici di 1^a specie.

Inoltre, considerando il vettore tangenziale $\partial_v P_h / \partial q_i$, si può porre:

$$(11) \quad \frac{\partial_v P_h}{\partial q_i} = m_1 P_1 + m_2 P_2 + \dots + m_n P_n,$$

ove le m sono funzioni numeriche; ne segue, ricordando la (9):

$$\frac{\partial_v P_h}{\partial q_i} \times P_r = m_1 a_{r1} + m_2 a_{r2} + \dots + m_n a_{rn};$$

ponendo qui $r = 1, 2, \dots, n$ si ha un sistema di n equazioni lineari nelle m , in cui il determinante A dei coefficienti non è altro che il discriminante della forma quadratica fondamentale (10), che è supposto diverso da zero; tale sistema permette allora di ricavare le m e si ha chiaramente:

$$(12) \quad m_s = \sum_r^n a^{rs} \frac{\partial_v P_h}{\partial q_i} \times P_r = \sum_r^n a^{rs} \left[\begin{matrix} i & h \\ & r \end{matrix} \right]^{(1)},$$

ove a^{rs} indica il complemento algebrico dell'elemento a_{rs} nella matrice formata dalle a_{rs} , diviso per il determinante A .

(1) Questa sommatoria rappresenta il noto simbolo di Christoffel, con 3 indici, di 2^a specie $\left\{ \begin{matrix} i & h \\ & s \end{matrix} \right\}$.

Dalla (11) risulta poi:

$$\frac{\partial_v P_h}{\partial q_i} \times \frac{\partial_v P_k}{\partial q_j} = \sum_i^n m_s \frac{\partial_v P_k}{\partial q_j} \times P_s,$$

ove il secondo membro, in virtù della (12), può scriversi:

$$\sum_i^n a^{rs} \begin{bmatrix} i & h \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j & k \\ s \end{bmatrix};$$

sostituendo nella (8) vediamo che tale espressione vale:

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \begin{bmatrix} i & h \\ k \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial q_j} \begin{bmatrix} j & h \\ k \end{bmatrix} + \sum_i^n a^{rs} \left\{ \begin{bmatrix} j & h \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & k \\ s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i & h \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j & k \\ s \end{bmatrix} \right\},$$

la quale non è altro che l'ordinario simbolo di Riemann, con 4 indici, di 1^a specie (ij, hk); dopo ciò la (7) assume la nota forma ⁽¹⁾

$$\mathcal{K} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \sum_i^n a_{ijk} (ij, hk) \frac{dq_i}{ds} \frac{\delta q_j}{\delta s} \frac{dq_h}{ds} \frac{\delta q_k}{\delta s},$$

e la curvatura \mathcal{K} risulta così espressa mediante i coefficienti a_{ijk} della forma quadratica fondamentale (10) e le loro derivate prime e seconde.

Ne segue senz'altro che se due varietà collo stesso numero di dimensioni sono applicabili, allora le curvature riemanniane in ogni coppia di punti corrispondenti, e secondo orientazioni corrispondenti, devono sempre essere eguali fra loro.

Una dimostrazione diretta di questa proprietà (ma meno semplice della precedente) trovasi a p. 210 della già citata *Geometria differenziale* di BURGATTI, BOGGIO, BURALI-FORTI.

(1) LEVI-CIVITA, *Lezioni di Calcolo differenziale assoluto*, p. 223, Stock, Roma, 1925.
Cfr. anche: BIANCHI, op. cit., vol. II, § 434.

Matematica. — *Sopra un fascio di quadriche definito in un punto di una superficie.* Nota di U. SALINI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. E. BOMPIANI.

§ 1. Nel presente lavoro mi propongo di ripigliare lo studio di alcuni enti (dipendenti dall'intorno del 4° ordine) legati al generico punto di una qualunque superficie non rigata dello spazio ordinario.

Precisamente ci riferiamo al fascio di quadriche, introdotto dal Bompiani nelle sue ricerche sugli invarianti di intersezione di due curve sghembe ⁽²⁾, e che è poi stato chiamato *fascio principale* ⁽³⁾. Col sussidio delle dette quadriche si mettono, per esempio, in relazione la normale proiettiva con la prima retta principale di Bompiani (Lane, loc. cit.) e si vengono a stabilire così dei legami che mettono sotto nuova luce quanto si sapeva sugli enti in discorso prima di detti lavori.

§ 2. Riferendo la data superficie alle asintotiche, le coordinate proiettive non omogenee x, y, z di un suo punto generico $P(u, v)$ soddisfano ad equazioni della forma

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = a \frac{\partial x}{\partial u} + b \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = p \frac{\partial x}{\partial u} + q \frac{\partial x}{\partial v} \end{cases} \quad (\text{e le analoghe in } y \text{ e } z)$$

essendo a, b, p, q funzioni di u e v legate dalle note condizioni di integrabilità ⁽⁴⁾.

Facciamo corrispondere alle coordinate (x'', y'', z'') di un qualsiasi punto dello spazio le coordinate ausiliarie o locali (x', y', z') , mediante la posizione:

$$x'' = x + x' \frac{\partial x}{\partial u} + y' \frac{\partial x}{\partial v} + z' \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \quad (\text{e le analoghe in } y \text{ e } z)$$

(1) Nella seduta del 9 gennaio 1938.

(2) BOMPIANI, *Invarianti d'intersezione di due curve sghembe*. « Rendic. Lincei », XIV, 1931, p. 456.

(3) P. LANE, *Invariants of intersection* ecc. « American Journal of Mathematics », october 1932, p. 699.

(4) Cfr. FUBINI e ČECH, *geometria proiettiva differenziale*, to. I pp. 89-96, 1926; cfr. anche P. CALAPSO, *Sulle reti e congruenze coniugate* ecc. « Annali di Matematica », ser. 4°, to. IV, 1926.

ed osserviamo che rispetto alle coordinate locali (x', y', z') il detto fascio principale si rappresenta mediante l'equazione:

$$(1) \quad C z'^2 - \frac{1}{3} x' y' + \frac{1}{3} \left(a - \frac{1}{2b} \frac{\partial b}{\partial u} \right) x' z' + \frac{1}{3} \left(q - \frac{1}{2p} \frac{\partial p}{\partial v} \right) y' z' + z' = 0.$$

Mi propongo, dietro suggerimento del Calapso, di mettere in relazione i regoli contenuti nella generica quadrica del fascio principale con i complessi osculatori alle asintotiche della superficie, in analogia a quanto egli stesso ha già fatto per i regoli appartenenti alle quadriche di Darboux ⁽¹⁾.

§ 3. Consideriamo i due complessi C_1 e C_2 rispettivamente osculatori alle asintotiche $v = \text{cost}$, $u = \text{cost}$. Riferendoci al regolo che si appoggia alla tangente in P all'asintotica $v = \text{cost}$ ed appartenente ad una qualunque quadrica del fascio (1), si trova che detto regolo ha comune con i due complessi C_1 e C_2 , e fuori del piano tangente in P, rispettivamente le rette r_1 ed r_2 . Dette rette si appoggiano alla tangente in P alla asintotica $v = \text{cost}$ rispettivamente in due punti A e B. Al variare della quadrica nel fascio (1) le rette r_1 ed r_2 descrivono due fasci di rispettivi centri A e B, i cui piani diremo π_1 e π_2 .

Analogamente, riferendoci al regolo che si appoggia alla tangente in P all'asintotica $u = \text{cost}$ ed appartenente ad una qualunque quadrica del fascio (1), si trova che detto regolo ha comune con i due complessi C_1 e C_2 , e fuori del piano tangente in P, rispettivamente le rette r'_2 ed r'_1 . Dette rette si appoggiano alla tangente in P alla asintotica $u = \text{cost}$ rispettivamente in due punti B' ed A'. Al variare della quadrica nel fascio (1) le rette r'_2 ed r'_1 descrivono due fasci di rispettivi centri B' ed A', i cui piani diremo π'_2 e π'_1 .

Si trova allora quanto segue:

- a) La retta $s_2 \equiv AA'$ è il 2° spigolo di Green;
- b) La retta s_1 comune ai piani π_1 e π'_1 è il primo spigolo di Green;
- c) La retta $l_2 \equiv BB'$ è del 2° fascio canonico e precisamente è la coniugata armonica della 2ª tangente canonica t_2 rispetto al 2° spigolo di Green s_2 e alla 2ª direttrice d_2 di Wilczynski;
- d) La retta l_1 comune ai piani π_2 e π'_2 è del primo fascio canonico e precisamente, indicando con d_1 la prima direttrice di Wilczynski e con t_1 la prima tangente canonica, si ha $(s_1 d_1 l_1 t_1) = 3$.

(1) R. CALAPSO, *Sui sistemi nulli osculatori alle asintotiche di una data superficie*. « Rendiconti Lincei », 1931; ID., *Studi sintetici di geometria proiettiva differenziale*. « Rendiconti Lincei », 1931; ID., *Ricerche sulle cubiche gobbe in contatto tripunto ecc.* « Mathematica », Cluj, 1935, vol. XI.

Si conclude che partendo dal fascio (1) e dai complessi C_1 e C_2 osculatori alle asintotiche si possono definire i due spigoli di Green ⁽¹⁾, le direttrici di Wilczynski, il punto canonico ed il piano canonico.

§ 4. In questa ultima parte del lavoro ci occupiamo di caratterizzare le seguenti quadriche:

a) Quadriche passanti per le tangenti asintotiche e tali che rispetto ad esse i due spigoli di Green siano polari reciproche. Si trova che dette quadriche appartengono ad una rete (R_1) che, nelle coordinate locali (x', y', z') , è rappresentata dalla equazione:

$$(2) \quad \mu z'^2 - x' y' + \lambda \left[\left(a - \frac{1}{2b} \frac{\partial b}{\partial u} \right) x' + \left(q - \frac{1}{2p} \frac{\partial p}{\partial v} \right) y' + 2 \right] z' + z' = 0.$$

Questa rete gode delle proprietà:

I) *La polare della prima direttrice di Wilczynski rispetto alla generica quadrica della rete è una retta del secondo fascio canonico variabile in esso al variare della quadrica.*

II) *La polare della seconda direttrice di Wilczynski rispetto alla generica quadrica della rete è una retta del primo fascio canonico, variabile in esso al variare della quadrica nella rete.*

III) *Il polo del piano canonico rispetto alla generica quadrica della rete è il punto canonico.*

IV) *La polare della 2^a tangente canonica rispetto alla generica quadrica della rete è la coniugata armonica di detta tangente rispetto alle tangenti asintotiche (prima tangente canonica).*

b) Quadriche passanti per le tangenti asintotiche e tali che rispetto ad esse le due direttrici di Wilczynski siano polari reciproche.

Si trova che le dette quadriche appartengono ad una rete (R_2) che, nelle coordinate locali (x', y', z') , è rappresentata dalla equazione:

$$(3) \quad \mu_1 z'^2 - x' y' + \lambda_1 \left[\left(\frac{1}{2p} \frac{\partial p}{\partial u} + \frac{a}{2} \right) x' + \left(\frac{1}{2b} \frac{\partial b}{\partial v} + \frac{q}{2} \right) y' + 1 \right] z' + z' = 0.$$

Questa rete gode di proprietà analoghe a quelle della rete (R_1). Precisamente le proprietà III e IV restano invariate mentre quelle I e II si riferiscono questa volta al 1° e 2° spigolo di Green.

§ 5. Dalle reti (R_1) e (R_2) si possono staccare due fasci (F_1), (F'_1) dalla prima e due fasci (F_2), (F'_2) dalla seconda, tali che:

a) *le polari delle rette s_1 e d_1 rispettivamente rispetto alle quadriche di (F_2) ed (F_1) separano armonicamente le rette d_2 ed s_2 .*

(1) LANE, loc. cit.

b) le polari delle rette s_2 e d_2 rispettivamente rispetto alle quadriche di (F_2) ed (F_1) separano armonicamente le rette d_1 ed s_1 .

Conclusioni analoghe valgono per i fasci (F'_1) ed (F'_2) .

I valori del parametro λ che danno luogo ai fasci (F_1) ed (F'_1) , tratti dalla rete (R_1) , sono radici della equazione:

$$4\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0.$$

In corrispondenza i valori di λ_1 che danno luogo ai fasci (F_2) , (F'_2) , tratti dalla rete (R_2) , si ricavano dalla $\lambda_1 = -\frac{1}{2\lambda}$.

Analogamente dalle reti (R_1) ed (R_2) si possono staccare due fasci (φ_1) e (φ'_1) dalla prima e due fasci (φ_2) e (φ'_2) dalla seconda tali che:

a) le rette polari delle rette s_1 e d_1 rispettivamente rispetto alle quadriche dei fasci (φ_2) e (φ_1) coincidono in una unica retta del 2° fascio canonico.

b) le rette polari delle rette s_2 e d_2 rispettivamente rispetto alle quadriche dei fasci (φ_2) e (φ_1) coincidono in una unica retta del 1° fascio canonico.

Considerazioni analoghe valgono per i fasci (φ'_1) , (φ'_2) .

I valori di λ che danno luogo ai due fasci (φ_1) , (φ'_1) , tratti dalla rete (R_1) , sono le radici della equazione

$$4\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0.$$

I corrispondenti valori di λ_1 che danno luogo ai fasci (φ_2) e (φ'_2) , tratti dalla rete (R_2) , si ricavano dalla $\lambda_1 = -\frac{1}{2\lambda}$.

Meccanica. — *Le equazioni generali della dinamica relativista ristretta.* Nota di G. GARCÍA, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Consideriamo un sistema materiale con k gradi di libertà, o, nel caso anonomo, di mobilità, costituito da n punti P_μ di massa m_μ ($\mu = 1, 2, 3, \dots, n$) vincolati, come ora specificheremo. Ci riferiamo addirittura al caso più generale in cui siano imposti al sistema soltanto legami di mobilità, quelli di posizione risultandone (quando esistono) conseguenze integrali. Supporremo pertanto che gli spostamenti effettivi degli n punti P_μ del sistema debbano rientrare nello schema

$$(1) \quad d\vec{P}_\mu = \sum_v^k \vec{A}_{\mu v} dq_v + \vec{A}_\mu dt,$$

dove i coefficienti $\vec{A}_{\mu v}, \vec{A}_\mu$ ($\mu = 1, 2, \dots, n$; $v = 1, 2, \dots, k$) sono vettori *a priori* qualsivogliono, funzioni della configurazione del sistema, cioè di P_1, P_2, \dots, P_n , e del tempo t .

Gli spostamenti virtuali saranno in conformità definiti dalle espressioni differenziali (esenti dal dt)

$$(2) \quad \delta\vec{P}_\mu = \sum_v^k \vec{A}_{\mu v} \delta q_v,$$

nelle quali i δq_v vanno riguardati come incrementi arbitrari.

In questo schema rientra notoriamente il caso olonomo, caratterizzato dalla ipotesi particolare che i secondi membri delle (1) siano differenziali esatti di espressioni in termini finiti

$$(3) \quad P_\mu = P_\mu(q_1, q_2, \dots, q_k/t)$$

che definiscono parametricamente i vincoli di posizione imposti al sistema. Allora si ha necessariamente

$$(4) \quad \begin{cases} \vec{A}_{\mu v} = \frac{\partial P_\mu}{\partial q_v} \\ \vec{A}_\mu = \frac{\partial P_\mu}{\partial t} \end{cases} \quad (\mu = 1, 2, \dots, n; v = 1, 2, \dots, k).$$

(1) Presentata nella seduta del 9 gennaio 1938.

EQUAZIONE SIMBOLICA DEL MOTO NELLA MECCANICA CLASSICA.

La equazione generale della dinamica che risulta dal principio di d'Alembert combinato con il principio lagrangiano dei lavori virtuali si scrive in forma vettoriale

$$(5) \quad \sum_i^n [\vec{F}_\mu - m_\mu \vec{J}_\mu] \times \vec{\delta P}_\mu = 0$$

essendo \vec{F}_μ la forza direttamente applicata al punto P_μ e \vec{J}_μ la sua accelerazione.

EQUAZIONE VETTORIALE DEL PLANCK IN RELATIVITÀ RISTRETTA.

La equazione vettoriale del Planck che regge il moto di un generico punto *libero* P_μ è

$$(6) \quad m_\mu \vec{J}_\mu = m_\mu \frac{d}{dt} \left[\frac{\vec{P}'_\mu}{K_\mu} \right] = \vec{F}_\mu \quad (\mu = 1, 2, 3, \dots, n)$$

designando P'_μ la velocità di P_μ cioè $\frac{dP_\mu}{dt}$, m_μ la massa (in stato di riposo) e

$$K_\mu = \sqrt{1 - \frac{\vec{P}'_\mu \times \vec{P}'_\mu}{c^2}} \quad (c \text{ velocità della luce nel vuoto}).$$

ESTENSIONE DEI PRINCIPI DI D'ALEMBERT E DI LAGRANGE.

In base a quanto precede, appare perfettamente plausibile di assumere l'equazione simbolica

$$(7) \quad \sum_i^n m_\mu \frac{d}{dt} \left[\frac{\vec{P}'_\mu}{K_\mu} \right] \times \vec{\delta P}_\mu = \sum_i^n \vec{F}_\mu \times \vec{\delta P}_\mu$$

come legge compendiosa del moto per un sistema materiale comunque sottoposto a vincoli (1) di mobilità; e sarebbe facile riconoscere che le (1) e (7) sono effettivamente atte alla univoca determinazione del moto, tenendo conto delle condizioni iniziali.

In virtù delle (2), la (7) può essere scritta

$$(8) \quad \sum_i^n \sum_v^k m_\mu \frac{d}{dt} \left[\frac{\vec{P}'_\mu}{K_\mu} \right] \times \vec{A}_{\mu v} \delta q_v = \sum_i^n \sum_v^k \vec{F}_\mu \times \vec{A}_{\mu v} \delta q_v.$$

Dalle (1) si ha, dividendo per dt ,

$$\vec{P}'_{\mu} = \sum_1^k \vec{A}_{\mu\nu} \cdot q'_{\nu} + \vec{A}_{\mu}$$

dopodichè, derivando parzialmente rispetto a q'_{ν} , risulta

$$\frac{\partial \vec{P}'_{\mu}}{\partial q'_{\nu}} = \vec{A}_{\mu\nu}.$$

Se si tratta di vincoli olonomi, il confronto colle (4) ci dà

$$(9) \quad \frac{\partial \vec{P}'_{\mu}}{\partial q'_{\nu}} = \frac{\partial \vec{P}_{\mu}}{\partial q_{\nu}} \quad \left(\begin{array}{l} \mu = 1, 2, 3, \dots, n \\ \nu = 1, 2, 3, \dots, k \end{array} \right).$$

D'altra parte si ha identicamente

$$(10) \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{\vec{P}'_{\mu}}{K_{\mu}} \right] \times \frac{\partial \vec{P}'_{\mu}}{\partial q'_{\nu}} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\vec{P}_{\mu}}{K_{\mu}} \times \frac{\partial \vec{P}'_{\mu}}{\partial q'_{\nu}} \right] - \frac{\vec{P}'_{\mu}}{K_{\mu}} \times \frac{\partial \vec{P}'_{\mu}}{\partial q_{\nu}},$$

sicchè, sostituendo nella equazione simbolica (8), dopo avervi posto, per $\vec{A}_{\mu\nu}$, $\frac{\partial \vec{P}'_{\mu}}{\partial q'_{\nu}}$ nel primo membro, e $\frac{\partial \vec{P}_{\mu}}{\partial q_{\nu}}$ nel secondo, si ha

$$(11) \quad \sum_1^n \sum_1^k m_{\mu} \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\vec{P}'_{\mu}}{K_{\mu}} \times \frac{\partial \vec{P}'_{\mu}}{\partial q'_{\nu}} \right] - \frac{\vec{P}'_{\mu}}{K_{\mu}} \times \frac{\partial \vec{P}'_{\mu}}{\partial q_{\nu}} \right\} \delta q_{\nu} = \\ = \sum_1^n \sum_1^k \vec{F}_{\mu} \times \frac{\partial \vec{P}'_{\mu}}{\partial q_{\nu}} \delta q_{\nu}.$$

Come nell'ordinaria meccanica, si può anche ora introdurre una funzione $T(q/q'/t)$ che, derivata rispetto a q'_{ν} sia eguale a

$$\sum_1^n m_{\mu} \frac{\vec{P}'_{\mu}}{K_{\mu}} \times \frac{\partial \vec{P}'_{\mu}}{\partial q'_{\nu}},$$

mentre la derivata rispetto a q_{ν} valga

$$- \sum_1^n \frac{\vec{P}'_{\mu}}{K_{\mu}} \times \frac{\partial \vec{P}'_{\mu}}{\partial q_{\nu}}.$$

Basta notare che, per un punto generico P_{μ} , si ha

$$\frac{\partial T_{\mu}}{\partial q'_{\nu}} = m_{\mu} \frac{\vec{P}'_{\mu}}{K_{\mu}} \times \frac{\partial \vec{P}'_{\mu}}{\partial q'_{\nu}}, \quad \frac{\partial T_{\mu}}{\partial q_{\nu}} = m_{\mu} \frac{\vec{P}'_{\mu}}{K_{\mu}} \times \frac{\partial \vec{P}'_{\mu}}{\partial q_{\nu}},$$

ove si assuma

$$(12) \quad T_{\mu} = -m_{\mu} c^2 \sqrt{1 - \frac{\vec{P}'_{\mu} \times \vec{P}'_{\mu}}{c^2}} + \text{cte} = -m_{\mu} c^2 K_{\mu} + \text{cte},$$

sicchè, omettendo la costante, la cercata funzione T vale senz'altro

$$(13) \quad T = \sum_{\mu}^n T_{\mu} = - \sum_{\mu}^n m_{\mu} \sqrt{1 - \frac{\vec{P}'_{\mu} \times \vec{P}'_{\mu}}{c^2}},$$

e dalla (11) si ricavano le equazioni

$$(14) \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial q'_v} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_v} = Q_v \quad (v = 1, 2, 3, \dots k)$$

in cui

$$(15) \quad Q_v = \sum_{\mu}^n \vec{F}_{\mu} \times \frac{\partial P_{\mu}}{\partial q_v}.$$

Ecco la forma delle equazioni di Lagrange che conviene ai sistemi olonomi nella relatività ristretta.

Se le forze derivano da un potenziale $U(q/t)$, cioè se $Q_v = \frac{\partial U}{\partial q_v}$, si avrà la funzione lagrangiana $L = T + U$. Nel caso di un solo punto P_{μ} , sarà in particolare

$$(16) \quad L_{\mu} = T_{\mu} + U_{\mu} = -m_{\mu} c^2 \left[K_{\mu} - \frac{U_{\mu}}{m_{\mu} c^2} \right] + \text{cte}.$$

Tenendo presente che $\vec{P}' \times \vec{P}' = v_{\mu}^2$, la funzione L_{μ} può, in seconda approssimazione, essere posta sotto la forma

$$(17) \quad L_{\mu} = -m_{\mu} c^2 \sqrt{1 - \frac{v_{\mu}^2}{c^2} - \frac{2U_{\mu}}{m_{\mu} c^2}} + \text{cte},$$

già considerata dal prof. Tullio Levi-Civita. Comunque, le equazioni (14) si scrivono

$$(18) \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L_{\mu}}{\partial q'_v} \right] - \frac{\partial L_{\mu}}{\partial q_v} = 0 \quad (v = 1, 2, 3, \dots k).$$

Meccanica. — *Sulla composizione dei movimenti secondo il Poincaré.* Nota di G. LAMPARIELLO, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

§ I. — NOZIONE DI MOTO COMPOSTO SECONDO IL POINCARÉ.

1. Nel suo *Cours de cinématique*, professato alla Sorbona, il Poincaré ha posto la seguente definizione di moto composto.

Per uno stesso sistema S di punti siano definiti, come possibili in uno stesso intervallo di tempo, più moti M_1, M_2, \dots . Dicesi *moto composto o risultante* dei dati il moto in cui ogni punto del sistema S , in ogni istante del considerato intervallo di tempo, ha come velocità la risultante delle velocità che a quel medesimo punto in quel medesimo istante competono nei moti M_1, M_2, \dots (*moti componenti*).

Veramente il Poincaré suppone che questi siano moti rigidi, ma è ovvio che la definizione si pone in generale negli stessi termini precedenti, come è indicato nelle *Lezioni di meccanica razionale* dei proff.ri Levi-Civita ed Amaldi.

2. Ciò posto, il Poincaré enuncia e dimostra il seguente

TEOREMA. — *Il moto composto di più moti rigidi è rigido.*

Scopo della presente Nota è di mostrare che questo teorema *non* sussiste in generale e di stabilire la condizione necessaria e sufficiente affinché la rigidità del moto composto consegua da quella dei moti componenti.

Ma prima di orientarci verso la nostra ricerca, conviene richiamare l'erronea dimostrazione di quel teorema, cui si è condotti quasi spontaneamente dalla forma così intuitiva ed ingannevole della definizione di moto composto.

Finora nessun dubbio era stato sollevato sulla validità della dimostrazione, tanto meno su quella del teorema, che anzi si trova enunciato in alcune trattazioni scolastiche come una proprietà fondamentale di comportamento della rigidità dei moti di fronte all'operazione di composizione.

È così che nelle *Lezioni* citate i proff.ri Levi-Civita ed Amaldi accettano la definizione del Poincaré e sono coinvolti nello stesso errore ⁽²⁾.

(1) Nella seduta del 9 gennaio 1938.

(2) Nella seconda edizione del *Compendio di meccanica razionale*. Bologna, Zanichelli, 1938 (in corso di stampa), è stata senz'altro abbandonata la composizione dei moti rigidi

3. Ecco dunque qual'era la pretesa dimostrazione del teorema.

Si ricordi che un moto rigido è caratterizzato dalla proprietà che ad ogni istante le velocità di due punti quali che siano hanno la stessa componente secondo la congiungente dei due punti.

Ebbene, siano $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}''_1; \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}''_2$ le velocità che competono a due punti P', P'' del sistema S , in un medesimo istante generico, nei moti rigidi M_1, M_2 rispettivamente.

Per definizione, a codesti due punti, nel medesimo istante, competono le velocità

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2, \quad \mathbf{v}'' = \mathbf{v}''_1 + \mathbf{v}''_2.$$

Poichè per la rigidità dei moti M_1, M_2 coincidono le componenti secondo la retta $P'P''$ di \mathbf{v}'_1 e \mathbf{v}''_1 , di \mathbf{v}'_2 e \mathbf{v}''_2 , *coincideranno anche le componenti secondo la stessa retta $P'P''$ delle velocità $\mathbf{v}', \mathbf{v}''$* ; e, ciò valendo per ogni coppia di punti del sistema, in ogni istante dell'intervallo di tempo considerato, si conclude che il moto composto di M_1, M_2 è pur esso rigido.

Il corsivo testè riportato contiene la deduzione fallace del ragionamento. Basta riflettere che la retta $P'P''$ non occupa, in generale, la stessa posi-

nel senso suaccennato. Il seguente semplicissimo esempio mostra l'inesattezza del teorema del Poincaré.

Siano M_1, M_2 due rotazioni uniformi di una figura piana nel suo piano intorno ad un punto fisso O . La figura sia riferita ad assi cartesiani solidali Oxy che, in entrambi i moti, supponiamo coincidenti nell'istante $t=0$ con gli assi di riferimento $O\xi\eta$, fissi nel piano. Le equazioni dei moti M_1, M_2 sono del tipo

$$(1) \quad \begin{cases} \xi = x \cos \omega t - y \sin \omega t \\ \eta = x \sin \omega t + y \cos \omega t, \end{cases}$$

ove al posto di ω si sostituiscano rispettivamente le velocità angolari ω_1, ω_2 di M_1 ed M_2 , mentre le x, y sono costanti.

Si fissi ora l'attenzione sul punto P della figura di coordinate $x=1, y=0$. La sua velocità nei moti M_1 ed M_2 è data da

$$\dot{\xi}_1 = -\omega_1 \sin \omega_1 t, \quad \dot{\eta}_1 = \omega_1 \cos \omega_1 t; \quad \dot{\xi}_2 = -\omega_2 \sin \omega_2 t, \quad \dot{\eta}_2 = \omega_2 \cos \omega_2 t$$

e quindi nel moto composto è

$$(2) \quad \dot{\xi} = -\omega_1 \sin \omega_1 t - \omega_2 \sin \omega_2 t, \quad \dot{\eta} = \omega_1 \cos \omega_1 t + \omega_2 \cos \omega_2 t.$$

Integrando e tenendo conto che per $t=0$ dev'essere $\xi=1, \eta=0$, si ha

$$\xi = \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t - 1, \quad \eta = \sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t.$$

Poichè O è fisso nei moti M_1, M_2 , è tale anche nel moto composto. Se questo fosse rigido, la funzione $\varphi(t) = \xi^2 + \eta^2 - 1$ dovrebbe essere identicamente nulla; invece si ha

$$\varphi(t) = 2[1 + \cos(\omega_1 - \omega_2)t - (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t)].$$

Anche quando le velocità angolari sono eguali $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, si ha $\varphi(t) = 4(1 - \cos \omega t)$ e il moto composto *non* è rigido!

zione rispetto ad un riferimento fisso (intendendo per fisso quel triedro *a priori* qualunque cui si riferiscono le velocità in entrambi i moti), all'istante considerato, nei due moti M_1, M_2 .

La cosa richiede quindi un esame più approfondito.

§ 2. — CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE AFFINCHÈ IL MOTO COMPOSTO (SECONDO POINCARÉ) DI DUE MOTI RIGIDI SIA ANCHE RIGIDO È CHE ALMENO UNO DEI MOTI COMPONENTI SIA TRASLATORIO.

4. La sufficienza della condizione or ora enunciata è ovvia, se si pensa che, in un qualunque moto traslatorio, la distribuzione delle velocità è puramente temporale: equivalendo ciò ad affermare che la condizione caratteristica della rigidità di un moto (cfr. n. 3) continua a sussistere, se ad ogni istante, la velocità dei singoli punti del sistema in movimento viene incrementata (geometricamente) di una *stessa* velocità (anche variabile nel tempo).

5. Che la condizione sia necessaria è molto meno evidente. Ecco come proponiamo di stabilirla: gli sviluppi formali subito seguiranno.

Per definizione, al generico punto P del sistema in movimento compete nel moto composto la velocità

$$(1) \quad v = v_1 + v_2,$$

dove v_1 e v_2 sono le velocità di P rispettivamente nei moti M_1, M_2 .

Per il teorema fondamentale della cinematica dei sistemi rigidi, scelto un punto O del sistema quale centro di riduzione, la velocità v di ogni punto P, in un moto rigido, è data da

$$(2) \quad v = v_o + \omega \wedge (P - O),$$

dove v_o ed ω (*vettori caratteristici del moto*) sono rispettivamente la velocità di O e la velocità angolare (vettoriale), all'istante considerato.

Se dunque il moto composto è rigido, la (1) relativa all'istante suddetto si traduce nelle due condizioni

$$(3) \quad v_o = v_{1o} + v_{2o},$$

$$(4) \quad \omega = \omega_1 + \omega_2,$$

dove $v_{1o}, \omega_1; v_{2o}, \omega_2$ denotano i vettori caratteristici dei moti rigidi componenti M_1, M_2 (scelto sempre O quale centro di riduzione).

D'altra parte, dovendo la (1) sussistere qualunque sia l'istante t , varranno insieme con essa, durante tutto il movimento, anche le relazioni ottenute per derivazione di qualunque ordine.

In particolare deve valere la medesima legge di composizione per le accelerazioni

$$(5) \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2,$$

con evidente significato di $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}$.

Si è così condotti ad esprimere che la (5) deve valere, in ogni istante, per qualunque punto P del sistema, purchè si tenga conto delle condizioni (3), (4) per le tre coppie di vettori caratteristici.

Ciò implica, come ora passiamo a dimostrare, che una delle velocità angolari ω_1, ω_2 dev'essere *identicamente nulla*.

6. La distribuzione delle accelerazioni in un moto rigido si ottiene per derivazione dalla formula (2).

Si trova

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_o + \dot{\omega} \wedge (P - O) + \mathbf{A} (P - O),$$

dove \mathbf{a}_o è l'accelerazione del centro di riduzione O e il 2° e il 3° addendo sono rispettivamente il risultato di un'omografia assiale e della dilatazione

$$\mathbf{A} (P - O) = \omega \times (P - O) \cdot \omega - \omega^2 (P - O),$$

applicate al vettore $P - O$.

Se per semplicità denotiamo questo con \mathbf{u} , dalle (3), (4) segue senz'altro che si ha

$$\mathbf{a}_o = \mathbf{a}_{1o} + \mathbf{a}_{2o},$$

$$\dot{\omega} \wedge \mathbf{u} = \dot{\omega}_1 \wedge \mathbf{u} + \dot{\omega}_2 \wedge \mathbf{u},$$

dove $\mathbf{a}_{1o}, \mathbf{a}_{2o}$ denotano le accelerazioni di O nei moti M_1, M_2 , talchè si è condotti ad esprimere che, sussistendo la (4), deve risultare

$$(5') \quad \mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{A}_1 \mathbf{u} + \mathbf{A}_2 \mathbf{u},$$

qualunque sia \mathbf{u} , ove $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ denotano le dilatazioni analoghe ad \mathbf{A} nei moti M_1, M_2 .

Dev'esser dunque soddisfatta la condizione

$$(5'') \quad \omega_1^2 \times \mathbf{u} \cdot \omega - \omega^2 \mathbf{u} = \omega_1 \times \mathbf{u} \cdot \omega_1 - \omega_1^2 \mathbf{u} + \omega_2 \times \mathbf{u} \cdot \omega_2 - \omega_2^2 \mathbf{u},$$

dove ω è dato da (4).

Dico che, se è $\omega_2 \neq 0$, dev'essere $\omega_1 = 0$.

Si osservi intanto che la (5''), tenuto conto della (4), diventa

$$(6) \quad 2 \omega_1 \times \omega_2 \cdot \mathbf{u} = \omega_2 \times \mathbf{u} \cdot \omega_1 + \omega_1 \times \mathbf{u} \cdot \omega_2.$$

In ogni istante t si consideri una terna di assi cartesiani $Oxy\chi$, il cui asse χ sia parallelo all'asse istantaneo del moto rigido M_2 (e concorde col

verso della velocità angolare ω_2). Le componenti di ω_2 secondo tali assi sono in conformità 0, 0, ω_2 .

Se allora p_1, q_1, r_1 sono le componenti di ω_1 ed x, y, z le coordinate del generico punto P del sistema (componenti di u), la condizione (6) diventa

$$2 r_1 \omega_2 u = \omega_2 z \omega_1 + (p_1 x + q_1 y + r_1 z) \omega_2.$$

Debbono dunque sussistere le identità (in x, y, z) che si hanno eguagliando le componenti cartesiane di ambo i membri

$$\begin{cases} 2 r_1 \omega_2 x = p_1 \omega_2 z \\ 2 r_1 \omega_2 y = q_1 \omega_2 z \\ 2 r_1 \omega_2 z = r_1 \omega_2 z + (p_1 x + q_1 y + r_1 z) \omega_2. \end{cases}$$

Essendo $\omega_2 \neq 0$, ne consegue necessariamente che

$$p_1 = q_1 = r_1 = 0.$$

Cioè, la velocità angolare del moto M_1 dev'essere nulla in ogni istante. Il moto M_1 è dunque puramente *traslatorio*.

Parassitologia. — *Una nuova classificazione degli « Haemosporeidiideae » basata sull'esistenza di un ciclo schizogonico dei Plasmodi nelle cellule dei tessuti.* Nota di A. CORRADETTI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Recentemente si è osservato che dopo l'inoculazione di sporozoi di alcuni Plasmodi aviari (*P. elongatum*, *P. relictum*, *P. cathemerium*, *P. gallinaceum*) si possono trovare incluse nel citoplasma di cellule degli endoteli capillari e di cellule dei tessuti forme di segmentazione più o meno mature la cui caratteristica principale è di essere apigmentate come le forme di sporulazione degli *Haemoproteidae*.

Questa osservazione ha indotto alcuni AA. a sostenere che gli sporozoi dei *Plasmodiidae* avessero un periodo di evoluzione nelle cellule dell'apparato reticolo endoteliale, prima di iniziare il normale ciclo schizogonico nei globuli rossi.

Io ho voluto verificare tale asserzione ricercando se le forme parassitarie descritte fossero reperibili anche quando l'infezione anzichè con sporozoi era trasmessa mediante inoculazione di sangue infetto. Ho perciò inoculato sangue di canarino infetto di *P. relictum* in due canarini previa-

(1) Nella seduta del 9 gennaio 1938.

mente riscontrati indenni, e li ho sacrificati non appena comparvero i primi parassiti nel sangue periferico. Negli organi interni dei canarini così infettati ho potuto constatare un reperto identico a quello descritto dagli AA. precedenti nei canarini infettati con sporozoiti.

In un recentissimo lavoro BRUMPT comunica risultati identici ai miei relativamente al *P. gallinaceum* e KIKUTH in una comunicazione personale afferma che ugualmente avviene per il *P. cathemerium*.

Resta pertanto dimostrato che le forme del ciclo schizogonico osservabili nelle cellule dei tessuti si rinvencono *indipendentemente da inoculazione di sporozoiti* perchè si rinvencono ugualmente quando anzichè sporozoiti si si inoculano forme del ciclo schizogonico che si compie negli eritrociti. Quindi l'ipotesi di una derivazione diretta dagli sporozoiti delle forme del ciclo schizogonico che si verifica nelle cellule dei tessuti presenta ad essere accettata *difficoltà identiche* a quelle presentate dall'ipotesi di una derivazione diretta dagli sporozoiti delle forme del ciclo schizogonico che si verifica nei globuli rossi.

Data l'esistenza di specie di Emosporidi che pur presentando tutti i caratteri dei Plasmodi hanno anche la facoltà di svilupparsi in alcune cellule dei tessuti, e di una specie (*P. elongatum*) capace di svilupparsi entro tutte le cellule ematiche ed ematopoietiche, appare probabile che negli *Haemosporidiidae* tali differenze di comportamento esprimano *il diverso grado di adattamento raggiunto nelle relazioni tra ciascuna specie e il rispettivo ospite*.

Diviene quindi artificiale la distinzione tra *Plasmodiidae* e *Haemoproteidae*, che è basata esclusivamente sul tipo della cellula ospite delle forme del ciclo schizogonico, ossia non su caratteri morfologici dei parassiti, ma sui fenomeni biologici relativi ai rapporti intercorrenti tra parassita e ospite.

Pertanto analogamente a quanto si è fatto a proposito dei due generi *Trypanosoma* e *Schizotrypanum*, la cui differenziazione era ugualmente basata sulla sede del ciclo schizogonico, si propone di fondere le due famiglie *Plasmodiidae* e *Haemoproteidae* in una sola che per la legge sulla nomenclatura assume il nome di *Plasmodiidae* MESNIL, 1903.

Parassitologia. — *Sullo sviluppo dei parassiti malarici* ⁽¹⁾.
Nota di A. MISSIROLI, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

In un lavoro precedente comunicavo che inoculando sporozoiti di *P. praecox (relictum)* sotto la cute o nel tessuto muscolare di canarini, dopo 10 minuti non si riscontravano sporozoiti nel punto dove erano stati inoculati e che entro i primi 5 minuti si ritrovavano alcuni sporozoiti col nucleo rigonfiato in cui apparivano 4-5 granuli di cromatina nettamente separati.

In quella prima comunicazione arrivavo alla conclusione che gli sporozoiti dei plasmodi dovevano considerarsi come sporocisti immature che si aprivano solo nel corpo dell'ospite vertebrato liberando i veri sporozoiti.

Studiando poi le varie fasi di sviluppo mediante la reazione di Feulgen potei mettere in evidenza che questa reazione era specifica delle fasi di sviluppo in cui si osserva un'attiva scissione della cromatina. Perciò, siccome la cromatina nucleare degli sporozoiti si colorava intensamente in rosso col metodo di Feulgen dovevano essere considerati come una fase di moltiplicazione nel parassita.

Contemporaneamente un mio collaboratore, il Ferreira, studiava la struttura nucleare degli sporozoiti di *P. praecox (relictum)* nelle ghiandole salivari di *Culex* infettati in vario periodo di tempo e metteva in evidenza le varie fasi evolutive del nucleo.

In un secondo lavoro io stabilivo che i parassiti malarici inoculati sotto la cute raggiungevano gli organi interni per la via dei linfatici, avendo osservato che occorreano 5 minuti perchè gli sporozoiti inoculati alla punta dell'ala potessero percorrere la lunghezza dell'ala stessa. Riportavo inoltre alcune microfotografie, fra cui una che rappresenta uno sporozoito dopo 2 minuti di permanenza sotto la cute di un canarino, che ha l'aspetto evidente di uno sporozoito in istato di attiva evoluzione. La cromatina è divisa in 7 granuli, di struttura cilindrica o poliedrica, che sembrano lanciati verso la periferia.

Le ricerche continuate assiduamente per 3 anni non mi condussero mai a scoprire le fasi ulteriori di sviluppo che l'esame di quel preparato lasciava indubbiamente prevedere.

Dopo aver sperimentato ricorrendo a tutti gli artifici sono ricorso alla inoculazione degli sporozoiti nell'ala di un canarino che veniva subito dopo tagliata e messa in camera umida a 37°.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Malariologia dell'Istituto di Sanità pubblica.

(2) Nella seduta del 9 gennaio 1938.

Esaminando quell'ala dopo 3 ore nel punto d'innesto schiacciando il tessuto cellulare sottocutaneo sul vetrino portaoggetti, ho potuto riscontrare corpi rotondeggianti contenenti da 4 a 8 granuli di cromatina che presentavano gli stessi caratteri della cromatina nucleare degli sporozoiti dopo 2 minuti di permanenza sotto la cute.

In altri due preparati fatti con materiale della stessa ala ma proveniente da un punto lontano da quello di innesto, non si riscontrarono le forme suddette.

Considerando che negli sporozoiti inoculati sotto la cute avvengono modificazioni della struttura nucleare già dopo 2 minuti e che dopo 3 ore si riscontrano forme rotondeggianti in istato di avanzato sviluppo, si deve dedurre che lo sviluppo dei *così detti sporozoiti* inoculati sotto la cute dell'ospite vertebrato può avvenire in un tempo assai breve, che varia da 2-3 ore ad un tempo assai superiore a seconda del grado di maturazione degli sporozoiti inoculati.

Studiando la struttura nucleare degli sporozoiti contenuti nelle ghiandole salivari si osserva che la cromatina nucleare ha dapprima la forma di un piccolo anello che poi si apre alle due estremità dando luogo a due bastoncini, che a lor volta si dividono a metà formando 4 elementi lineari più piccoli. Di questi, alle volte, due tornano a suddividersi, e si osservano così sporozoiti con 6 granuli; quando si suddividono tutti e quattro si arriva ad un massimo di 8 granuli.

Gli sporozoiti inoculati quando la suddivisione della cromatina nucleare è completa, si evolvono rapidamente nell'ospite vertebrato mentre l'evoluzione procede assai più lentamente quando si inoculano sporozoiti immaturi. Difatti io potei trovare nel punto d'innesto sporozoiti con cromatina disposta in forma anulare anche dopo 3 ore dall'inoculazione sotto la cute dei canarini.

Esponendo i risultati delle mie indagini ho parlato sempre di sporozoiti al fine di evitare confusione, ma ritengo che quelli che fino ad ora furono considerati come sporozoiti dei plasmodi debbano essere considerati come sporocisti che completano il loro sviluppo nell'ospite vertebrato liberando da 4 a 8 veri sporozoiti che iniziano il ciclo monogonico nelle cellule della serie rossa, nelle cellule endoteliali, e in altre cellule non bene identificate dei tessuti.

Botanica. — *Cariologia dei generi « Aposeris » e « Hyoseris » (Compositae-Cichorieae).* Nota di G. NEGODI, presentata dal Socio E. CARANO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Sulle variazioni delle costanti chimico-fisiche dell'acqua dopo che vi è stato immerso il torlo dell'uovo di gallina.* Nota II di A. ORRÙ, presentata dal Corrisp. S. VISCO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente sen. MILLOSEVICH annuncia la morte del Socio Nazionale VITTORIO ADUCCO e manda a nome dell'Accademia un reverente saluto alla memoria dello Scomparso, sicuro che, in una delle prossime sedute, qualcuno dei Soci competenti vorrà parlare dell'opera dell'insigne Studioso.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

L'Accademico Segretario PARRAVANO presenta i libri giunti in dono all'Accademia, segnalando in particolar modo la seconda edizione del volume secondo del « Trattato di fisica generale » del prof. Perucca.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note e Memorie per l'inserzione negli Atti Accademici i Soci LEVI-CIVITA, SCARPA, SCORZA e VISCO.

RELAZIONI SU TEMI DATI

Si inizia la discussione della relazione presentata dal Socio RASETTI sulla « Radiazione cosmica ».

Il Presidente dà la parola al Socio RASETTI, il quale riassume la sua relazione mettendo in rilievo il grande sviluppo assunto negli ultimi anni dalle ricerche in questo campo, iniziate, già prima della guerra, dall'italiano Domenico Pacini. Si trattiene quindi ad esporre i dati rivelati dalle più recenti esperienze, in cui ancora primeggiano vari italiani, e a indicare le spiegazioni più plausibili dei complessi fenomeni della radiazione cosmica, in base alle attuali conoscenze sulla struttura della materia.

Alla relazione del prof. RASETTI tiene dietro un'elevata discussione, alla quale prendono parte i Soci FERMI e ARMELLINI, il prof. Bruno Rossi della R. Università di Padova e il prof. Gilberto Bernardini dell'Università libera di Camerino, invitati dalla Presidenza a prendere parte alla seduta.

Il Presidente sen. MILLOSEVICH, esaurita la discussione, ringrazia vivamente il Socio RASETTI per la sua brillante esposizione e gli altri Soci e studiosi che hanno portato il contributo della loro specifica competenza a un problema scientifico così importante.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 9 gennaio 1938.

- BARBIERI LODOVICO. — Mostra di cimeli, documenti, ricordi di Luigi Galvani, tenuta nell'Archiginnasio di Bologna dal 18 al 28 ottobre 1937. Catalogo. Bologna, 1937. 8°, pp. 1-33.
- BOREL M. — Benjamin Baillaud (1848-1934). Discours prononcé à l'Académie de Sciences par M. Borel, Président (séance du 9 juillet 1934). Toulouse, 1937. 8°, pp. 1-175.
- FACCIOLA LUIGI. — I cocchi capsulati esistenti nel sangue dei malarici. Messina, 1936. 8°, pp. 1-12.
- FANTOLI GAUDENZIO. — L'inaugurazione dell'anno Accademico 1937-38 nel R. Politecnico. Relazione. Milano, 1937. 8°, pp. 1-21.
- MINEUR HENRI. — Technique de la méthode des moindres carrés. Fasc. II. Paris, 1938. 8°, pp. I-VIII, 1-92.
- NASINI RAFFAELLO. — Luigi Galvani idrologo. Suoi studi sui principii aeriformi delle Terme Porrettane. (Estr. da « Folia Therapeutica ». Anno VII, 1930). Livorno, 1938. 8°, pp. 1-8.
- PERUCCA ELIGIO. — Fisica generale e sperimentale. Vol. II. Ottica, elettricità e magnetismo. Torino, Unione Tipografica Editrice Torinese, 1937. 8°, pp. I-XVI, 1-955.
- SACCO FEDERICO. — Schema geologico dell'Etiopia. (Estr. della Rivista «Materie prime d'Italia e dell'Impero ». Anno II, pp. 523 542). Roma, 1937. 8°.
- SCORDIA CONCETTINA. — Per la biologia del tonno. (Thunnus thynnus [L]). (Memorie di Biologia Marina e di Oceanografia. Vol. V, nn. 4, 5). Messina, 1937. 8°, pp. 1-6, 1-4.
- TOURDES JOSEPH. — Ricordi di Alessandro Volta. Pescara, 1937. 4°, pp. 1-22.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 6 febbraio 1938 - Anno XVI

Presidenza del prof. F. MILLOSEVICH

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sulle varietà anolonome.* — I. *Alcuni teoremi generali.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. E. BOMPIANI.

1. Primo oggetto di questa Nota è di porre in evidenza un teorema di carattere topologico sulle varietà anolonome V_n^m ($m < n$), definite cioè da un sistema di Pfaff

$$\lambda_i^b dx^i = 0 \quad i = 1, \dots, n; \quad b = m + 1, \dots, n$$

e riguardante gli elementi del 2° ordine E_2 delle sue curve integrali: questi si distribuiscono sopra una calotta di 2° ordine di V_m olonoma, che dirò *calotta osculatrice*. Teorema tanto più notevole in quanto permette da una parte di trasportare — senz'alcun calcolo — alle V_n^m anolonome le proprietà di curvatura delle ordinarie V_m (quando nell'ambiente sia data una metrica); d'altra parte perchè è caratteristico dell'intorno del 2° ordine e non si lascia estendere ad intorni d'ordine superiore.

Costruita la calotta osculatrice in un punto O di V_n^m non è esaurito il suo studio: le differenze col caso olonomo si manifestano quando ai punti della calotta si associno, come si deve, gli elementi (faccette) S_m della V_n^m (che non sono quelli tangenti alla calotta osculatrice); l'insieme dei punti della calotta osculatrice e delle sue faccette si dirà *calotta anolonomo*. Costruirla vuol dire dare in termini finiti (e in rapporto al gruppo assegnato,

(1) Presentata nella seduta del 6 febbraio 1938.

per esempio, metrico o proiettivo) una legge di associazione fra punti e faccette che riproduca nell'infinitesimo la distribuzione data dalla V_n^m .

Con ciò *non* si è ancora finito di studiare l'intorno (sia pure del 2° ordine) di O su V_n^m : infatti i punti di questa invadono tutta la cella ad n dimensioni intorno di O (e non soltanto quelli situati sulla faccetta tangente in O) e anche per essi bisogna dare la distribuzione delle faccette; questo insieme di punti e faccette si dirà *cella anolonomica*. E anche in questo caso costruire la cella vuol dire assegnare *in termini finiti* una legge di associazione che nell'infinitesimo riproduca quella determinata da V_n^m .

Prima di procedere credo opportuno esaminare alla luce delle cose dette alcuni dei risultati noti. Non ho trovato il teorema topologico, nella sua generalità, in alcuno dei lavori sull'argomento (dei quali alcuni risultati sarebbero poi apparsi evidenti). Esso si trova, enunciato in forma proiettiva, per le V_3^2 di S_3 , in un lavoro di E. Bortolotti⁽¹⁾ e in forma metrica (riemanniana) in una Nota della sig.ra Chr. Pauc⁽²⁾.

La costruzione di una calotta anolonomica, sia nel campo proiettivo che metrico si trova, sempre per le V_3^2 , già in Voss⁽³⁾ e in lavori molto più recenti di Sintzow⁽⁴⁾ e di Inzinger⁽⁵⁾ e consiste in sostanza in una proiettività nel fascio di tangenti in O (*proiettività di calotta*).

Non trovo invece mai studiata la cella anolonomica: la quale, per una V_n^{n-1} di S_n proiettivo, dà luogo ad una *proiettività (di cella)* fra la stella di rette uscenti da O e gli S_{n-2} dello S_{n-1} tangente.

Questi elementi si riferiscono all'intorno del 2° ordine di O . Elementi invarianti d'ordine più elevato ha trovato il Maxia⁽⁶⁾ il quale, per le V_3^2 di S_3 proiettivo, ha definito rette analoghe a quelle di Darboux, di Green e di Wilczynski, e il Bortolotti⁽⁷⁾ (asse di Čech) che ha anche iniziato la teoria delle V_n^2 in S_n proiettivo.

Ma esistono molti altri elementi invarianti, per esempio, del 3° ordine, caratteristici dell'anolonomia della V_3^2 : per esempio, un piano invariante

(1) E. BORTOLOTTI, *Geometria proiettiva differenziale delle superficie anolomome*. Comunicazione al I Congresso dell'U. M. I. (Firenze 1937); di essa, non ancora pubblicata, l'A. mi ha favorito il manoscritto dopo che avevo compiuta la recente ricerca.

(2) M.me CHR. PAUC, *Extension aux variétés non holonomes V_n^{n-1} de quelques propriétés des surfaces et des V_3^2* . In questo fascicolo di questi « Rendiconti ».

(3) A. VOSS, *Zur Theorie der allgemeinen Punktebenensysteme*. « Math. Ann. », Bd. 23, pp. 45-81, 1884.

(4) D. SINTZOW, *Zur Krümmungstheorie der Integralkurven der Pfaffschen Gleichung*. « Math. Ann. », Bd. 101, pp. 261-272, 1929.

(5) R. INZINGER, *Zur Differentialgeometrie Pfaffscher Mannigfaltigkeiten*. « Monatsh. für Math. u. Phys. », Bd. 45, pp. 214-236, 1937.

(6) A. MAXIA, *Sulla geometria proiettiva differenziale di una X_3^2 in S_3* . « Rend. Lincei », vol. XXI, pp. 248-253, 1935.

(7) Loc. cit., ove son date anche le forme elementari ed esaminate le possibilità di estensione delle quadriche di Montard, Darboux, Lie.

per O (tale che per i suoi elementi lineari di centro O è costante l'invariante assoluto della proiettività di calotta) e quattro rette invarianti (per O e non nel piano tangente).

Il problema fondamentale qui è la determinazione e la scelta di un sistema minimo di elementi geometrici che permetta la costruzione di un riferimento invariante (tetraedro e punto unità): dopo ciò tutto ha significato invariante. Tale determinazione, qui fatta nella Nota II, dipende da tutto l'intorno del 3° ordine e parzialmente da quello del 4°.

2. CALOTTA OSCULATRICE (DEL 2° ORDINE) DI V_n^m .

Assumiamo il sistema pfaffiano risoluto rispetto ad $n - m$ delle variabili nella forma (1)

$$(2.1) \quad d\zeta^h = \mu_i^h dx^i \quad i = 1, \dots, m; h = m+1, \dots, n; \mu = \mu(x, \zeta).$$

Ciò può sempre farsi se si escludono punti singolari (e così in seguito tralascieremo sistematicamente lo studio di circostanze eccezionali). Sulle curve integrali del sistema (2.1) si ha

$$(2.2) \quad \begin{cases} d^2 \zeta^h = \mu_i^h d^2 x^i + \left(\frac{\partial \mu_i^h}{\partial x^l} + \frac{\partial \mu_i^h}{\partial \zeta^k} \mu_l^k \right) dx^i dx^l \\ = \mu_i^h d^2 x^i + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mu_i^h}{\partial x^l} + \frac{\partial \mu_l^h}{\partial x^i} + \frac{\partial \mu_i^h}{\partial \zeta^k} \mu_l^k + \frac{\partial \mu_l^h}{\partial \zeta^k} \mu_i^k \right) dx^i dx^l. \end{cases}$$

Per le curve di una V_m (olonomica) di equazioni

$$\zeta^h = f^h(x^1, \dots, x^m)$$

si ha

$$(2.3) \quad d\zeta^h = \frac{\partial f^h}{\partial x^i} dx^i$$

$$(2.4) \quad d^2 \zeta^h = \frac{\partial^2 f^h}{\partial x^i} d^2 x^i + \frac{\partial^2 f^h}{\partial x^i \partial x^l} dx^i dx^l$$

e in un punto (x, ζ) comune a V_n^m e a V_m si possono far coincidere gli sviluppi (2.3) e (2.4) rispettivamente con quelli (2.1) e (2.2) pur di prendere

$$(2.5) \quad \frac{\partial f^h}{\partial x^i} = \mu_i^h; \quad \frac{\partial^2 f^h}{\partial x^i \partial x^l} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mu_i^h}{\partial x^l} + \frac{\partial \mu_l^h}{\partial x^i} + \frac{\partial \mu_i^h}{\partial \zeta^k} \mu_l^k + \frac{\partial \mu_l^h}{\partial \zeta^k} \mu_i^k \right).$$

Queste posizioni determinano la calotta osculatrice (olonomica) contenente nel punto fissato gli E_2 delle curve integrali di (2.1). Cioè:

(1) S'intendono soppressi, come d'uso, i segni di somma rispetto agli indici ripetuti in basso e in alto.

Gli E_2 delle curve integrali uscenti da un punto di una V_n^m appartengono ad una calotta (olonomica) del 2° ordine; cioè esistono infinite V_m (olonomiche) che contengono quegli E_2 (e queste V_m hanno un contatto del 2° ordine fra loro nel punto).

In forma forse più suggestiva può dirsi così:

Dal punto di vista delle sole curve integrali e fino all'intorno del 2° ordine di un punto, una V_n^m anolonomica non si distingue da una V_m olonomica.

Nel caso di una V_3^2 questo teorema può ricavarsi da uno di Lie⁽¹⁾ secondo il quale un'equazione di Pfaff in 3 variabili è sempre riducibile (quando non sia integrabile, cioè riducibile alla forma $d\zeta = 0$) alla forma $d\zeta = ydx$ o anche alla forma $d\zeta = ydx - xdy$ mediante sole trasformazioni puntuali (in altri termini: una V_3^2 anolonomica è, in regioni convenienti, topologicamente equivalente ad un « piano » anolonomo cioè al sistema nullo rappresentato dall'ultima equazione in coordinate cartesiane non omogenee). È un fatto elementare che gli E_2 di curve appartenenti al complesso lineare uscenti da un punto stanno nel piano polare del punto: il suo intorno del 2° ordine sul piano si trasforma nella calotta del 2° ordine osculatrice in un punto di V_3^2 .

L'anolonomia si manifesta invece, anche per quanto riguarda le sole curve integrali, già nell'intorno del 3° ordine su di esse.

3. CALOTTA ANOLONOMA DEL 2° ORDINE DI V_n^{n-1} IN S_n PROIETTIVO.

Non è possibile fare in blocco una teoria proiettiva delle V_n^m a causa delle profonde differenze che già per le V_m olonomiche si manifestano in relazione alle dimensioni degli spazi che contengono gli intorni dei vari ordini di un punto generico della varietà (spazi osculatori)⁽²⁾. Mi limito quindi allo studio di una V_n^{n-1} , avvertendo subito che le nozioni date in questo numero, almeno per $n = 3$, sono note⁽³⁾.

Se si scrive l'equazione di Pfaff, in coordinate proiettive non omogenee,

$$(3.1) \quad d\zeta = \mu_i (x^1, \dots, x^{n-1}, \zeta) dx^i$$

supponiamo, come si può, che in un punto O ($x^i = \zeta = 0$) siano le $\mu_i = 0$.

La (3.1) associa al punto $P(\bar{x}^i, \bar{\zeta})$ lo S_{n-1} di equazione

$$(3.2) \quad Z - \bar{\zeta} = \mu_i (\bar{x}, \bar{\zeta}) (X^i - \bar{x}^i)$$

(1) S. LIE-G. SCHEFFERS, *Geometrie der Berührungstransformationen*. Teubner, Leipzig, p. 203, 1896.

(2) Ciò risulta già in modo esplicito per le superficie anolonomiche, com'era da attendersi, dal lavoro citato del Bortolotti; del quale, per le V_4^2 di S_4 , può vedersi anche l'altro lavoro: *Superficie anolonomiche complementari*. « Scritti matematici offerti a L. Berzolari », Pavia, pp. 553-576, 1936.

(3) Già dal lavoro citato del Voss.

(quindi ad $O, Z = 0$); la sua traccia su $Z = 0$, quando P si approssimi ad O sopra una curva integrale (o ad essa tangente in O) di (3.1), è, in $Z = 0$, lo S_{n-2} di equazione $\alpha_i X^i = 0$ ove

$$(3.3) \quad \alpha_i = \frac{\partial \mu_i}{\partial x^l} dx^l$$

ove dx^l (e $d\chi = 0$) individuano la tangente in O alla curva integrale su cui P raggiunge O .

Si ha dunque una proiettività (di calotta) fra le rette uscenti da O ivi tangenti a V_n^{n-1} e gli S_{n-2} pure tangenti in O . Le (3.3), posto

$$(3.4) \quad \frac{\partial \mu_i}{\partial x^l} + \frac{\partial \mu_l}{\partial x^i} = 2 s_{il} = 2 s_{li} \quad , \quad \frac{\partial \mu_i}{\partial x^l} - \frac{\partial \mu_l}{\partial x^i} = 2 w_{il} = -2 w_{li}$$

si possono sostituire con le seguenti

$$(3.5) \quad \alpha_i = s_{il} dx^l + w_{il} dx^l.$$

Per le rette appartenenti agli S_{n-2} corrispondenti nella proiettività si ha

$$(3.6) \quad \alpha_i dx^i \equiv s_{il} dx^i dx^l + w_{il} dx^i dx^l \equiv s_{il} dx^i dx^l = 0$$

e questo, avuto riguardo alle (2.5), è il cono delle tangenti asintotiche della calotta osculatrice. Sicchè:

La proiettività (di calotta) determinata in un punto O di V_n^{n-1} fra le rette tangenti in O e gli S_{n-2} pure tangenti in O ha come rette appartenenti agli S_{n-2} corrispondenti le tangenti asintotiche di una V_{n-1} osculatrice.

Questa proiettività (reciprocità) definisce (in aggiunta alla calotta osculatrice) la calotta anolonomica: l'anolonomia si manifesta nel non essere tutte le w_{il} nulle, cioè nel non essere quella reciprocità la polarità rispetto al cono asintotico.

Torneremo su questo più in dettaglio per le V_3^2 .

4. CELLA ANOLONOMA DI V_n^{n-1} IN S_n PROIETTIVO.

Bisogna ora, per completare la conoscenza dell'intorno del 2° ordine di O su V_n^{n-1} , dare la distribuzione degli S_{n-1} nei punti prossimi ad O ma in direzioni non necessariamente tangenti. Basta ripetere il procedimento del numero precedente, cioè individuare lo S_{n-1} relativo a P mediante P e la sua traccia su $Z = 0$; quando $P \rightarrow O$ sopra una curva avente in O tangente definita da δx^i e $\delta \chi$, quella traccia tende allo S_{n-2} , in $Z = 0$, di equazione $\beta_i X^i + \gamma = 0$ ove

$$(4.1) \quad \beta_i = \frac{\partial \mu_i}{\partial x^l} \delta x^l + \frac{\partial \mu_i}{\partial \chi} \delta \chi \quad , \quad \gamma = \delta \chi$$

e per $\delta\chi = 0$ si riottengono, naturalmente, le (3.3). Le (4.1) rappresentano una proiettività (di cella) fra le rette uscenti da O e gli S_{n-2} situati nello S_{n-1} ivi tangente.

Si determina quindi una cella anolonomica, intorno del 2° ordine di un punto O di V_n^{n-1} , aggiungendo alla calotta osculatrice una proiettività fra le rette uscenti da O e gli S_{n-2} situati nello S_{n-1} tangente in O che abbia come rette appartenenti agli S_{n-2} corrispondenti quelle del cono asintotico, in O , della calotta osculatrice.

In sostanza con questa proiettività si vengono a determinare, rispetto ad un riferimento dato, le $\frac{\partial \mu_i}{\partial x^i}$ e le $\frac{\partial \mu_i}{\partial \chi}$ (cioè appunto l'intorno del 2° ordine di O). Si noti però che già la proiettività di calotta introduce invarianti proiettivi del 2° ordine (dipendenti dall'anolonomia). Nel caso delle V_3^2 di S_3 , si può specificare la costruzione della cella così:

Si parta da tre elementi del 2° ordine E_2 di curve integrali della pfaffiana per O e si costruisca, con teoremi noti⁽¹⁾, la calotta del 2° ordine da essi determinata e di questa si costruiscano le tangenti asintotiche: una proiettività nel fascio tangente che abbia queste per rette doppie, e che è quindi determinata dal suo invariante assoluto, determina la calotta anolonomica; infine una proiettività fra la stella di rette in O e il piano tangente rigato che subordini la proiettività precedente determina la cella.

5. CONSEGUENZE PARTICOLARI PER LE V_n^{n-1} IN S_n EUCLIDEO.

I teoremi precedenti, di carattere topologico e proiettivo, danno luogo a conseguenze particolari, in gran parte note, quando l'ambiente S_n sia euclideo: o anche più in generale quando sia data una metrica riemanniana se ci si riferisce unicamente ad elementi per un punto O . Mi riferirò di regola al caso euclideo.

Dalla sola esistenza della calotta osculatrice risulta senz'altro — e ogni calcolo sarebbe superfluo — che sono invarianti (metrici) di 2° ordine della V_n^{n-1} in O : le tangenti di curvatura in O della calotta, spigoli dell'($n-1$)-spigolo ortogonale coniugato rispetto al cono asintotico; i raggi principali di curvatura e perciò anche le loro funzioni simmetriche (in particolare la curvatura media e la curvatura totale); l'elemento d'estensione (area, volume...) della calotta in O ; la seconda forma fondamentale, che dà il quadrato (dell'infinitesimo principale) della distanza dallo S_{n-1} tangente in O di un punto che tenda ad O ; e che valgono necessariamente i teoremi di Meusnier e di Eulero e le loro estensioni alle V_{n-1} .

(1) E. BOMPIANI, *Costruzione di elementi superficiali a partire da elementi curvilinei*. Questi « Rendiconti », vol. XXV, pp. 149-154, 1937.

Entra in gioco l'anolonomia quando si passa dalla calotta osculatrice alla calotta anolonomia, cioè quando si aggiunge la proiettività di calotta: ciò accade, per esempio, quando della calotta anolonomia si fa l'immagine sferica per mezzo di normali (agli S_{n-1} tangenti di V_n^{n-1} che, fuori di O, non sono quelli tangenti alla calotta osculatrice); il limite del rapporto fra l'estensione dell'immagine sferica e quella corrispondente sulla calotta osculatrice è naturalmente un *invariante metrico d'anolonomia*: sicchè in ogni punto O di V_n^{n-1} c'è una curvatura totale d'olonomia (quella della calotta osculatrice) ed una d'anolonomia (ora definita).

Ancora: si possono richiedere nella proiettività di calotta le rette ortogonali agli S_{n-2} corrispondenti. Se si assumono come assi (ortogonali) in O le tangenti di curvatura della calotta osculatrice, e s'indicano con R_i i suoi raggi principali di curvatura, sicchè $s_{ii} = 0$ per $i \neq l$ e $s_{ii} = 1/R_i$, le equazioni della proiettività di calotta sono

$$\alpha_i = \frac{1}{R_i} dx^i + w_{ii} dx^l \quad (\text{non si sommi risp. ad } i)$$

e per le rette cercate deve aversi

$$\alpha_i = \rho dx^i \quad \text{cioè} \quad \left(\frac{1}{R_i} - \rho \right) dx^i + w_{ii} dx^l = 0$$

sicchè si hanno $n-1$ tangenti con la proprietà voluta, dette *tangenti di curvatura di 2ª specie* ⁽¹⁾.

Gli $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ angoli che queste $n-1$ rette formano fra loro a due a due determinano completamente le funzioni w_{ii} ; sicchè essi possono prendersi come indici d'anolonomia.

Passiamo alla proiettività di cella, di equazioni

$$\beta_i = \frac{1}{R_i} \delta x^i + w_{ii} \delta x^l + \frac{\partial \mu_i}{\partial \chi} \delta \chi, \quad \gamma = \delta \chi.$$

Affinchè la proiezione ortogonale della retta $(\delta x^i, \delta \chi)$ su $Z = 0$ risulti ortogonale allo S_{n-2} corrispondente nella proiettività occorre che sia

$$\left(\frac{1}{R_i} - \sigma \right) \delta x^i + w_{ii} \delta x^l + \frac{\partial \mu_i}{\partial \chi} \delta \chi = 0.$$

Per $\delta \chi = 0$ si hanno le tangenti di curvatura di 2ª specie; ma ora il luogo delle ∞^1 rette soddisfacenti alla condizione posta è un cono di vertice O

(1) Si trovano già in Voss (loc. cit.) e poi in Sintzow e in Inzinger, e per una metrica riemanniana nella Nota della sig.ra Pauc.

d'ordine $n - 1$, di cui le precedenti sono le equazioni parametriche (in σ); una sua generatrice è la normale in O (per $\sigma = \infty$).

Se si elimina σ fra due qualsiasi delle equazioni precedenti si ottiene una delle equazioni del cono (e così le altre): e ne risulta che il piano tangente al cono trovato lungo la normale, o la sua traccia su $Z = 0$, è definito da

$$\frac{\delta x^i}{\frac{\partial \mu_i}{\partial \lambda}} = \frac{\delta x^k}{\frac{\partial \mu_k}{\partial \lambda}} \quad i, k = 1, \dots, n-1$$

sicchè la conoscenza di questa retta (*traccia principale*) determina, a meno di un fattore comune, le $\frac{\partial \mu_i}{\partial \lambda}$.

Anche questo fattore può precisarsi geometricamente. Alla normale in O corrisponde nella proiettività di cella lo S_{n-2} (in $Z = 0$) di equazione $\frac{\partial \mu_i}{\partial \lambda} X^i = -1$ la cui distanza δ da O è l'inversa di $\sqrt{\Sigma \left(\frac{\partial \mu_i}{\partial \lambda} \right)^2}$; sicchè i coseni direttori della traccia principale (in $Z = 0$) sono

$$\cos \varphi_i = \delta \frac{\partial \mu_i}{\partial \lambda}.$$

La cella anolonomica (del 2° ordine) di centro O determina un cono V_2^{n-1} di vertice O che ha per generatrici la normale in O e, sullo S_{n-1} ivi tangente, le tangenti di curvatura di 2ª specie. Queste e lo S_{n-2} corrispondente nella proiettività di cella alla normale determinano completamente la cella.

Nel caso di una V_3^2 di S_3 euclideo possiamo scendere a maggiori dettagli. Scritta la pfaffiana $d\lambda = p dx + q dy$ e fatto in $O(0, 0, 0)$ $p = q = 0$, $p_x = \frac{1}{R_1}$, $p_y = \frac{1}{R_2}$, $2s = p_y + q_x = 0$, $2w = p_y - q_x$ si ha per l'angolo φ delle tangenti di curvatura di 2ª specie

$$\cos \varphi = \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2} 2w$$

che quindi si può prendere come indice d'anolonomia. Il cono quadrico dell'ultimo enunciato ha l'equazione

$$w(\delta x^2 + \delta y^2) + (p_x - q_y) \delta x \delta y + (p_z \delta x - q_z \delta y) \delta z = 0;$$

i due piani per le tangenti di curvatura (di 1ª specie) e per la normale lo tagliano, al di fuori di questa retta, in due rette completamente definite dai loro angoli ψ_1, ψ_2 con la normale stessa

$$(\delta y = 0), \quad \operatorname{tg} \psi_1 = \frac{\delta x}{\delta z} = -\frac{p_z}{w}; \quad \operatorname{tg} \psi_2 = \frac{\delta y}{\delta z} = \frac{p_z}{w}, \quad (\delta x = 0);$$

sicchè dal punto di vista metrico la cella è completamente definita dai raggi principali di curvatura e dagli angoli φ, ψ_1, ψ_2 .

Infine per il quadrato dell'elemento lineare $e dx^2 + 2 f dx dy + g dy^2$ della rappresentazione sferica si trova $\sqrt{eg - f^2} = \frac{1}{R_1 R_2} + w^2$, da cui relazione nota ⁽¹⁾ fra curvatura totale olonoma e anolonoma.

Matematica. — *Sulle varietà anolonome.* — II. Le V_3^2 di S_3 proiettivo. Nota ⁽²⁾ del Corrisp. E. BOMPIANI.

6. PIANO INVARIANTE IN UN PUNTO DI UNA V_3^2 IN S_3 PROIETTIVO.

Esaurito ⁽³⁾ lo studio proiettivo, dell'intorno del 2° ordine di un punto O di V_n^{n-1} occupiamoci ora, per le V_3^2 di S_3 , degli intorno d'ordine > 2 fino a determinare un riferimento invariante (tetraedro e punto unità) legato ad O.

Ricordiamo che in ogni punto della V_3^2 rappresentata da

$$(6.1) \quad dz = p(x, y, z) dx + q(x, y, z) dy$$

è definita una proiettività di calotta (nel fascio tangente) e una proiettività di cella (fra la stella di rette per O e il piano tangente rigato). Elementi banali del riferimento proiettivo in O (origine) sono il piano ivi tangente ($z = 0$), in esso le tangenti asintotiche supposte distinte ($x = 0$, o $y = 0$) e una coppia di rette corrispondenti nella proiettività di cella come asse z ($x = y = 0$) e come retta « all'infinito » del piano tangente ($z = t = 0$; con t indicheremo quando occorrerà la 4ª coordinata per l'omogeneità). Con questa scelta (parziale) del riferimento si ha in O:

$$(6.2) \quad p = q = 0 \quad , \quad p_x = q_y = 0 \quad , \quad p_z = q_z = 0$$

(gli indici denotano derivate parziali rispetto alla variabile indicata). Poniamo poi in generale (cioè anche fuori di O)

$$(6.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} r = p_x \quad , \quad t = q_y \quad , \quad 2s = p_y + q_x \quad , \quad 2w = p_y - q_x \\ \text{quindi} \\ p_y = s + w \quad , \quad q_x = s - w. \end{array} \right.$$

(1) Sintzow, Inzinger, Pauc.

(2) Presentata nella seduta del 6 febbraio 1938.

(3) Nella Nota precedente: *Sulle varietà anolonome.* — I. Alcuni teoremi generali, questo fascicolo di questi « Rendiconti ».

La proiettività di calotta fa corrispondere nel punto (x, y, z) alla direzione $y' = dy : dx$ (e dz definito da (6.1)) la direzione \bar{y}' per cui

$$(6.4) \quad \alpha + \beta y' + \gamma \bar{y}' + \delta y \bar{y}' = 0$$

essendo

$$(6.5) \quad \alpha = r + p p_z, \quad \beta = s + w + q p_z, \quad \gamma = s - w + p q_z, \quad \delta = t + q q_z.$$

L'invariante assoluto di questa proiettività vale

$$(6.6) \quad = \frac{w + \frac{1}{2}(q p_z - p q_z) - \Delta}{w + \frac{1}{2}(q p_z - p q_z) + \Delta}$$

ove $\Delta^2 = \left[s + \frac{1}{2}(q p_z + p q_z) \right]^2 - (r + p p_z)(t + q q_z)$; quindi in O l'invariante assoluto vale

$$(6.7) \quad I_0 = \frac{w - s}{w + s},$$

e caratterizza l'anolonomia.

Cerchiamo il luogo dei punti prossimi ad O per i quali l'invariante assoluto ha lo stesso valore che in O, cioè il piano tangente in O alla superficie definita da $I = I_0$. Per esso $\delta I = 0$, ossia $I_x \delta x + I_y \delta y + I_z \delta z = 0$ o infine, tenuto conto delle (6.2),

$$(6.8) \quad (p_{xy} q_x - q_{xx} p_y) \delta x + (p_{yy} q_x - q_{yx} p_y) \delta y + (p_{yz} q_x - q_{yx} p_y) \delta z = 0.$$

È questa l'equazione del piano invariante relativo al punto O.

Per $\delta z = 0$ si ha una tangente invariante (dipendente dall'intorno del 3° ordine di O) e questa insieme alle tangenti asintotiche definisce nel fascio tangente in O un riferimento proiettivo: sicchè ormai ogni tangente è caratterizzata da un birapporto. Già da questo fatto risulta la possibilità di stabilire un trasporto proiettivo assoluto (teletrasporto) di una tangente da un punto ad un altro (almeno quando sia possibile, per esempio, con ragioni di continuità, far corrispondere ad una tangente asintotica in un punto una tangente asintotica nell'altro); in particolare una connessione proiettiva fra fasci di tangenti in punti infinitamente vicini; così potrà esser degna di studio la congruenza invariante, involupata da quelle tangenti; il piano osculatore ad una sua curva in un punto fornisce un nuovo piano invariante (dipendente però dall'intorno del 4° ordine, cioè dalle derivate terze di p e q).

Ma il nostro scopo è ora di finire di determinare un riferimento invariante. Ricordiamo che mancano ancora: una determinazione dell'asse ζ (dopo di che è determinata, dalla proiettività di cella, la retta $\zeta = t = 0$), del « piano all'infinito » (passante per l'ultima retta) e del punto unità.

7. RETTE INVARIANTI, NON TANGENTI, IN UN PUNTO DI V_3^2 .

In un punto $O'(\delta x, \delta y, \delta \zeta)$ prossimo ad O consideriamo le tangenti asintotiche; e determiniamo i punti O' , cioè in termini finiti le rette OO' , tali che una almeno delle tangenti asintotiche in O' incontri una almeno delle tangenti in O . È presto visto che soddisfano all'una o all'altra delle condizioni poste le generatrici dei coni quadratici, di vertice O ,

$$(7.1) \quad (r_x \delta x + r_y \delta y + r_\zeta \delta \zeta) \delta \zeta + 2s(s+w) \delta y^2 = 0$$

$$(7.2) \quad (t_x \delta x + t_y \delta y + t_\zeta \delta \zeta) \delta \zeta + 2s(s-w) \delta x^2 = 0$$

ciascuno dei quali è tangente al piano $\zeta = 0$ lungo la tangente asintotica che è incontrata da una delle tangenti asintotiche nei punti O' ad esso cono appartenenti. Dunque:

L'intorno del 3° ordine di un punto di V_3^2 definisce due coni quadratici invarianti. Le loro quattro generatrici comuni e quella di contatto con $\zeta = 0$ danno luogo su ciascun cono a due invarianti, quindi in tutto a quattro invarianti del 3° ordine.

Se si prende una delle quattro generatrici comuni come asse ζ (e potremmo chiamarla *normale proiettiva*) si ha in O

$$(7.3) \quad r_\zeta = p_{x\zeta} = 0, \quad t_\zeta = q_{y\zeta} = 0$$

mentre i quattro invarianti sono determinati in funzione di s, w , a meno d'irrazionalità, da $r_x = p_{xx}$, $r_y = p_{xy}$, $t_x = q_{xy}$, $t_y = q_{yy}$ ⁽¹⁾.

8. CORRISPONDENZE CUBICHE INDIVIDUATE DALL'INTORNO DEL 3° ORDINE.

Per individuare geometricamente l'intorno del 3° ordine di O su V_3^2 rimane da dare l'equivalente delle altre derivate seconde di p, q finora non considerate. Può estendersi allo scopo il procedimento che ha condotto alla proiettività di cella.

Se ad ogni punto di una curva uscente da O si associano i piani per essi di V_3^2 questi riescono osculatori ad una nuova curva di cui il piano

(1) Si può fissare geometricamente il rapporto p_{xx}/q_{yy} anche servendosi di una delle terne di tangenti analoghe a quella di Darboux introdotte dal MAXIA (loc. cit.); per passare dalle sue notazioni alle attuali bisogna porre, $P = p$, $Q = q$, $R = -1$, e in O , $A_1 = 1$, $A_2 = A_3 = 0$, $B_2 = 1$, $B_1 = B_3 = 0$ e si ha quindi $\omega(AB) = q_x$, $\omega(BA) = p_y$, $\omega(AAA) = p_{xx}$, $\omega(BBB) = q_{yy}$.

tangente a V_3^2 in O è piano osculatore; di questo vogliamo procurarci il punto d'osculazione. Siano $x = x(\tau)$, $y = y(\tau)$, $z = z(\tau)$ le equazioni parametriche della curva; all'equazione del piano che la V_3^2 associa al punto (x, y, z)

$$(8.1) \quad pX + qY - Z = (px + qy - z) T$$

bisogna aggiungere le sue due prime equazioni derivate rispetto a τ . Se dopo ciò si fa $x = y = z = 0$ e si profitta delle posizioni già fatte in O , $p = q = p_x = q_y = p_z = q_z = p_{xz} = q_{yz} = 0$, $p_y + q_x = 2s$, $p_y - q_x = 2w$ si ottengono le equazioni $Z = 0$ e

$$(8.2) \quad \begin{cases} p_y y' X + q_x x' Y + z' T = 0 \\ (P + p_y y'') X + (Q + q_x x'') Y - (4s x' y' - z'') T = 0 \end{cases}$$

ove

$$(8.3) \quad \begin{cases} P = p_{xx} x'^2 + 2 p_{xy} x' y' + p_{yy} y'^2 + 2 p_{yz} y' z' + p_{zz} z'^2 \\ Q = q_{xx} x'^2 + 2 q_{xy} x' y' + q_{yy} y'^2 + 2 q_{xz} x' z' + q_{zz} z'^2 \end{cases}$$

e le (8.2) definiscono il punto del piano $X = 0$ corrispondente al piano osculatore all'elemento curvilineo del 2° ordine considerato.

Se questo è un elemento di flesso, sicchè può farsi

$$z' = 1, \quad x'' = y'' = z'' = 0,$$

alla retta $x = lz$, $y = mz$ (quindi $x' = l$, $y' = m$, $z' = 1$) corrisponde il punto di $Z = 0$ di coordinate omogenee

$$(8.4) \quad \begin{cases} X = -Q - 4q_x s l^2 m \\ Y = P + 4p_y s l m^2 \\ T = p_y Q m - q_x P l. \end{cases}$$

Queste equazioni rappresentano una corrispondenza (1,3) fra le rette della stella di centro O e i punti del piano tangente in O : le tre rette corrispondenti ad un punto stanno nel piano $p_y m X + q_x l Y + T = 0$ che la proiettività di cella associa al punto (X, Y, O, T) .

All'asse z ($l = m = 0$) corrisponde il punto $-q_{zz}, p_{zz}, 0, 0$.

Alle rette del piano $x = 0$ ($l = 0$), che è già geometricamente definito, corrispondono i punti della cubica

$$(8.5) \quad Y(q_{yy} T^2 + q_{zz} p_y^2 X^2) + X(p_{yy} T^2 - 2 p_{yz} p_y T X + p_{zz} p_y^2 X^2) = 0$$

e un'analoga cubica si ha in corrispondenza alle rette $m = 0$. Già le loro tangenti nell'origine forniscono invarianti del 3° ordine (e le loro ulteriori intersezioni con ciascuna cubica punti invarianti); così pure danno invarianti le intersezioni della prima cubica con $Y = 0$ (birapporto dei tre punti e

dell'altro vertice del triangolo fondamentale) e quelle della seconda con $X = 0$; ecc.

Altri invarianti si ottengono considerando invece quegli E_2 per O dei quali è indeterminato il punto corrispondente nel piano tangente in O ; per essi le equazioni (8.2) sono equivalenti; fatto $\tau = \zeta$, quindi $\zeta'' = 0$, si ha

$$(8.6) \quad \begin{cases} P + 4 p_y s x' y'^2 = - p_y y'' \\ Q + 4 q_x s x'^2 y' = - q_x x'' \end{cases}$$

Per l' E_2 siffatto tangente in O all'asse ζ (normale proiettiva) si ha

$$(8.7) \quad x'' = - \frac{q_{\zeta\zeta}}{q_x}, \quad y'' = - \frac{p_{\zeta\zeta}}{p_y}$$

quindi il suo piano osculatore, che è pure un piano invariante, ha per equazione

$$(8.8) \quad q_x p_{\zeta\zeta} X - p_y q_{\zeta\zeta} Y = 0.$$

Inoltre tale E_2 considerato insieme ad un E_2 di asintotica (per esempio quello tangente all'asse x) dà luogo a due rette principali⁽¹⁾ che dividono armonicamente le loro tangenti (assi ζ ed x); e così via.

Se alla retta $aX + bY + T = 0$ (in $Z = 0$) pensata come individuata dalle equivalenti equazioni (8.2), in forza delle (8.6), cioè tale che (posto $\zeta' = 1$) sia

$$(8.9) \quad a = p_y y', \quad b = q_x x',$$

si fa corrispondere il piano per O cui appartiene l' E_2 determinato dalle (8.6), di equazione $AX + BY + CZ = 0$, si ha

$$(8.10) \quad \begin{cases} A = - q_x (P + 4 p_y s x' y'^2) \\ B = + p_y (Q + 4 q_x s x'^2 y') \\ C = P b - Q a \end{cases}$$

(ove x', y' vanno sostituiti risp. con b/q_x e a/p_y). Le (8.10) sono le equazioni di una corrispondenza (1,3) fra le rette del piano tangente in O e i piani della stella per O .

Infine possiamo chiederci le rette del piano tangente di cui è indeterminato il piano corrispondente, cioè cui corrispondono E_2 di flesso, quindi $x'' = y'' = 0$. Risulta dalle (8.6) che le corrispondenti tangenti di flesso appartengono ai due coni cubici $P + 4 p_y s x' y'^2 = 0$, $Q + 4 q_x s x'^2 y' = 0$; e anche queste rette (e le loro corrispondenti nel piano tangente) sono invarianti.

(1) E. BOMPIANI, *Invarianti d'intersezione di due curve sghembe*. « Rend. R. Acc. dei Lincei », vol. XIV, pp. 456-461, 19312.

9. DETERMINAZIONE DEL RIFERIMENTO PROIETTIVO IN UN PUNTO.

Gli elementi finora fissati del riferimento sono: i tre spigoli del tetraedro per O (tangenti asintotiche e una delle rette normali proiettive) e nel piano tangente in O il rimanente spigolo del tetraedro o « retta all'infinito » (corrispondente nella proiettività di cella alla normale proiettiva scelta). Tutti questi elementi dipendono dall'intorno del 3° ordine (derivate seconde di p, q).

Rimangono da determinare la quarta faccia del tetraedro e il punto unità. Potremmo per alcuni di questi elementi (ma *non* per tutti) servirci di alcuni degli elementi invarianti trovati; ma procederemo diversamente.

Notiamo anzitutto che i cambiamenti di coordinate di cui si dispone sono del tipo

$$(9.1) \quad x = \alpha \bar{x} \quad , \quad y = \beta \bar{y} \quad , \quad z = \gamma \bar{z} \quad , \quad t = \bar{t} + \varepsilon \bar{z};$$

quindi nel piano $z = 0$ del tipo $x = \alpha \bar{x} \quad , \quad y = \beta \bar{y} \quad , \quad t = \bar{t}$. Un campione di misura l'abbiamo nella variazione che subisce l'invariante assoluto I della proiettività di cella (o una sua funzione) nel passaggio da O ad un punto vicino O': conviene, per comodità di calcolo, prendere l'invariante $J = \frac{1+I}{1-I} \left(= \frac{w}{s} \text{ in } O \right)$ che si annulla nel caso d'olonomia. Poichè

per esempio $\frac{\partial J}{\partial x} dx$ è invariante può prendersi come *elemento d'arco proiettivo*

in O secondo la tangente asintotica $y = z = 0$: se si assume questo elemento d'arco come differenziale della variabile x (il che può farsi disponendo di α) risulta, in O, $\frac{\partial J}{\partial x} = 1$ e fissata questa scelta è fissato $\alpha = 1$.

Analogamente può farsi per l'altra tangente asintotica, e porre, in O, $\frac{\partial J}{\partial y} = 1$ e dopo ciò $\beta = 1$. E con ciò è fissato il punto unità nel piano tangente (esplicheremo fra poco le condizioni poste).

Naturalmente possiamo seguire lo stesso criterio invariantivo per fissare un *elemento d'arco proiettivo* sulla normale proiettiva $x = y = 0$; cioè fare,

in O, $\frac{\partial J}{\partial z} = 1$ ($\gamma = 1$). Ma ciò *non* determina il punto unità nello spazio,

perchè non è stato ancora fissato il « piano all'infinito » (cioè ε). Ora è facile verificare, con un calcolo ovvio che non riporto, che per tutte le trasformazioni (9.1) per le quali $\alpha = \beta = \gamma = 1$, le funzioni p, q e le loro derivate d'ordine ≤ 2 si trasformano in funzioni che hanno in O gli stessi valori numerici; sicchè è inutile tentare di ricavare da elementi dell'intorno del 3° ordine di O la determinazione di ε (ed è naturale, perchè su ciascuna tangente asintotica si aveva un punto all'infinito e non così sull'asse z).

Una scelta naturale dell'unità di misura sull'asse χ si ha assumendo la metrica su di esso osculatrice in O a quella fornita dalla variazione di J su χ ; cioè $\frac{\partial^2 J}{\partial \chi^2} = 0$ (e ciò può farsi perchè, essendo $\chi = \frac{\bar{\chi}}{1 + \varepsilon \bar{\chi}}$, si ha in O $\frac{d^2 \chi}{d \bar{\chi}^2} = -2\varepsilon$).

Le quattro condizioni accennate si esplicitano in O come segue:

$$(9.2) \quad \begin{cases} p_{yx} q_x - q_{xx} p_y = \frac{1}{2} s^2 & , \quad p_{yy} q_x - q_{yx} p_y = \frac{1}{2} s^2 \\ p_{y\chi} q_x - q_{x\chi} p_y = \frac{1}{2} s^2 & , \quad p_{y\chi\chi} q_x - q_{x\chi\chi} p_y = \frac{s\chi}{s} (1). \end{cases}$$

10. SVILUPPI CANONICI PER UNA V_3^2 .

Determinato il riferimento proiettivo procuriamoci gli sviluppi di p, q nell'intorno di O: in essi sia le variabili sia i coefficienti hanno significato invariante.

Per risolvere simmetricamente le (9.2) che riscriviamo così

$$(10.1) \quad \begin{cases} \frac{p_{yx}}{p_y} - \frac{q_{xx}}{q_x} = \frac{1}{2} \frac{s^2}{p_y q_x} & , \quad \frac{p_{yy}}{p_y} - \frac{q_{yx}}{q_x} = \frac{1}{2} \frac{s^2}{p_y q_x} \\ \frac{p_{y\chi}}{p_y} - \frac{q_{x\chi}}{q_x} = \frac{1}{2} \frac{s^2}{p_y q_x} & , \quad \frac{p_{y\chi\chi}}{p_y} - \frac{q_{x\chi\chi}}{q_x} = \frac{1}{2} \frac{s^2}{p_y q_x} \frac{2 s \chi}{s^3} \end{cases}$$

definiamo L, M, N, R con le posizioni seguenti

$$(10.2) \quad \begin{cases} \frac{p_{yx}}{p_y} + \frac{q_{xx}}{q_x} = \frac{1}{2} \frac{sL}{p_y q_x} & , \quad \frac{p_{yy}}{p_y} + \frac{q_{yx}}{q_x} = \frac{1}{2} \frac{sM}{p_y q_x} \\ \frac{p_{y\chi}}{p_y} + \frac{q_{x\chi}}{q_x} = \frac{1}{2} \frac{sN}{p_y q_x} & , \quad \frac{p_{y\chi\chi}}{p_y} + \frac{q_{x\chi\chi}}{q_x} = \frac{1}{2} \frac{s}{p_y q_x} \frac{R}{s^2 - w^2} \end{cases}$$

da cui, essendo $p_y = s + w$, $q_x = s - w$

$$(10.3) \quad \begin{cases} p_{yx} = \frac{1}{4} \frac{s}{s-w} (L + s) & , \quad p_{yy} = \frac{1}{4} \frac{s}{s-w} (M + s), \\ p_{y\chi} = \frac{1}{4} \frac{s}{s-w} (N + s) \\ q_{xx} = \frac{1}{4} \frac{s}{s+w} (L - s) & , \quad q_{xy} = \frac{1}{4} \frac{s}{s+w} (M - s), \\ q_{x\chi} = \frac{1}{4} \frac{s}{s+w} (N - s) \end{cases}$$

(1) Risulta dalle prime tre di queste equazioni che il piano invariante (di cui al n. 6) ha, con questa scelta del punto unità, l'equazione $x + y + \chi = 0$.

e perciò

$$\frac{2s_{\lambda}}{s^2} = \frac{N+w}{s^2-w^2}$$

$$(10.4) \quad p_{y\lambda\lambda} = \frac{1}{4} \frac{s}{s-w} \frac{N+R+w}{s^2-w^2}, \quad q_{x\lambda\lambda} = \frac{1}{4} \frac{s}{s+w} \frac{N-R+w}{s^2-w^2}.$$

Gli sviluppi canonici di p e q si hanno ponendo in $O(0,0,0)$ $p=q=p_x=q_y=p_z=q_z=0$, $p_y=s+w$, $q_x=s-w$, $p_{xx}=q_{yy}=0$, dando p_{xx} , q_{yy} , L , M , N , R ed esprimendo per queste ultime quattro (e per s , w), a norma delle (10.3) e (10.4), le otto derivate p_{yx} , p_{yy} , p_{yz} , q_{xx} , q_{xy} , q_{xz} , $p_{y\lambda\lambda}$, $q_{x\lambda\lambda}$; e dando poi le derivate rimanenti: si hanno in tutto dodici condizioni, esattamente quante era possibile imporne disponendo di un riferimento proiettivo con un vertice del tetraedro in O .

II. OSSERVAZIONI COMPLEMENTARI.

Con la determinazione del riferimento invariante e degli sviluppi canonici è terminata la parte essenziale dello studio che ci eravamo proposti. Con ciò non è certo esaurito lo studio delle V_3^2 anolonomie in uno S_3 proiettivo. Intanto rimangono da studiare tutte le circostanze « particolari » diverse da quelle supposte: così per esempio il caso di un punto parabolico (in cui coincidano le tangenti asintotiche) o di flesso (a tangenti asintotiche indeterminate); il caso di un « punto d'olonomia » (in cui sia $w=0$ anche se $s \neq 0$); il caso in cui la retta invariante (n. 6) nel piano tangente sia una tangente asintotica o addirittura in cui il piano invariante coincida col piano tangente, o sia indeterminato, e così via. E si potranno anche ottenere classi di superficie anolonomie notevoli qualora qualcuna di queste particolarità possa presentarsi per tutti i suoi punti.

Ma anche nel caso generale si potrà approfondire lo studio di quelle configurazioni e corrispondenze di cui s'è fatto cenno e calcolare gli invarianti incontrati per mezzo di coefficienti degli sviluppi canonici (cioè in sostanza esplicitare il loro significato geometrico). Inoltre non si sono qui volutamente (perchè non strettamente necessarie) esaminate configurazioni invarianti relative all'intorno del 4° ordine (come sono alcune delle rette introdotte dal Maxia). Così si presenta spontaneo lo studio, dopo la determinazione del n. 7, degli elementi del 2° ordine delle linee involupate dalle normali proiettive (che danno luogo ad una distribuzione in sviluppabili delle tangenti asintotiche della V_3^2); delle linee involupate dalle tangenti invarianti; della connessione proiettiva determinata fra piani tangenti (dai rispettivi riferimenti invarianti); delle tangenti asintotiche della superficie invariante $I=I_0$; ecc. Nè è detto che non si possano in modo diverso da quello seguito determinare tali riferimenti; a me premeva fissare alcuni elementi essenziali, caratteristici del caso anolonomo.

Matematica (Geometria algebrica). — *Intorno alla teoria delle serie di equivalenza sulle curve riducibili*. Nota ⁽¹⁾ del Socio F. SEVERI.

La Nota del Gherardelli ⁽²⁾, che presento insieme a questa mia, mi porge l'occasione d'approfondire la conoscenza delle serie d'equivalenza subordinate ad una data serie d'equivalenza, sopra una curva riducibile. Alla questione accennai appena (dando taluni esempi) nella Memoria colla quale iniziai la nuova teoria ⁽³⁾; chè allora il problema, di fronte ad altri che maggiormente mi premevano, m'appariva incidentale.

Più di proposito la questione fu trattata dipoi dal Maroni ⁽⁴⁾, il quale ottenne alcune interessanti conclusioni, specialmente in ordine ai gruppi eccezionali delle serie parziali.

È istruttivo di riassumere e di ravvicinare taluni fatti, *a priori* inaspettati, che dimostrano ancora una volta la necessità di non credere troppo, per orientarsi nel nuovo campo, alla bussola delle analogie.

Un più ampio sviluppo delle conclusioni qui riassunte si troverà nelle Lezioni sulle serie e sui sistemi di equivalenza, che continuo ad impartire anche quest'anno all'Università di Roma e che si stanno pubblicando a cura di quel Seminario matematico.

1. Sia $C = C_1 + C_2 + \dots + C_t$ una curva algebrica riducibile di un S_d e C_1, C_2, \dots, C_t siano le sue componenti irriducibili. Data su C una g_n^r di equivalenza, dimostrai (in A) l'esistenza di (infiniti) sistemi lineari associati a g_n^r . Ognuno di questi è un sistema lineare Σ , di forme dello S_d , che sega g_n^r , avendo la stessa dimensione della serie; così che per un gruppo generico di g_n^r passa una sola forma di Σ .

Vi sono in g_n^r gruppi particolari, rispetto a Σ : gruppi (sempre di un numero finito n di punti!) segati (virtualmente) da forme di Σ contenenti qualche componente di C ; e gruppi segati da infinite forme di Σ . I primi li chiamai *gruppi eccezionali di 1^a specie*; i secondi *gruppi eccezionali di 2^a specie*. Questi ultimi son particolari gruppi di 1^a specie. L'esistenza dei gruppi

(1) Presentata nella seduta del 6 febbraio 1938.

(2) G. GHERARDELLI, *Un'osservazione sulle serie di equivalenza sopra una curva algebrica riducibile*. Questi « Rendiconti », p. 71.

(3) F. SEVERI, *Un nuovo campo di ricerche nella geometria sopra una superficie e sopra una varietà algebrica*. « Memorie della R. Accademia d'Italia », vol. III, 1932. (Citata nel seguito come Memoria A).

(4) A. MARONI, *Sulla struttura e la costruzione delle serie di equivalenza incomplete sopra una curva algebrica riducibile*. « Rendiconti del Seminario Matematico di Padova », luglio-dicembre 1934.

eccezionali dipende in fondo dalla circostanza che la corrispondenza birazionale Ω fra l'ente lineare ∞^r, Σ , e l'ente $\infty^r g_n^r$, non può essere un'omografia, se g_n^r non è lineare; e deve pertanto possedere qualche elemento fondamentale.

Nel fatto l'ente g_n^r ha generalmente l'ordine invariantivo relativo > 1 ; se quest'ordine è 1, ossia se g_n^r è lineare (e ciò si verifica soltanto quando i gruppi di g_n^r risultino dalle somme dei gruppi omologhi di serie lineari di dimensione r , date sulle componenti irriducibili di C e riferite omograficamente ad uno stesso S_r), allora Σ può scegliersi in modo che Ω sia un'omografia; e non vi sono elementi fondamentali.

2. In A io osservai pure che per le g_n^r complete i gruppi eccezionali non hanno valore intrinseco rispetto alla serie; ma che esistono solo in relazione al sistema associato. Cambiando questo, ogni gruppo può diventare eccezionale. Il Maroni fece dipoi l'osservazione che invece per una g_n^r incompleta i gruppi eccezionali possono avere, ed hanno anzi generalmente, un'esistenza intrinseca, e quindi ch'essi non mutano cambiando Σ o trasformando birazionalmente C ⁽¹⁾.

A questo punto occorre lumeggiare un fatto essenziale (che del resto trovasi già, illustrato con qualche ampiezza, nel n. 16 di A).

Padronissimi di esigere che il sistema lineare Σ segante g_n^r abbia la stessa dimensione della serie d'equivalenza segata (sia cioè associato a questa); ma in tal guisa si viene a rinunciare alla possibilità di segare con sistemi LINEARI subordinati a Σ , TUTTE le serie lineari subordinate a g_n^r .

Ecco un esempio semplicissimo, ma luminoso. Consideriamo la g_2^2 formata dalle coppie di punti tolti rispettivamente da due rette sghembe a, b . Essa vien segata su $C = a + b$ dal sistema Σ dei piani dello spazio, che non è un sistema associato, perchè ha dimensione > 2 .

Le $\infty^3 g_2^1$ di g_2^2 son costituite dalle coppie di punti omologhi nelle ∞^3 omografie tra a, b ; e ciascuna delle g_2^1 vien segata su C da un fascio di piani subordinato a Σ , avente per asse una retta dello spazio. Se invece si sega g_2^2 con un sistema associato, com'è una stella di piani, le sole g_2^1 segabili con fasci del sistema associato son le $\infty^2 g_2^1$ staccate dai fasci di piani della stella.

(1) In A, dopo aver dimostrato l'invarianza birazionale delle g_n^r complete, poggiavi l'invarianza delle g_n^r parziali sull'asserzione che una serie razionale involutoria è di equivalenza. Ora quel che è vero è soltanto che la serie è di gruppi equivalenti (perchè razionale), ma i requisiti della razionalità e dell'involutorietà, che pure spettano alle serie di equivalenza, non bastano (come mostra l'esempio del Gherardelli) ad assicurare che la serie sia segabile con un qualche sistema lineare di forme del suo ambiente. Occorrono altri requisiti, implicitamente determinati dalla dimostrazione del n. 13 di A. Nella nuova più ampia trattazione, che qui riassumo, l'invarianza delle serie d'equivalenza incomplete viene invece stabilita direttamente all'inizio della teoria.

3. Si pone allora la questione: Data su una C riducibile una g_n^r , completa o parziale, esiste qualche sistema lineare Σ , di forme dell'ambiente, col quale si possa segare la g_n^r , in modo che ogni g_n^s ($s = 1, 2, \dots, r-1$) subordinata a g_n^r sia segabile con sistemi lineari subordinati a Σ ?

Nell'esempio precedente il sistema di tutti i piani dello spazio gode di queste proprietà. Chiameremo *sistema lineare aggiunto* alla data g_n^r un sistema lineare siffatto.

Dimostro (sulla base delle proprietà delle curve aggiunte ad una curva piana riducibile) che per ogni g_n^r , la quale sia *somma minima*⁽¹⁾ di più serie lineari (in particolare dunque per una serie d'equivalenza completa) esiste sempre qualche sistema lineare aggiunto, il quale ha necessariamente dimensione $> r$, se la g_n^r non è lineare.

Per una g_n^r qualunque lascio la questione insoluta, perchè non è essenziale per le deduzioni attuali.

4. Qual'è la dimensione minima del sistema lineare aggiunto ad una g_n^r di $C = C_1 + \dots + C_t$, somma minima delle serie lineari $g_{n_1}^{r_1}, g_{n_2}^{r_2}, \dots, g_{n_t}^{r_t}$ date su C_1, \dots, C_t ? La risposta è un po' laboriosa. Dimostro che:

Un sistema lineare Σ , di dimensione minima, aggiunto alla somma minima g_n^r ($n = n_1 + \dots + n_t$, $r = r_1 + \dots + r_t$; $r_i \geq 1$) di t serie lineari $g_{n_1}^{r_1}, \dots, g_{n_t}^{r_t}$, date sulle componenti C_1, \dots, C_t di $C = C_1 + \dots + C_t$, è caratterizzato dalle proprietà seguenti:

a) Non contiene forme passanti per tutta la C .

b) Ha la dimensione $\rho = r_1 + r_2 + \dots + r_t + t - 1$.

I sistemi LINEARI subordinati a Σ segano allora su C TUTTE le possibili g_n^s subordinate a g_n^r ($s = 1, \dots, r-1$).

Facendo l'immagine proiettiva di Σ , si trasformano le C_1, \dots, C_t in altrettante curve (semplici o multiple) di t spazi S_{r_1}, \dots, S_{r_t} , indipendenti entro uno spazio $S_{r_1 + \dots + r_t + t - 1}$. E poichè ogni g_n^s subordinata a g_n^r , è segabile, sulla curva riducibile trasformata, mediante un sistema lineare di iperpiani, così essa è completamente conosciuta.

5. Il Gherardelli ha giustamente presentato in modo dubitativo il proprio esempio, come un probabile tipo di serie razionale, involutoria, che, tuttavia, non è di equivalenza. La probabilità si muta in certezza soltanto se prima si dimostra che ogni serie di equivalenza subordinata a una data g_n^r è segabile con un sistema lineare subordinato ad un conveniente sistema lineare associato a g_n^r . Questa proprietà invece non occorre, come ora vedremo, allorchè

(1) Date più serie lineari su curve irriducibili distinte, la totalità delle somme dei gruppi di tali serie è (come si dimostra) una serie di equivalenza, la quale è completa se le date serie lineari son complete (e coincide allora colla somma massima).

ci si riferisce al sistema aggiunto. Nell'esempio cui si allude, invero, il sistema aggiunto alla serie g_4^4 , somma minima e massima delle coppie di punti di due coniche C_1, C_2 , si ottiene assumendo i piani α_1, α_2 , delle due coniche, indipendenti in uno spazio S_5 (il che non è restrittivo dal punto di vista birazionale). Le singole g_4^3 di g_4^4 son segate dagli S_4 passanti per le singole rette di S_5 . E a questo proposito si presenta un elegante paradosso, che *a priori* parrebbe annullare il valore dell'esempio come contrario alla proposizione alla quale si oppone.

Invero, le γ_4^3 razionali involutorie ottenute associando le sezioni di C_1, C_2 con coppie di rette coniugate nelle singole reciprocità fra C_1, C_2 sono ∞^8 ; e ∞^8 son le rette di S_5 . Onde parrebbe che segnando α_1, α_2 coi sistemi di S_4 aventi per assi tali rette, si ottenessero tutte le reciprocità fra α_1, α_2 ; e quindi che le dette γ_4^3 fossero tutte g_4^3 . In realtà non si ottengono che le ∞^7 reciprocità degeneri. Infatti, per una retta generica a di S_5 passa un S_3 appoggiato ad α_1, α_2 secondo due rette sghembe a_1, a_2 , che son singolari nella reciprocità relativa all'asse a , e dalla reciprocità resta determinata una proiezione non degenera fra a_1, a_2 . Viceversa, questa proiezione individua la reciprocità. Tutte le ∞^1 rette della schiera determinata da a, a_1, a_2 , prese come assi di sistemi ∞^3 di S_4 , danno luogo alla *stessa* reciprocità fra i due piani α_1, α_2 . Ed è perciò che si ottengono ∞^7 invece che ∞^8 reciprocità.

La circostanza paradossale segnalata si può anche presentare sotto quest'altro aspetto. Una reciprocità generica fra α_1, α_2 è individuata da 8 coppie generiche di rette reciproche; queste coppie son congiunte da otto S_3 ; in S_5 vi son 14 rette appoggiate ad otto generici S_3 : dunque una reciprocità generica è staccata dagli S_4 per una di tali rette.

Ma in verità nel caso attuale rette appoggiate agli otto S_3 ed esterne ai due piani α_1, α_2 vengon a mancare, perchè le ∞^2 rette di ciascuno di questi si appoggiano agli otto S_3 ed assorbono virtualmente tutte le 14 soluzioni del caso generale.

Siccome infine ogni g_4^3 di g_4^4 è segabile con un sistema lineare ∞^3 di iperpiani di S_5 (in quanto il sistema di tutti gl'iperpiani è aggiunto a g_4^4), possiamo concludere che una γ_4^3 , razionale, involutoria, i cui gruppi sien somme di coppie staccate su C_1, C_2 da rette coniugate in una reciprocità piana non degenera fra α_1, α_2 , non può mai essere una g_4^3 .

6. Nelle mie Lezioni ho altresì caratterizzato, in modo completo, le serie unirazionali (o razionali) involutorie, sopra una curva riducibile C .

I gruppi di una tal serie son necessariamente somme di gruppi omologhi di serie lineari date sulle componenti C e riferite mediante una corrispondenza plurilineare.

È soltanto quando questa corrispondenza plurilineare gode di particolari proprietà, che si ottiene una serie di equivalenza.

Chimica fisica. — *L'effetto Volta nelle leghe metalliche solide* ⁽¹⁾. Nota II ⁽²⁾ del Corrisp. O. SCARPA (con la collaborazione, per la parte sperimentale, del dott. C. Rossi).

Lo studio dell'effetto Volta nelle leghe contenenti composti intermetallici ha condotto a risultati particolarmente interessanti.

Volendo esaminare il caso di leghe capaci di formare più soluzioni solide, con netti intervalli di miscibilità, contenenti presunti composti intermetallici, venne scelto il sistema Rame-Zinco.

Il diagramma di stato di questo sistema ha dato luogo a numerosi studi, fra i quali sono specialmente notevoli le accuratissime analisi termiche effettuate da N. Parravano ⁽³⁾ nel 1914, le quali hanno condotto a stabilire l'esistenza di una serie di 6 soluzioni solide ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \eta$).

Per quanto riguarda l'effetto Volta di queste leghe, è da ricordare che nel passato era stato talvolta impiegato l'ottone per la costituzione di uno dei piatti del condensatore variabile adoperato per le misure dell'effetto Volta dei diversi metalli; però mai era stato indicato il titolo dell'ottone impiegato.

Le attuali misure dell'effetto Volta vennero effettuate rispetto al rame. Vennero eseguite molte serie di misure adoperando, a scopo di controllo, due sistemi di leghe possedenti i medesimi titoli, che furono preparate in tempi diversi. Le concentrazioni furono dedotte con analisi chimiche di campioni prelevati dai dischi delle singole leghe, dopo terminate le misure dell'effetto Volta.

Sistema Rame-Zinco.

Coppia	Effetto Volta rispetto al rame Volt
Cu/Zn	+ 0.73
Cu/lega al 96 % Zn	+ 0.71
Cu/lega al 90 % Zn	+ 0.79
Cu/lega all'81 % Zn	+ 0.74
Cu/lega al 58 % Zn	+ 0.56
Cu/lega al 38 % Zn	+ 0.33
Cu/lega al 19 % Zn	+ 0.13

(1) Lavoro compiuto nel Laboratorio di Elettrochimica del R. Politecnico di Milano.

(2) Presentata nella seduta del 9 gennaio 1938.

(3) «Gazzetta Chimica Italiana», vol. 94, p. 478, 1914.

I valori riportati nella precedente tabella sono quelli medi ricavati da tutte le serie di esperienze che furono eseguite dopo la completa messa a punto del metodo; con essi venne tracciato il diagramma di fig. 1.

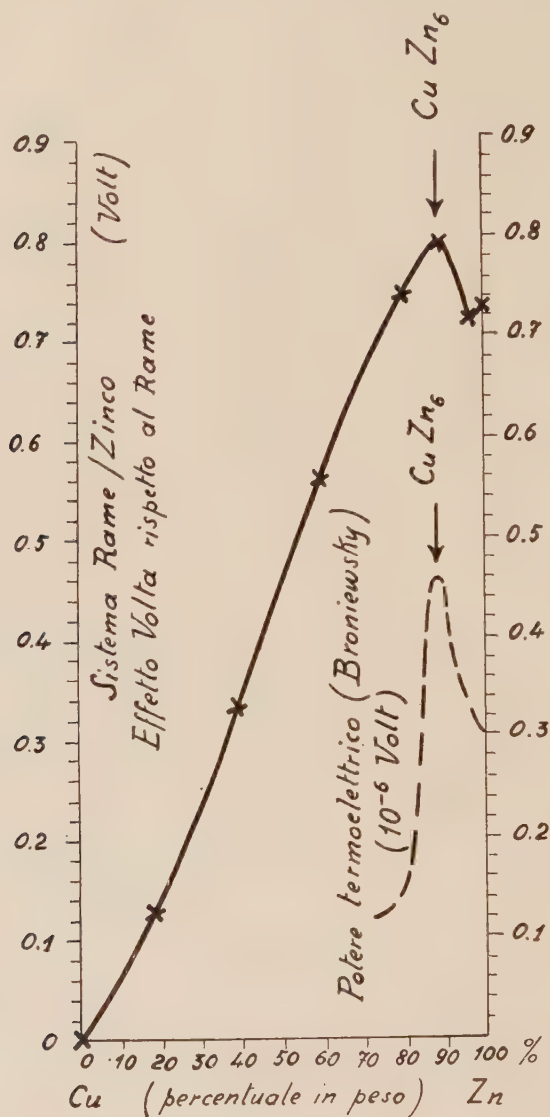


Fig. 1.

Dal diagramma appare chiaramente che il valore dell'effetto Volta di queste leghe, rispetto al rame, cresce con andamento pressochè regolare al crescere del tenore in zinco fino ai tenori poco inferiori al 90% in zinco; e che intorno al tenore 90% in zinco l'effetto Volta assume un valore massimo assoluto, e indi un minimo relativo intorno al 96% in zinco.

È importante notare che un massimo assoluto, al tenore di circa il 90 % in zinco, si osserva anche nel diagramma del potere termoelettrico delle leghe rame-zinco. Per far meglio risaltare tale coincidenza ho riprodotto nel diagramma di fig. 1 anche il primo tratto del diagramma del potere termoelettrico, quale fu determinato dal Broniewsky rispetto al rame e espresso rispetto al piombo.

Ricordo subito che tale singolarità del potere termoelettrico venne attribuita da Broniewsky ⁽¹⁾ alla esistenza, nella fase presente sotto forma di soluzione solida ϵ , del composto CuZn_6 la cui composizione centesimale è 86.05 % in zinco.

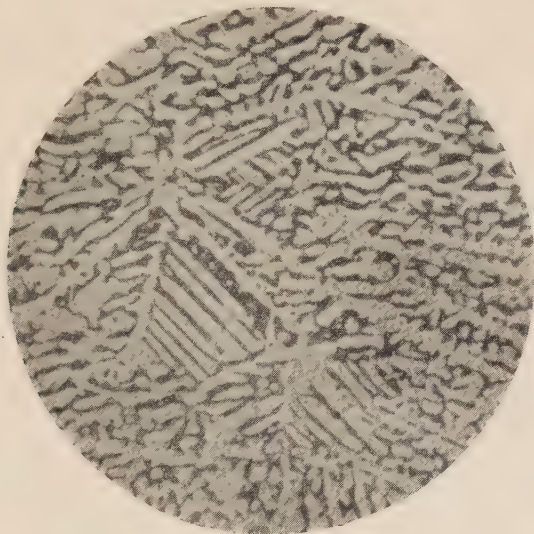


Fig. 2.

In proposito è importante rilevare che le dette leghe al 90 % in zinco sono bifasi (come mostra la micrografia riprodotta in fig. 2 ⁽²⁾ e come d'altra parte risulta dal noto diagramma di stato) e che le due fasi corrispondono, secondo il detto diagramma, alle soluzioni solide η ed ϵ di rame nello zinco. Secondo la ipotesi di Broniewsky la fase ϵ dovrebbe essere invece costituita da una soluzione solida contenente una modificazione, stabile a bassa temperatura, del composto CuZn_6 , mentre la η consisterebbe di una soluzione solida dello stesso composto nello zinco.

Poichè in base alle precedenti ricerche sulle leghe stagno-zinco ⁽³⁾, il valore dell'effetto Volta nelle leghe bifasi risulta essenzialmente determinato da quello corrispondente alla fase più elettropositiva, ne segue che, pur es-

(1) Vedi BRONIEWSKY e STRASBURGER, « Revue Métallurgie », XXVIII, 1931.

(2) Questa micrografia e quella delle altre leghe (che per brevità non sono qui riprodotte) furono eseguite dall'ing. Reggiori allora assistente volontario in questo Laboratorio.

(3) Vedi nella Nota I pubblicata in questi « Rendiconti ».

sendo bifase la lega al 90 % in zinco, l'effetto Volta che essa presenta rispetto al rame può essere considerato circa eguale a quello posseduto dalla fase ϵ avente la concentrazione di quella presente nella lega. Secondo Broniewsky questa fase (a cui corrisponde circa il titolo 87 % in zinco) contiene una elevatissima percentuale del composto CuZn_6 .

Nessuna singolarità dello stesso tipo si osserva invece nel diagramma dell'effetto Volta (fig. 1) in corrispondenza delle composizioni centesimali relative ai composti CuZn_2 (32.74 % in rame) e CuZn (49.31 % in rame), che il Broniewsky ha creduto di poter individuare con lo studio delle analisi termiche di precedenti autori e di poter confermare mediante i diagrammi del potere termoelettrico e di altre proprietà elettriche (conduttività ecc.) di queste leghe. Nella regione corrispondente al composto CuZn la curva dell'effetto Volta presenta soltanto un flesso.

Poichè le concentrazioni corrispondenti ai due composti CuZn , CuZn_2 , cadono in intervalli che non furono sufficientemente esaminati durante le presenti misure, verranno istituite ulteriori ricerche mediante un nuovo e più adatto apparecchio che attualmente ho in istudio.

Per quanto riguarda la singolarità (il massimo) corrispondente alla presenza del supposto composto CuZn_6 , è da tener presente che essa si è avuta, con eguale evidenza, in tutte le serie e le sottoserie di misure definitive dell'effetto Volta effettuate su questo sistema (cioè in totale in 14 sottoserie complete di misure).

Poichè, sulla esistenza del composto CuZn_6 , malgrado le conclusioni di Broniewsky e la grande autorità di questo chimico-metallurgico, non tutti i pareri sono ancora concordi ⁽¹⁾, *si potrebbe concludere che il risultato delle presenti misure di effetto Volta costituisce una ulteriore prova della sua reale esistenza.*

Ma si può anche pensare che il detto valore massimo non indichi la esistenza di un composto fra rame e zinco, e corrisponda invece a una proprietà delle soluzioni solide ϵ , di rame e zinco, che posseggono (fra tutte le ϵ) le massime concentrazioni in zinco, concentrazioni che dal noto diagramma di stato risultano intorno all'87 % in zinco, cioè vicine alla composizione percentuale del presunto composto intermetallico. In proposito è da ricordare che una teoria chimico-fisica dell'effetto Volta nelle leghe non è stata ancora abbozzata, mentre una più ampia discussione coinvolge tutte le questioni riguardanti la reale esistenza dei composti intermetallici, intesi in senso largo e in senso chimico ristretto, e il reale significato delle singolarità che ad essi corrispondono nei diagrammi delle proprietà fisiche.

In quanto al fatto per cui la posizione del massimo sopradescritto precede di alcun poco la concentrazione esattamente corrispondente al composto CuZn_6 , è da tener presente che lo stesso fatto si riscontra anche nel

(1) Vedi in HANSEN, *Zweistofflegierungen*, p. 668.

diagramma del potere termoelettrico rilevato dal Broniewsky; e che, con grande probabilità, ciò è da attribuire al piccolo numero di leghe che furono esaminate nell'intorno della concentrazione corrispondente al composto o al limite superiore delle concentrazioni in zinco nella fase ϵ . Le misure che saranno effettuate con il nuovo e più adatto apparecchio ora in istudio permetteranno di maggiormente precisare anche questo punto.

Per quanto riguarda il minimo relativo dell'effetto Volta, che nel diagramma appare per la lega al 96 % in zinco, è da notare che esso corrisponde sensibilmente alle concentrazioni delle soluzioni solide: η aventi (fra tutte le η) le minime concentrazioni in zinco. L'esame micrografico di un campione di questa lega (prelevato dal disco alla fine delle misure) mostra infatti che essa è costituita pressochè esclusivamente da soluzione solida η .

Per tentare di meglio confermare la eventuale esistenza del composto Cu Zn_6 ho fatto rilevare, misurare e calcolare dall'ing. V. Montoro gli spettri Debye delle leghe che dovrebbero contenerlo, ma dalla discussione di tali risultati nulla è stato fin'ora possibile di dedurre, con valore decisivo, nè in pro nè in contro.

Come ho detto, nel principio di queste Note, le presenti esperienze vanno considerate come l'inizio di uno studio sistematico sull'effetto Volta nelle leghe metalliche. Oltre all'interesse che presenta tale studio per la fisica sperimentale e per la fisica teorica, è da tener presente l'importanza che può avere questo nuovo metodo di indagine per la chimica-fisica-metallurgica.

A tal fine, non essendo consigliabile di impiegare nei laboratori di chimica metallurgica il troppo ingombrante e troppo delicato apparecchio che è stato adoperato nelle misure qui descritte, nè essendo sempre possibile l'impiego di campioni foggianti a dischi con forti diametri, ho allo studio un più semplice apparecchio che sarà adatto anche per quest'ultimo genere di ricerche.

Le misure suesposte furono eseguite con i metalli immersi nell'aria, nelle usuali condizioni, e impiegando un metodo che direttamente deriva da quello di Alessandro Volta. I loro risultati rappresentano quindi effettive misure del vero effetto Volta (effetto Volta esterno) nelle leghe.

Molto interessante sarebbe eseguire sulle leghe delle misure impiegando i metodi fotoelettrici, e ciò anche perchè questi metodi concedono di operare nel vuoto più spinto e quindi di eseguire misure con metalli le cui superficie possono venir liberate (mediante forte e prolungato ⁽¹⁾ riscaldamento nel vuoto) anche dalle ultime tracce di gas adsorbito.

(1) Specialmente dalle recenti esperienze di KRÜGER e SCHULZ (« Annalen der Physik », vol. 26, 1936) risulta che il moderato riscaldamento effettuato da molti sperimentatori, l'impiego di mastici per la chiusura stagna degli apparecchi, e il non perfetto sgasamento delle superficie interne dei recipienti, non sono sufficienti allo scopo.

Si deve però tener presente che la applicazione di questi metodi di sgasamento al caso delle leghe, è molto più limitata e delicata di quanto può apparire a prima vista, poichè per effetto del lungo riscaldamento (molte decine di ore) a temperature che non dovrebbero essere inferiori a circa 500° (onde ottenere lo sgasamento effettivo delle superficie metalliche) possono avvenire in molte leghe alterazioni notevoli di composizione e di struttura (evaporazioni, liquazioni, ecc.) le quali interessando specialmente la parte superficiale del metallo possono influire, in modo vario, sull'andamento dei fenomeni.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra una classe di V_3 che ammettono una infinità di superficie quasi-asintotiche dipendente da una funzione arbitraria.* Nota di C. P. BOGDAN, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. E. BOMPIANI.

1. Si conoscono ormai molti esempi di determinazione di *curve quasi-asintotiche* sopra una superficie o varietà ⁽²⁾; molto meno sviluppata è la conoscenza di *superficie quasi-asintotiche*.

Mi pare quindi interessante presentare alcune classi di varietà (rigate) sulle quali si possono determinare superficie quasi-asintotiche. Il motivo cui si ispira questa ricerca è quello stesso di cui si è servito il Bompiani per introdurre un parametro proiettivo sopra una curva qualsiasi ⁽³⁾, adattato al caso presente.

2. Consideriamo la superficie F_2^9 dello S_9 che rappresenta le cubiche piane. Sia A un punto fisso di questa superficie. Lo S_5 osculatore a questa superficie in un suo punto variabile P incide il piano tangente in A in un punto Q ⁽⁴⁾. Al variare del punto P, i punti della retta PQ generano una V_3 rigata che contiene la superficie F_2^9 .

(1) Nella seduta del 6 febbraio 1938.

(2) P. BUZANO, *Un'estensione iperspaziale della rigata cubica di Cayley*. « Boll. Unione Mat. Italiana », to. 16, 1937.

(3) E. BOMPIANI, *Forme normali delle equazioni differenziali lineari e loro significato geometrico*. « Ann. sc. de l'Université de Jassy », to. 23, 1937.

(4) E. BOMPIANI, *Proprietà differenziali caratteristiche di enti algebrici*. « Memorie della R. Acc. Naz. dei Lincei », ser. 6^a, to. XIII, 1921.

3. L'equazione parametrica della F_2^9 è:

$$P(1; x_1; x_2; x_1^2; x_1 x_2; x_2^2; x_1^3; x_1^2 x_2; x_1 x_2^2; x_2^3).$$

Sia $A(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ il punto fisso della superficie.

Lo S_5 osculatore alla superficie nel punto P , è determinato dai punti:

$$P, P_1, P_2, P_{11}, P_{12}, P_{22}$$

e incide il piano tangente in A nel punto

$$Q(3, x_1, x_2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

Dunque la rappresentazione parametrica della V_3 sarà:

$$R = P + \rho Q$$

$$[1 + 3\rho; (1 + \rho)x_1; (1 + \rho)x_2; x_1^2; x_1 x_2; x_2^2; x_1^3; x_1^2 x_2; x_1 x_2^2; x_2^3].$$

Lo S_3 tangente alla V_3 in un punto qualunque è determinato dai punti:

$$R = P + \rho Q, \quad R_1 = P_1 + \rho Q_1, \quad R_2 = P_2 + \rho Q_2, \quad R_0 = Q.$$

Se questo punto appartiene alla F_2^9 sicchè $\rho = 0$, si vede subito che lo S_3 ivi tangente alla V_3 , che è determinato dai punti: P, P_1, P_2, Q è contenuto nello S_5 osculatore alla F_2^9 in questo punto. Dunque:

La superficie F_2^9 è una superficie quasi-asintotica $\sigma_{1,2}$ della V_3 .

4. Cerchiamo adesso se la V_3 possiede altre superficie quasi-asintotiche.

Una superficie della V_3 sarà determinata se $\rho = \rho(x_1, x_2)$.

Lo S_5 osculatore nel punto

$$R(x_1, x_2) = P(x_1, x_2) + \rho(x_1, x_2) Q(x_1, x_2)$$

a questa superficie è determinato dai punti:

$$\begin{aligned} &P + \rho Q; P_1 + \rho Q_1 + \rho_1 Q; P_2 + \rho Q_2 + \rho_2 Q; P_{11} + 2\rho_1 Q_1 + \rho_{11} Q; \\ &P_{12} + \rho_1 Q_2 + \rho_2 Q_1 + \rho_{12} Q; P_{22} + 2\rho_2 Q_2 + \rho_{22} Q \\ &(Q_{11} = Q_{12} = Q_{22} = 0). \end{aligned}$$

Questo S_5 contiene lo S_3 tangente alla V_3 se sono linearmente dipendenti i punti:

$$P; Q; P_1 + \rho Q_1; P_2 + \rho Q_2; P_{11} + 2\rho_1 Q_1;$$

$$P_{12} + \rho_1 Q_2 + \rho_2 Q_1; P_{22} + 2\rho_2 Q_2.$$

Si trova la condizione

$$(I) \quad 2\rho = x_1 \rho_1 + x_2 \rho_2.$$

Cioè ρ è una funzione omogenea di 2° grado in x_1, x_2 , e abbiamo una infinità di superficie quasi-asintotiche.

Dunque:

La V_3 ammette una infinità di superficie quasi-asintotiche non rigate. Queste superficie dipendono da una funzione arbitraria omogenea di 2° grado in x_1, x_2 .

5. Fra queste superficie si possono, in particolare, considerare quelle per le quali

$$\rho = a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2.$$

Queste costituiscono un sistema ∞^3 di F_2^9 . Per queste superficie abbiamo:

$$\bar{y}_1 = 1 + 3(a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2) = y_1 + 3 a_{11} y_4 + 6 a_{12} y_5 + 3 a_{22} y_6$$

$$\bar{y}_2 = (1 + a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2) x_1 = y_2 + a_{11} y_7 + 2 a_{12} y_8 + a_{22} y_9$$

$$\bar{y}_3 = (1 + a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2) x_2 = y_3 + a_{11} y_8 + 2 a_{12} y_9 + a_{22} y_{10}$$

$$\bar{y}_4 = x_1^2 = y_4 \quad ; \quad \bar{y}_5 = x_1 x_2 = y_5 \quad ; \quad \bar{y}_6 = x_2^2 = y_6 \quad ; \quad \bar{y}_7 = x_1^3 = y_7,$$

$$\bar{y}_8 = x_1^2 x_2 = y_8 \quad ; \quad \bar{y}_9 = x_1 x_2^2 = y_9 \quad ; \quad \bar{y}_{10} = x_2^3 = y_{10}$$

dove le y_i sono le coordinate di un punto della prima superficie F_2^9 , e le \bar{y}_i di un punto della superficie F_2^9 per la quale ρ ha il valore (1). Dunque queste superficie F_2^9 si ottengono dalla prima mediante una omografia. Abbiamo dunque ∞^3 omografie che mutano fra loro le superficie F_2^9 e la V_3 in se stessa. Queste superficie F_2^9 passano per il punto A, dove hanno gli stessi spazi osculatori che la prima superficie F_2^9 .

Dunque:

La V_3 possiede un sistema ∞^3 di superficie F_2^9 quasi-asintotiche. Tutte queste superficie passano per il punto A dove hanno gli stessi spazi osculatori. Esistono ∞^3 omografie che mutano fra loro queste superficie e la V_3 in se stessa.

6. Le considerazioni precedenti si possono generalizzare. Si considera la $F_2^{n^2}$ dello $S_{\frac{n(n+3)}{2}}$ che rappresenta le C^n piane. Lo $S(n-1) = S_{\frac{(n-1)(n+2)}{2}}$ osculatore nel punto P variabile incide in un punto Q il piano tangente in un punto fisso A. Al variare di P, i punti della retta PQ generano una V_3 rigata che contiene la superficie data.

La superficie $F_2^{n^2}$ considerata è quasi-asintotica per la varietà.

Perchè la superficie $P(x_1, x_2) + \rho(x_1, x_2) Q(x_1, x_2)$ della varietà sia quasi-asintotica si trova la condizione

$$(n-1) \rho - \frac{n-2}{1} (\rho_1 x_1 + \rho_2 x_2) + \frac{n-3}{1 \cdot 2} (\rho_{11} x_1^2 + 2 \rho_{12} x_1 x_2 + \rho_{22} x_2^2) + \dots \\ \dots + (-1)^{n-2} \frac{1}{(n-1)!} [\rho_{11-1} x_1^{n-2} + (n-2) \rho_{1-12} x_1^{n-3} x_2 + \dots + \rho_{2-2} x_2^{n-2}] = 0.$$

Si vede che ρ deve essere una funzione omogenea di grado $n-1$ in x_1, x_2 .

Possiamo dunque concludere:

La V_3 considerata possiede una infinità di superficie quasi-asintotiche. Questa infinità dipende da una funzione arbitraria omogenea di grado $n-1$ in x_1, x_2 . Fra le superficie quasi-asintotiche ci sono ∞^n superficie $F_2^{n^2}$, che passano tutte per il punto A, dove hanno gli stessi spazi osculatori. Vi sono ∞^n omografie che mutano fra loro queste superficie e la V_3 in se stessa.

Matematica. — *Sul calcolo effettivo del periodo del moto perturbato in un caso tipico di prima approssimazione.* Nota di N. CARTOVITCH, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

È nota l'importanza per la teoria dei moti centrali perturbati di conoscere un'espressione esplicita (in termini finiti) del periodo T nel caso in cui il moto perturbato è definito mediante un'equazione della forma:

$$(I) \quad \dot{x}^2 = \omega^2 (x-a)(b-x) + \varepsilon (p_0 x^3 + p_1 x^2 + p_2 x + p_3)$$

con a, b, ω e le p_k costanti; ed ε parametro costante del primo ordine, il cui valore 0 individua il moto non perturbato.

Recentemente è apparso un contributo interessante del prof. Levi-Civita: nel suo breve articolo pubblicato nella *Rivista de Ciencias*, 1937, n. 421, Lima-Perù, Levi-Civita pone e risolve il problema del calcolo effettivo del periodo in un caso alquanto più generale di prima approssimazione, facendo vedere come, operando in tale approssimazione sulla nota espressione generale del periodo, data dal Weierstrass per il moto definito da una equazione

$$\dot{x}^2 = \omega^2 (x-a)(b-x) + \varepsilon g(x),$$

con $g(x)$ funzione qualunque (continua in un intervallo alquanto più ampio di $a \dots b$), si giunge (per ε abbastanza piccolo) alla formula

$$(2) \quad T = T_0 + \frac{\varepsilon}{\omega^3} \int_0^\pi \frac{G(x, a, b)}{V(x, a, b)} d\theta$$

(1) Nella seduta del 6 febbraio 1938.

dove $T_0 \left(= \frac{2\pi}{\omega} \right)$ è il periodo del moto non perturbato ($\varepsilon = 0$), la variabile θ è legata ad x dalla posizione (di Weierstrass)

$$(3) \quad x = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos \theta,$$

e dove coi simboli $G(x, a, b)$ e $V(x, a, b)$ sono designati i due determinanti di terzo ordine:

$$(4) \quad G(x, a, b) = \begin{vmatrix} g(x) & x & 1 \\ g(a) & a & 1 \\ g(b) & b & 1 \end{vmatrix}$$

$$(5) \quad V(x, a, b) = \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \end{vmatrix} = (x-a)(x-b)(a-b) = \\ = (x-a)(b-x)(b-a).$$

L'applicazione della formula (2) al moto perturbato definito mediante l'equazione (1) conduce alla seguente espressione per il periodo T

$$(6) \quad T = T_0 + \frac{\varepsilon\pi}{\omega^3} \left[\frac{3}{2} (a+b) p_0 + p_1 \right], \quad \text{con} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Questa formula finale è stata dedotta dal prof. Levi-Civita nell'ipotesi che $g(x)$ sia un polinomio di terzo grado; mentre lo sviluppo del calcolo non si presenta altrettanto semplice se si trattasse di un polinomio di grado qualunque, nè sarebbe applicabile a funzioni $g(x)$ di tipo più generale. Io mi propongo di far vedere come (ammesso soltanto che $g(x)$ sia dotata di derivata continua in a e b) sia agevole, mediante un'ovvia integrazione per parti, di attribuire alla formula (2) un aspetto assai più vantaggioso, in cui scompare l'inconveniente che la funzione integranda si presenti agli estremi dell'integrale sotto la forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

All'uopo prenderemo le mosse dallo sviluppo del determinante $V(x, a, b)$, sostituendovi ulteriormente la x colla sua espressione (3) per mezzo di θ . Si ha

$$V = (x-a)(b-x)(b-a) = \frac{(b-a)^3}{4} \sin^2 \theta.$$

D'altra parte anche l'altro determinante $G(x, a, b)$ si annulla per $x = a$ e per $x = b$, ossia per i valori 0 e π di θ . Perciò applicando al rapporto $\frac{G(x, a, b)}{\operatorname{tg} \theta}$ la regola dell'Hôpital ricaviamo

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{G(x, a, b)}{\operatorname{tg} \theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{dG}{d\theta} \cos^2 \theta = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{dG}{d\theta}.$$

Siccome $G(x, a, b)$ dipende da θ pel tramite di x , si ha in generale, a norma della (3)

$$(7) \quad \frac{dG}{d\theta} = G'_x \cdot \frac{dx}{d\theta} = \frac{b-a}{2} G'_x \cdot \sin \theta.$$

Ora, in base alla (4)

$$(8) \quad G'_x = \begin{vmatrix} g'(x) & 1 & 0 \\ g(a) & a & 1 \\ g(b) & b & 1 \end{vmatrix} = -(b-a)g'(x) + g(b) - g(a)$$

che è funzione ovunque finita (e continua) in $a \leq x \leq b$.

Si ha perciò

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} G \cdot \cot \theta = 0,$$

ed analogamente

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi} G \cot \theta = 0.$$

Dopo ciò è chiaro che, applicando all'integrale

$$\int_0^\pi \frac{G d\theta}{V} = \frac{4}{(b-a)^3} \int_0^\pi G \frac{d\theta}{\sin^2 \theta} = -\frac{4}{(b-a)^3} \int_0^\pi G \cdot d \cot \theta$$

una integrazione per parti, i termini ai limiti si annullano, e rimane

$$\int_0^\pi \frac{G}{V} d\theta = \frac{4}{(b-a)^3} \int_0^\pi \frac{dG}{d\theta} \cot \theta d\theta.$$

La (7) ci dà ulteriormente

$$\int_0^\pi \frac{G}{V} d\theta = \frac{2}{(b-a)^2} \int_0^\pi G'_x \cos \theta d\theta$$

e infine, tenendo conto della (8) e notando che solo il primo termine reca contributo non nullo, otteniamo

$$\int_0^\pi \frac{G}{V} d\theta = -\frac{2}{b-a} \int_0^\pi g'_x(x) \cos \theta d\theta.$$

Possiamo quindi scrivere l'espressione (2) del periodo T sotto la forma

$$(9) \quad T = T_0 - \varepsilon \frac{2}{(b-a)\omega^3} \int_0^\pi g'(x) \cos \theta d\theta$$

che risulta, come si vede, direttamente collegata al dato essenziale della questione, che è la funzione $g(x)$.

Se si suppone che la $g(x)$ sia dotata non solo di derivata prima, ma anche di derivata seconda in a e b , con ulteriore integrazione per parti, ove si tenga presente che, in base alla (3), si ha

$$\frac{d}{d\theta} g'_x(x) = g''(x) \frac{dx}{d\theta} = \frac{b-a}{2} g''(x) \sin \theta,$$

si giunge alla formula

$$(10) \quad \left[T = T_0 + \frac{\varepsilon}{\omega^3} \int_0^\pi g''(x) \sin^2 \theta d\theta \right] \quad \text{con} \quad x = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos \theta$$

la quale, sostituendo la variabile θ con x , assume l'aspetto

$$(11) \quad T = T_0 - \varepsilon \frac{4}{(b-a)^2 \omega^3} \int_a^b g''(x) \sqrt{(x-a)(b-x)} dx.$$

È da notare che, ponendo $\frac{b-a}{2} = c$, la (9) può essere presentata sotto la forma

$$(12) \quad \left[T = T_0 + \frac{\varepsilon}{\omega^3} \frac{1}{c} \frac{d}{dc} \int_0^\pi g(x) d\theta \right].$$

Dalla (12) discende una relazione integrale, non priva di un certo interesse

$$(13) \quad \omega \int_0^c \tau(c) c dc = \frac{1}{\omega^2} \int_0^\pi [g(x) - g(m)] d\theta$$

dove $m = \frac{a+b}{2}$ e la funzione $\tau(c)$ è definita mediante la posizione

$T - T_0 = \varepsilon \tau(c)$, considerando il T come funzione di $c \left(= \frac{b-a}{2} \right)$.

Si può giungere ad un'ulteriore semplificazione della formula (10) decomponendo la funzione $g(x)$ in tre parti nel modo seguente:

$$(14) \quad g(x) = g(m) + g_1(x-m) + g_2(x-m),$$

dove $g_1(x-m)$ è funzione pari dell'argomento $x-m = -c \cos \theta$ mentre $g_2(x-m)$ è funzione dispari. Lo stesso carattere compete allora alle derivate seconde g_1'' e g_2'' , sicchè

$$\int_0^\pi g_2''(x-m) \sin^2 \theta d\theta = \int_0^\pi g_2''(-c \cos \theta) \sin^2 \theta d\theta$$

si annulla, in quanto $g_2''(-c \cos \theta)$, come funzione dispari di $\cos \theta$, cambia segno, cambiando θ in $\pi - \theta$. Perciò, sostituendo (14) con (10) si giunge alla formula semplificata

$$(15) \quad T = T_0 + \frac{\varepsilon}{\omega^3} \int_0^\pi g_1''(c \cos \theta) \sin^2 \theta d\theta.$$

Analogamente dalla formula (12) si trae

$$(15^*) \quad T = T_0 + \frac{\varepsilon}{\omega^3} \frac{1}{c} \frac{d}{dc} \int_0^\pi g_1(c \cos \theta) d\theta.$$

2. - Casi particolari notevoli.

a) La $g(x)$ sia sviluppabile (nell'intervallo $a \leq x \leq b$) in serie di Taylor, secondo le potenze crescenti di $(x-m)$.

In questo caso

$$(16) \quad g_2(x-m) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g^{(2k)}(m)}{2^k k!} (x-m)^{2k}.$$

Sostituendo (16) in (15*) si ottiene con un breve calcolo elementare, l'espressione seguente del periodo:

$$(17) \quad T = T_0 + \frac{\varepsilon \pi}{\omega^3} \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{g^{(2k)}(m)}{2^k k!} c^{2k-2} \beta_{2k}$$

dove

$$\beta_{2k} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos^{2k} \theta d\theta = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2k-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k}.$$

b) La $g(x)$ sia un polinomio di grado n .

È un caso particolare del precedente, in cui è certo valido lo sviluppo (16), e sussiste quindi la formula (17), sostituendo l' ∞ con $E\left(\frac{n}{2}\right)$.

Si tenga presente che la $2^{k\text{esima}}$ derivata della funzione $g(x)$ è data mediante la nota formula

$$(18) \quad \frac{g^{2k}(m)}{2^k k!} = \sum_{s=0}^{n-2k} \binom{n-s}{2k} p_s m^{n-s-2k}.$$

Sostituendo (18) in (17) e prendendo per estremo superiore della sommatoria n al posto dell' ∞ si ottiene, dopo un calcolo elementare (che ometto per brevità) la seguente espressione

$$(19) \quad T = T_0 + \frac{\varepsilon\pi}{\omega^3} \sum_{k=0}^{n-2} p_k \sum_{s=0}^{n-2k} 2^s \beta_{2s} \binom{n-k}{2s} c^{2s-2} m^{n-k-2s};$$

per $n=5$ si avrà, per esempio, la formula della forma

$$T = T_0 + \frac{\varepsilon\pi}{\omega^3} \left[\frac{5}{2} (4m^3 + 3mc^2) p_0 + \frac{3}{2} (4m^2 + c^2) p_1 + 3m p_2 + p_3 \right].$$

$$c) \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos k(\omega_1 x + \varphi_k).$$

In questo caso la formula finale per il periodo T sarà

$$T = T_0 + \frac{\varepsilon\omega_1}{\omega^3} \sum_{k=0}^{\infty} k A_k \cos k(\omega_1 m + \varphi_k) I_1(k\omega_1 c)$$

dove $I_1(x)$ è la funzione di Bessel del 1° ordine.

Matematica (Geometria algebrica). — *Un'osservazione sulle serie di equivalenza sopra una curva algebrica riducibile*. Nota di G. GHERARDELLI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio F. SEVERI.

1. Si consideri in uno spazio lineare S_d una curva algebrica C composta di t parti irriducibili C_1, C_2, \dots, C_t . Le forme di un sistema lineare dello S_d staccano su C i gruppi di una serie di equivalenza ⁽²⁾. Secondo un teorema fondamentale di Severi ⁽³⁾ una serie d'equivalenza completa g_n^r che esista come serie infinita su ciascuna componente della curva è costituita da tutti i gruppi ottenuti associando gruppi di serie lineari complete $g_{n_1}^{r_1}, g_{n_2}^{r_2}, \dots, g_{n_t}^{r_t}$ assegnate su C_1, C_2, \dots, C_t ($n = n_1 + n_2 + \dots + n_t$; $r = r_1 + r_2 + \dots + r_t$). Il modello minimo della g_n^r è la varietà V_r di C . Segre che rappresenta le t -ple di punti tolte da t spazi lineari $[r_1][r_2] \dots [r_t]$.

Sia g_n^e ($\rho \leq r$) una serie d'equivalenza subordinata di g_n^r e V_ρ la varietà contenuta in V_r che la rappresenta birazionalmente senza eccezioni. La g_n^e può segarsi su C con le forme di un sistema lineare Σ della dimensione ρ ⁽⁴⁾; le forme di Σ sono in corrispondenza birazionale con i gruppi della serie. Si riferiscano ora proiettivamente le forme di Σ ai punti di uno spazio lineare S_ρ ; ai fasci di Σ corrispondono su V_ρ curve razionali normali d'ordine t e in S_ρ rette. Alle sezioni iperpiane di V_ρ corrispondono pertanto in S_ρ forme di ordine t di un sistema lineare.

Se dunque x_i, y_h, \dots, z_k ($i = 0, 1, \dots, r_1$; $h = 0, 1, \dots, r_2$; \dots ; $k = 0, 1, \dots, r_t$) sono le coordinate di un gruppo di $g^{r_1}, g^{r_2}, \dots, g^{r_t}$ le coordinate $X_{ih\dots k} = x_i y_h \dots z_k$ di un punto di V_ρ (di un gruppo di g^e) sono forme d'ordine t di $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_\rho$, coordinate omogenee di punto in S_ρ ; le x_i, y_h, \dots, z_k risultano quindi proporzionali a forme lineari di queste stesse coordinate. Una serie g^e subordinata di g^r è rappresentata pertanto da formule del tipo:

$$\alpha x_i = \sum_{\sigma=0}^{\rho} a_{i\sigma} \lambda_\sigma \quad (i = 0, 1, \dots, r_1)$$

$$\beta y_h = \sum_{\sigma=0}^{\rho} b_{h\sigma} \lambda_\sigma \quad (h = 0, 1, \dots, r_2)$$

.....

$$\gamma z_k = \sum_{\sigma=0}^{\rho} c_{k\sigma} \lambda_\sigma \quad (k = 0, 1, \dots, r_t),$$

(1) Nella seduta del 6 febbraio 1938.

(2) SEVERI, *Un nuovo campo di ricerche...* « Mem. R. Acc. d'Italia », vol. III, 1932.

(3) SEVERI, loc. cit., n. II.

(4) SEVERI, loc. cit., n. 3.

dove $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ sono fattori di proporzionalità. In altre parole: una serie g_n^q si ottiene riferendo omograficamente ⁽¹⁾ le $g^{r_1}, g^{r_2}, \dots, g^{r_t}$ ai punti di uno spazio lineare S_q e associando, per formare un gruppo di g_q , gruppi di $g^{r_1}, g^{r_2}, \dots, g^{r_t}$ corrispondenti ad un medesimo punto di S_q .

2. In base al risultato precedente non sembra che sopra una curva riducibile una serie di gruppi di punti razionale e involutoria sia necessariamente una serie di equivalenza ⁽²⁾.

La curva C sia, ad es., composta di due coniche irriducibili C_1, C_2 e si consideri su C la g_4^4 completa ottenuta associando una coppia di punti di C_1 con una coppia di punti di C_2 . Ponendo fra i piani delle due coniche una reciprocità *non degenera* e associando coppie di punti staccate su C_1, C_2 da rette reciproche si ottiene una serie razionale ∞^3 di gruppi, involutoria perchè due suoi gruppi qualunque sono congiunti da una g^1 appartenente alla serie; ma questa serie ∞^3 non è tuttavia una serie di equivalenza. E infatti se $x_0, x_1, x_2; y_0, y_1, y_2$ sono coordinate di retta sui piani delle due coniche, una g^3 subordinata di g^4 è rappresentata dalle:

$$(1) \quad \alpha x_i = \sum_0^3 a_{i\sigma} \lambda_\sigma \quad i = 0, 1, 2.$$

$$(2) \quad \beta y_i = \sum_0^3 b_{i\sigma} \lambda_\sigma$$

Ora queste formule pongono fra i piani delle due coniche una reciprocità *degenera*: è retta singolare sul piano di $C_1 (C_2)$ quella corrispondente al sistema di valori delle λ che annullano i secondi membri delle (2) [delle (1)].

Sulla V_4^6 di S_8 che rappresenta la g^4 completa le g^3 subordinate sono rappresentate dalle sezioni iperpiane tangenti (non da sezioni iperpiane generiche).

Lo studio completo della questione potrà formare oggetto di un prossimo lavoro.

(1) Si tratterà in generale di omografie degeneri.

(2) La serie, come ha dimostrato SEVERI (loc. cit.), è però certamente costituita sempre da gruppi equivalenti.

Matematica. — *Osservazioni sopra la linea parabolica di una superficie.* Nota di I. POPA, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. E. BOMPIANI.

Sia O un punto parabolico di una superficie Σ , ciò che vuol dire che il piano tangente in O , inoltre ben determinato, incontra Σ lungo una curva cuspidale (oppure tacnodale ... ecc.).

Dal fatto che in un tal punto l'involuzione coniugata è parabolica, segue che la sviluppabile circoscritta a Σ lungo la linea parabolica è generata dalle tangenti asintotiche cuspidali (oppure tacnodali ... ecc.). Ma allora: *Le tangenti asintotiche coincidenti di una superficie generano una sviluppabile.*

Per la tangente t_p alla linea parabolica vale la seguente costruzione:

Consideriamo le ∞^2 cubiche cuspidali che hanno con la sezione prodotta in Σ dal piano tangente un contatto 7-punto; come cubiche cuspidali, ciascuna di esse ha un solo punto di flesso il luogo del quale è precisamente la tangente alla linea parabolica.

Si può segnalare il fatto che uno dei punti di flesso considerati dipende da un solo parametro e non da due come le cubiche considerate.

Si potrebbe definire la stessa tangente t_p nel modo seguente:

Ad un punto qualunque della tangente asintotica doppia, t_a , si possono associare due direzioni della superficie: sono quelle per le quali le sviluppabili circoscritte a Σ lungo di esse hanno lo stesso spigolo di regresso. Le dette direzioni si corrispondono in un'involuzione avente come rette unite la tangente asintotica t_a e quella alla linea parabolica t_p ⁽²⁾.

Sorge spontanea la questione di trovare una costruzione del piano osculatore alla stessa linea parabolica. È evidente che per trovare tale costruzione si deve ricorrere ad un intorno di ordine più elevato. Per la precedente, bastava l'intorno del terz'ordine.

Si può vedere che:

La quadrica di Moutard associata ad una tangente generica t di Σ — la quale quadrica è il luogo delle coniche osculatrici alle sezioni in Σ prodotte dai piani passanti per t — diventa, nel punto parabolico, un cono ⁽³⁾.

(1) Nella seduta del 6 febbraio 1938.

(2) Questo risultato è stato enunciato dal prof. BOMPIANI, *Sul contatto di due curve sghembe*. «Memorie della R. Accad. di Bologna», ser. VIII, to. III, pp. 35-38, 1925-26.

(3) Per il caso delle superficie sviluppabili, con ∞^2 punti parabolici, vedasi FUBINI-ČECH. «G. P. D.», II, Cap. IX, § 80.

Tutti i coni di Moutard contengono la tangente asintotica t_a e hanno lungo di essa lo stesso piano tangente, quello tangente a Σ . Due coni di Moutard aventi lo stesso vertice — e sono soltanto due che possono avere lo stesso vertice —, evidentemente un punto della tangente t_a , sono relativi a due direzioni che si corrispondono nella precedente involuzione.

La caratteristica del cono di Moutard relativo ad una direzione generica t è, all'infuori della tangente asintotica t_a , una conica situata in un piano π_t passante per t .

Abbiamo dunque un'omografia intercedente fra le tangenti, in O , di Σ e i piani passanti per esse.

Il piano corrispondente alla tangente parabolica t_p è il piano tangente a Σ od è indeterminato. In quest'ultimo caso si può assegnare come piano corrispondente la limite del piano π_t quando $t \rightarrow t_p$. Questo piano-limite è precisamente il piano osculatore alla linea parabolica.

Se il piano corrispondente a t_p fosse quello tangente a Σ , si può tuttavia associarle un'altro ben determinato e differente da quello tangente, nel modo seguente.

Per un punto qualunque dello spazio passano cinque piani π_t corrispondenti a cinque direzioni t , nessuna delle quali può coincidere con t_a oppure con t_p .

La condizione necessaria e sufficiente affinché la polare lineare della tangente parabolica rispetto alla precedente quintupla sia precisamente la tangente asintotica t_a è che il punto considerato descriva un piano passante per la tangente alla linea parabolica. Questo piano è precisamente il piano osculatore per il quale abbiamo, in questo modo, la costruzione cercata.

Matematica. — *Sulla riduzione di rango dei sistemi pfaffiani.* Nota di G. D. MATTIOLI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Extension aux variétés holonomes V_n^{n-1} de quelques propriétés des surfaces et des V_3^2 .* Nota di CHR. PAUC, presentata dal Corrisp. E. BOMPIANI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sopra una classe di V_k , situate sui coni di Veronese, che posseggono un sistema ∞^{3k-5} di quasi-asintotiche $\gamma_{1,3}$.* Nota di M. VILLA, presentata dal Corrisp. E. BOMPIANI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Il secondo principio di reciprocità e le sue applicazioni al calcolo delle deformazioni permanenti.* Nota I di G. COLONNETTI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio G. FUBINI.

In una serie di Note pubblicate, a distanza di tempo, in questi stessi « Rendiconti » ⁽²⁾, io mi sono occupato della reciprocità esistente tra lo stato di tensione determinato in un corpo elastico da una data sollecitazione esterna e lo stato di deformazione che nello stesso corpo elastico si può determinare mediante un dato sistema di deformazioni impresse.

Ritorno ora, ancora una volta, sull'argomento, per dare a quello che io ho chiamato allora *il secondo principio di reciprocità* una impostazione in un certo senso più generale, e soprattutto per dimostrare come quel principio — che nella teoria classica dell'elasticità costituisce il punto di partenza nel calcolo delle tensioni interne — nella nuova teoria dell'equilibrio elasto-plastico ⁽³⁾, possa venire assunto a punto di partenza nel calcolo delle deformazioni permanenti.

Sia V lo spazio, connesso, occupato dal corpo, ed S la superficie, od il complesso di superficie, che lo limita.

Noi vogliam prendere in considerazione due ben distinti stati di equilibrio.

Per definire il primo supporremo che sul corpo agisca un dato sistema di forze esterne.

Siano

$$F'_x \quad F'_y \quad F'_z$$

(1) Nella seduta del 6 febbraio 1938.

(2) G. COLONNETTI, *Sul principio di reciprocità*. « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », ser. 5^a; vol. XXI (1912); ID., *Su di una reciprocità fra deformazioni e distorsioni*. « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », vol. XXIV (1915); ID., *Sul problema delle coazioni elastiche*, 2 Note « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », vol. XXVII (1918); ID., *Nuovo contributo alla teoria delle coazioni elastiche ed alle sue applicazioni tecniche*, 3 Note. « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », ser. 6^a, vol. VII (1928); Cfr. anche O. SESINI, *Sulle coazioni elastiche*, « Atti della Pontificia Accademia delle Scienze, Nuovi Lincei », anno LXXIX (1926).

(3) G. COLONNETTI, *Su l'equilibrio elastico dei sistemi in cui si verificano anche deformazioni non elastiche*, 4 Note. « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », ser. 6^a, vol. XXV (1937); ID., *Nuovi punti di vista sulla statica degli archi molto ribassati*. « L'Ingegnere », Roma, 1937; ID., *Sul calcolo delle deformazioni delle travi in cemento armato*. « Il Cemento Armato », Milano, 1937; ID., *Analisi delle deformazioni plastiche e del conseguente stato di tensione nelle travi in cemento armato*. « Il Cemento Armato », Milano, 1937; ID., *Saggio di una teoria generale dell'equilibrio elasto-plastico*. « Acta Pontificia Academia Scientiarum », 1938.

le componenti, riferite all'unità di volume, della forza applicata all'elemento di volume dV , e

$$P'_x \quad P'_y \quad P'_z$$

le analoghe componenti, riferite all'unità di superficie, della forza applicata all'elemento superficiale dS .

Siano poi

$$\sigma'_x \quad \sigma'_y \quad \sigma'_z \quad \tau'_{yz} \quad \tau'_{zx} \quad \tau'_{xy}$$

le componenti speciali di tensione che una tale sollecitazione determina,

$$\varphi (\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z, \tau'_{yz}, \tau'_{zx}, \tau'_{xy})$$

l'energia potenziale elastica elementare, ed

$$\begin{aligned} \epsilon'_x &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_x} \right)' & \epsilon'_y &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_y} \right)' & \epsilon'_z &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_z} \right)' \\ \gamma'_{yz} &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau_{yz}} \right)' & \gamma'_{zx} &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau_{zx}} \right)' & \gamma'_{xy} &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau_{xy}} \right)' \end{aligned}$$

le corrispondenti componenti della deformazione.

Il secondo stato di equilibrio lo supporremo invece determinato imponendo al corpo un dato sistema di deformazioni impresse di componenti

$$\bar{\epsilon}''_x \quad \bar{\epsilon}''_y \quad \bar{\epsilon}''_z \quad \bar{\gamma}''_{yz} \quad \bar{\gamma}''_{zx} \quad \bar{\gamma}''_{xy}.$$

Siano

$$\sigma''_x \quad \sigma''_y \quad \sigma''_z \quad \tau''_{yz} \quad \tau''_{zx} \quad \tau''_{xy}$$

le componenti speciali di tensione che caratterizzano lo stato di coazione a cui quelle deformazioni impresse danno origine,

$$\varphi (\sigma''_x, \sigma''_y, \sigma''_z, \tau''_{yz}, \tau''_{zx}, \tau''_{xy})$$

l'energia potenziale elastica elementare (energia vincolata),

$$\begin{aligned} \epsilon''_x &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_x} \right)'' & \epsilon''_y &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_y} \right)'' & \epsilon''_z &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_z} \right)'' \\ \gamma''_{yz} &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau_{yz}} \right)'' & \gamma''_{zx} &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau_{zx}} \right)'' & \gamma''_{xy} &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau_{xy}} \right)'' \end{aligned}$$

le corrispondenti componenti della deformazione elastica, ed

$$u'' \quad v'' \quad w''$$

le componenti dello spostamento totale (cioè dovuto al sovrapporsi delle deformazioni impresse e delle deformazioni elastiche che ne conseguono); componenti legate alle componenti della deformazione dalle relazioni

$$\begin{aligned}\epsilon''_x + \bar{\epsilon}''_x &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)'' & \epsilon''_y + \bar{\epsilon}''_y &= \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)'' & \epsilon''_z + \bar{\epsilon}''_z &= \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)'' \\ \gamma''_{xz} + \bar{\gamma}''_{xz} &= \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)'' + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)'' & \gamma''_{yz} + \bar{\gamma}''_{yz} &= \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)'' + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)'' \\ \gamma''_{xy} + \bar{\gamma}''_{xy} &= \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)'' + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)''.\end{aligned}$$

Ciò posto applichiamo il principio dei lavori virtuali adottando, per esprimere le condizioni di equilibrio delle forze di uno dei due sistemi, la variazione di configurazione che caratterizza l'altro.

Si ha così, nell'un caso

$$\begin{aligned}& \int_V [\sigma'_x (\epsilon''_x + \bar{\epsilon}''_x) + \sigma'_y (\epsilon''_y + \bar{\epsilon}''_y) + \dots + \tau'_{xy} (\gamma''_{xy} + \bar{\gamma}''_{xy})] dV = \\ &= \int_V [F'_x u'' + F'_y v'' + F'_z w''] dV + \int_S [P'_x u'' + P'_y v'' + P'_z w''] dS\end{aligned}$$

e nell'altro

$$\int_V [\sigma''_x \epsilon'_x + \sigma''_y \epsilon'_y + \dots + \tau''_{xy} \gamma'_{xy}] dV = 0.$$

Ora per una nota, e del resto facilmente dimostrabile, proprietà delle funzioni quadratiche

$$\begin{aligned}\sigma''_x \epsilon'_x + \sigma''_y \epsilon'_y + \dots + \tau''_{xy} \gamma'_{xy} &= \sigma''_x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_x}\right)' + \sigma''_y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_y}\right)' + \dots + \tau''_{xy} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau_{xy}}\right)' = \\ &= \sigma'_x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_x}\right)'' + \sigma'_y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_y}\right)'' + \dots + \tau'_{xy} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau_{xy}}\right)'' = \sigma'_x \epsilon''_x + \sigma'_y \epsilon''_y + \dots + \tau'_{xy} \gamma''_{xy}.\end{aligned}$$

La seconda delle nostre equazioni si può quindi anche scrivere

$$\int_V [\sigma'_x \epsilon''_x + \sigma'_y \epsilon''_y + \dots + \tau'_{xy} \gamma''_{xy}] dV = 0$$

dopo di che la prima diviene

$$\begin{aligned}& \int_V [\sigma'_x \bar{\epsilon}''_x + \sigma'_y \bar{\epsilon}''_y + \dots + \tau'_{xy} \bar{\gamma}''_{xy}] dV = \\ &= \int_V [F'_x u'' + F'_y v'' + F'_z w''] dV + \int_S [P'_x u'' + P'_y v'' + P'_z w''] dS.\end{aligned}$$

• Di qui il teorema:

L'integrale (esteso a tutto il corpo) della somma dei prodotti delle singole componenti di una deformazione impressa per le corrispondenti componenti speciali di tensione dovute ad un sistema qualunque di forze esterne, è uguale al lavoro che queste forze esterne eseguirebbero nel cambiamento di configurazione a cui quella deformazione impressa dà origine.

APPLICAZIONE ALLA TEORIA CLASSICA DELL'ELASTICITÀ.

Lo stato di equilibrio che si tratta di studiare è il primo: quello cioè che vien determinato nel corpo da un sistema dato di forze esterne.

Dello stato di coazione ci si serve pertanto come di uno strumento di analisi; e giova precisarlo in una distorsione di Volterra impressa in corrispondenza di una data sezione Σ (superficie contenuta tutta entro V , la quale non seghi se stessa ed abbia il suo contorno su S).

Allora il primo membro della nostra equazione si riduce alla somma dei prodotti delle sei caratteristiche dello stato di tensione incognito in quella sezione, per le corrispondenti caratteristiche della distorsione impressa.

Se, a definire quest'ultima, si assume una semplice traslazione unitaria relativa delle due faccie del taglio idealmente praticato in corrispondenza di Σ , si giunge al teorema:

La componente, secondo una data direzione, del sistema delle tensioni interne che in un corpo elastico in equilibrio si sviluppano in corrispondenza di una data sezione, è misurata dallo stesso numero che misura il lavoro che le forze esterne applicate al corpo eseguirebbero qualora, praticato un taglio in corrispondenza della data sezione, si imprimesse alle due faccie del taglio una traslazione relativa di grandezza unitaria nella direzione prescelta.

Se invece si immagina impressa alle due faccie del taglio una rotazione unitaria relativa, si giunge al teorema:

Il momento, preso rispetto ad un dato asse, del sistema delle tensioni interne che in un corpo elastico in equilibrio si sviluppano in corrispondenza di una data sezione, è misurato dallo stesso numero che misura il lavoro che le forze esterne applicate al corpo eseguirebbero qualora, praticato un taglio in corrispondenza della data sezione, si imprimesse alle due faccie del taglio una rotazione relativa di grandezza unitaria attorno all'asse prescelto.

APPLICAZIONE ALLA NUOVA TEORIA DELL'EQUILIBRIO ELASTO-PLASTICO.

Qui si tratta invece di studiare lo stato di equilibrio determinato nel corpo da un sistema dato di deformazioni impresse (deformazioni plastiche).

È allora lo stato di tensione dovuto all'azione delle forze esterne che si assume come strumento di analisi; e lo preciseremo immaginando il corpo

soggetto ad un'unica forza applicata in un dato suo punto secondo una direzione pure data.

In queste condizioni il secondo membro della nostra equazione misura il lavoro che questa forza farebbe nella variazione di configurazione determinata dal dato sistema di deformazioni plastiche.

Per una forza di grandezza unitaria, quel secondo membro si riduce addirittura alla misura della componente dello spostamento del punto considerato nella direzione prescelta.

E si può enunciare il teorema:

Lo spostamento di un punto generico del corpo in una data direzione, dovuto ad un dato sistema di deformazioni plastiche, è uguale all'integrale (esteso a tutto il corpo) della somma dei prodotti delle singole componenti della deformazione plastica per le corrispondenti componenti dello stato di tensione determinato nel corpo stesso da una forza unitaria supposta applicata in quel punto e secondo quella direzione.

Meccanica. — *Il secondo principio di reciprocità e le sue applicazioni al calcolo delle deformazioni permanenti.* Nota II di G. COLONNETTI, presentata dal Socio G. FUBINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Il secondo principio di reciprocità e le sue applicazioni al calcolo delle deformazioni permanenti.* Nota III di G. COLONNETTI, presentata dal Socio G. FUBINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sopra alcune configurazioni rigide di filamenti vorticosi perpendicolari a un piano.* Nota I di L. SONA, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In alcuni lavori recenti il Morton ⁽²⁾ considera alcune configurazioni di filetti vorticosi perpendicolari a un piano, che si mantengono invariate durante il moto dell'intero sistema che è una rotazione intorno al centro di massa (masse sono le intensità dei vortici col rispettivo segno). In particolare egli dimostra che la configurazione di tre vortici nei vertici di un triangolo equilatero è sempre possibile qualunque siano le intensità dei vortici, ed è stabile se il centro di massa è interno al cerchio circoscritto al triangolo. Considera anche le configurazioni permanenti di vortici situati nei vertici di un rombo e nei vertici di un poligono regolare.

In un lavoro, precedente a quelli del Morton, e pure abbastanza recente, si è occupato delle configurazioni permanenti di vortici di intensità uguale, ugualmente disposti su uno o due anelli concentrici, il prof. T. H. Havelock ⁽³⁾, fornendo fra l'altro una esauriente dimostrazione di una proprietà enunciata per la prima volta da J. J. Thomson ⁽⁴⁾ (e da lui dimostrata solo parzialmente), e cioè che la configurazione costituita da n filetti vorticosi di intensità uguale immersi in un fluido indefinitamente esteso e situati nei vertici di un poligono regolare è stabile solo per $n < 7$.

Il Laura ⁽⁵⁾ riprendendo la stessa questione ha fornito un'altra dimostrazione di quest'ultima proprietà esponendo anche un nuovo metodo di ricerca in quest'ordine di considerazioni.

Nella presente Nota il problema del moto di n filamenti vorticosi perpendicolari a un piano sotto l'influenza delle loro mutue azioni, viene

(1) Nella seduta del 6 febbraio 1938.

(2) W. B. MORTON, *On some Permanent Arrangements of Parallel Vortices and their Points of Relative Rest.* «Proc. of the Royal Irish Academy», 41 A, 9-10, pp. 94-101, 1933; *On the Stability and Oscillations of Certain Permanent Arrangements of Parallel Vortices.* Id., 42 A, 2, pp. 7-14, 1934; *Vortex Polygons.* Id., 42 A, 4, pp. 21-29, 1935; *Centred Vortex Polygons.* Id., 43 A, 6, pp. 73-77, 1937.

(3) T. H. HAVELOCK, *The stability of Motion of Rectilinear Vortices in Ring Formation.* «Philosophical Magazine», ser. 7^a, vol. 11, 1931, pp. 617-633.

(4) J. J. THOMSON, *Treatise on Vortex Rings*, p. 107, 1883. Il Thomson dimostra la stabilità per $n = 2, 3, 4, 5, 6$ e la instabilità per $n = 7$, non dà però la dimostrazione della instabilità per valori superiori di n . Questa dimostrazione viene invece data nella Nota del Laura qui appresso citata.

(5) E. LAURA, *Questioni di stabilità relative al moto di n filetti vorticosi.* «Atti R. Istituto Veneto di Scienze ecc.», to. XCII, P. II, 1932-33.

impostato assumendo come funzioni incognite i quadrati, ρ_{hj} , delle loro distanze reciproche.

Il sistema di equazioni differenziali che così si costruisce, nel mentre presenta, per la trattazione generale del problema del moto, qualche inconveniente derivante principalmente dal fatto che le funzioni incognite non sono fra di loro indipendenti (salvo il caso $n = 3$), si presta invece bene per ricercare le configurazioni rigide.

Si dimostra così immediatamente che condizione necessaria e sufficiente affinchè tre vortici non allineati di intensità qualunque possano muoversi mantenendo rigida la loro configurazione è che essi si trovino nei vertici di un triangolo equilatero; questo completa il risultato del Morton che stabilisce solo la sufficienza della proposizione ora enunciata. La dimostrazione della stabilità di questa configurazione quando il centro di massa è interno al cerchio circoscritto, viene dedotta poi in un modo molto semplice con considerazioni affatto elementari.

Per $n = 4$ (come viene esposto nella II Nota), si trova una relazione abbastanza semplice fra i quadrati ρ_{hj} delle mutue distanze, che deve essere soddisfatta affinchè i quattro vortici possano formare una configurazione rigida. Questa relazione aggiunta a quella ben nota di Carnot che intercorre fra i lati e le diagonali di un quadrilatero qualunque, permette in generale di esprimere due delle ρ_{hj} in funzione delle altre quattro che possono quindi, entro certi limiti, essere scelte ad arbitrio. Le intensità dei vortici risultano poi proporzionali a quattro numeri funzioni delle ρ_{hj} .

Di un certo interesse mi sembrano alcuni casi particolari nuovi (sempre per $n = 4$) che si presentano, oltre a quelli del quadrato e del rombo già considerati dagli autori precedenti, e cioè: *a*) quadrilatero simmetrico rispetto a una diagonale; *b*) parallelogrammo con angolo di 60° . Per questi due casi vengono determinati i rapporti fra le masse dei vortici in funzione delle dimensioni assegnate dei quadrilateri o meglio in funzione dei loro rapporti.

In un lavoro più esteso di prossima pubblicazione verrà considerata la stabilità di queste nuove configurazioni e verrà anche trattato il problema delle configurazioni rigide di vortici situati nei vertici di più poligoni regolari concentrici.

I. IMPOSTAZIONE GENERALE PER n VORTICI. — Consideriamo n filetti vorticosi perpendicolari a un piano; sotto l'influenza delle loro azioni reciproche i filetti stessi si muovono mantenendosi paralleli. Siano P_h , ($h = 1, 2, \dots, n$), le loro traccie su un piano ad essi perpendicolare, e sia m_h l'intensità del vortice P_h (il segno di m_h rappresenterà il verso di rotazione del vortice).

L'insieme dei punti P_h si muove obbedendo al sistema:

$$(1) \quad \dot{P}_h = \sum_{(r)}^{1 \dots n} \frac{m_r i (P_r - P_h)}{(P_r - P_h)^2} \quad (h = 1, 2, \dots, n),$$

avendo indicato con i il solito operatore che fa ruotare un vettore di $\frac{\pi}{2}$ nel senso positivo e avendo inteso, coll'indice posto fra parentesi in basso, di escludere dalla sommatoria il termine che si ha facendo $r = h$. Abbiamo anche incluso nelle m_r un divisore 2π che si presenta generalmente in queste equazioni, approfittando dell'arbitrarietà di scelta dell'unità di misura delle intensità.

Dal sistema (1) si trae:

$$(2) \quad \dot{P}_h - \dot{P}_j = \sum_{(h)r} \frac{m_r i (P_r - P_h)}{(P_r - P_h)^2} - \sum_{(j)r} \frac{m_r i (P_r - P_j)}{(P_r - P_j)^2} \\ (h, j = 1, 2, \dots, n; h \neq j).$$

Moltiplicando scalarmente i due membri per $P_h - P_j$ e osservando che

$$i (P_r - P_h) \times (P_h - P_j) = \begin{vmatrix} x_h & y_h & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_r & y_r & 1 \end{vmatrix},$$

rappresenta il doppio dell'area, con segno, del triangolo $P_h P_j P_r$ [doppia area che noi indicheremo con (hjr)], si avrà:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (P_h - P_j)^2 = \sum_{(h)r} \frac{m_r (hjr)}{(P_r - P_h)^2} - \sum_{(j)r} \frac{m_r (hjr)}{(P_r - P_j)^2}.$$

E ponendo anche

$$\rho_{hj} = \rho_{jh} = (P_h - P_j)^2 \quad (h, j = 1, 2, \dots, n; h \neq j)$$

otterremo il sistema:

$$(3) \quad \frac{d\rho_{hj}}{dt} = \sum_{(h,j)r} m_r (hjr) \left(\frac{1}{\rho_{hr}} - \frac{1}{\rho_{jr}} \right),$$

dove si intendono esclusi dalla sommatoria i due valori h e j dell'indice r . Il sistema (3) contiene $n(n-1)/2$ equazioni e ha $n(n-1)/2$ funzioni incognite (tante quante sono le ρ_{hj} ; si noti in proposito che anche i secondi membri rimangono inalterati scambiando gli indici h e j). Esso presenta però, almeno per quanto riguarda il problema generale del moto, i due seguenti, inconvenienti: *a*) le funzioni incognite ρ_{hj} , salvo il caso $n=3$, non sono fra di loro indipendenti⁽¹⁾; *b*) le doppie aree (hjr) dei vari triangoli, essendo considerate anche in segno, non sono funzioni uniformi delle ρ_{hj} .

(1) Per n punti le relazioni che intercorrono fra le mutue distanze sono in numero di $(n-2)(n-3)/2$, pari cioè alla differenza fra il numero $n(n-1)/2$ delle distanze stesse e il numero $2n-3$ dei dati occorrenti per la completa determinazione di un poligono di n lati. Per $n=4$ si ha una sola relazione chiamata relazione di Carnot; essa è stata recentemente generalizzata per n qualunque dal prof. G. Candido («Atti Soc. It. Progr. delle Scienze», vol. II, 1935, p. 178).

Il sistema (3) ammette l'integrale

$$(4) \quad \sum m_h m_j \rho_{hj} = \text{cost.}^{(1)},$$

intendendo la sommatoria estesa a tutte le combinazioni semplici con due elementi degli n indici. Esso esprime la proprietà che la somma dei prodotti dei quadrati delle distanze di n vortici presi due a due per le intensità dei vortici di cui è considerata la distanza, si mantiene inalterata durante tutto il moto.

Il sistema (3) può avere utilità nella ricerca delle configurazioni rigide. Queste sono caratterizzate dall'annullare inizialmente i secondi membri delle (3); infatti per valori che annullino tali secondi membri sono nulle le $\dot{\rho}_{hj}$, e quindi costanti le ρ_{hj} .

La ricerca delle configurazioni rigide si riduce dunque a determinare le relazioni fra le ρ_{bj} e le m_r che soddisfano al sistema

$$(5) \quad \sum_{(b,j)} m_r (hjr) \left(\frac{1}{\rho_{hr}} - \frac{1}{\rho_{jr}} \right) = 0,$$

composto di $n(n-1)/2$ equazioni. (Anche qui dalla sommatoria si intendono esclusi i due valori h, j dell'indice r).

Possiamo osservare che essendo le (5) omogenee nelle m_r e nelle ρ_{bj} , se un poligono con delle convenienti masse nei vertici può costituire una configurazione rigida, lo stesso avviene per ogni altro poligono simile al dato avente nei vertici omologhi masse comunque proporzionali a quelle del poligono dato (in conseguenza delle variazioni proporzionali delle masse e delle dimensioni varia però la velocità angolare di rotazione).

Intenderemo di escludere dalla trattazione che segue i casi in cui tre o più dei vortici dati siano allineati.

2. CONFIGURAZIONI DI TRE VORTICI E CONDIZIONI DI STABILITÀ. — Per $n = 3$ le (5) forniscono

$$(6) \quad \rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23}.$$

Viceversa se vale la (6) i secondi membri delle (3) sono nulli e la configurazione è rigida. Concludiamo che: *condizione necessaria e sufficiente affinchè tre vortici di intensità qualunque, non allineati, possano muoversi mantenendosi rigidamente collegati è che essi si trovino sui vertici di un triangolo equilatero.*

(1) Questo integrale, non indipendente dagli altri conosciuti, è stato sfruttato dal Laura in alcune ricerche relative agli integrali delle equazioni generali del moto di n vortici in forma canonica (E. LAURA, *Sul moto parallelo ad un piano di un fluido in cui vi sono n vortici elementari.* «Atti R. Acc. delle Scienze di Torino», vol. XXXVII, 1902).

Volendo ora ricercare la condizione di stabilità, indichiamo con S la doppia area del triangolo dei tre vortici presa positivamente, e con x, y, z , i tre quadrati dei lati $\rho_{23}, \rho_{31}, \rho_{12}$. Il sistema (3) ci fornisce

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = m_1 S \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{y} \right), \\ \frac{dy}{dt} = m_2 S \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{z} \right), \\ \frac{dz}{dt} = m_3 S \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right). \end{cases}$$

Questo è soddisfatto da

$$x = y = z = h \quad (\text{costante positiva}).$$

Si ponga

$$x = h + \varepsilon \xi, \quad y = h + \varepsilon \eta, \quad z = h + \varepsilon \zeta,$$

con ε infinitesimo. Le ξ, η, ζ soddisfano allora al sistema lineare

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \frac{m_1 S_0}{h^2} (\eta - \zeta) = \alpha_1 (\eta - \zeta), \\ \frac{d\eta}{dt} = \frac{m_2 S_0}{h^2} (\zeta - \xi) = \alpha_2 (\zeta - \xi), \\ \frac{d\zeta}{dt} = \frac{m_3 S_0}{h^2} (\xi - \eta) = \alpha_3 (\xi - \eta), \end{cases}$$

essendo S_0 la doppia area del triangolo equilatero di lato h e avendo posto per brevità:

$$\alpha_i = \frac{m_i S_0}{h^2} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Ponendo ora

$$\xi = \xi_0 e^{\lambda t}, \quad \eta = \eta_0 e^{\lambda t}, \quad \zeta = \zeta_0 e^{\lambda t},$$

la costante λ soddisfa all'equazione

$$\begin{vmatrix} \lambda & -\alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \lambda & -\alpha_2 \\ -\alpha_3 & \alpha_3 & \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

che si riduce subito alla forma

$$\lambda^2 + \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1 = 0.$$

Essendo le α_i tutte quantità reali si conclude che la soluzione è stabile se

$$\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1 > 0,$$

cioè se

$$(6) \quad m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1 > 0.$$

Questa condizione coincide con quella determinata dal Morton e si esprime brevemente dicendo che la configurazione di tre vortici situati nei vertici di un triangolo equilatero è stabile se il centro di massa (punto intorno a cui ruota la configurazione) è interno al cerchio circoscritto al triangolo ⁽¹⁾. Questo avviene sempre se i tre vortici hanno ugual verso di rotazione; se invece uno ruota in senso contrario agli altri due, la sua intensità deve essere minore della metà della media armonica delle intensità degli altri due.

Meccanica. — *Sopra alcune configurazioni rigide di filamenti vorticosi perpendicolari a un piano.* Nota II di L. SONA, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Relazioni tra azione interna e deformazioni, negli involucri a doppia curvatura.* Nota di O. ZANABONI, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. P. BURGATTI.

I vari Autori cui si deve la trattazione dell'argomento delle piastre a doppia curvatura, sono stati indotti a riflettere sul significato e l'importanza di un termine aggiuntivo da essi trovato nelle equazioni di deformazione, in virtù del quale i momenti flettenti dipendono, oltre che dalle variazioni di curvatura come nelle piastre piane, anche dal valore dello sforzo assiale.

L'introduzione di tale termine è dovuta, secondo taluni, alla forma della sezione trasversale dell'elemento di cupola, che non è più rettangolare ma trapezia, e secondo altri all'effetto della curvatura delle fibre normali alla sezione considerata ⁽³⁾.

In realtà le due cause coesistono, e nel presente lavoro si tiene conto di entrambe di esse, impiegando le ipotesi semplificative correntemente in uso per le lastre sottili.

La deduzione è limitata alle relazioni che riguardano i momenti flettenti e gli sforzi assiali, come quelle che presentano il maggiore interesse applicativo.

(1) Cfr. W. B. MORTON, *On the stability ecc.*, già citata nell'introduzione, p. 9.

(2) Nella seduta del 6 febbraio 1938.

(3) Una esauriente discussione dei pareri dei vari Ricercatori, corredata da una deduzione personale per le piastre sferiche, trovasi in: O. BELLUZZI, *Osservazioni sulle equazioni generali delle cupole resistenti a flessione*. (« Bollettino Sindacato Provinciale Fascista Ingegneri », Bologna, 1934, n. 6) al quale si rimanda il lettore per le notizie bibliografiche e per la parte critica.

Il risultato cui si perviene mostra che il termine addizionale del momento flettente è di forma diversa da quella comunemente considerata, e che anche l'espressione dello sforzo normale contiene un proprio termine aggiuntivo ⁽¹⁾.

Sia un involucro di spessore δ , abbastanza piccolo in confronto ai raggi principali di curvatura, da potersi supporre, come nelle lastre piane sottili, che ogni segmento di normale alla superficie media compreso entro δ , si mantenga rettilineo e perpendicolare a questa anche dopo avvenuta la deformazione.

Consideriamo il tronco elementare di piastra che si ottiene conducendo le normali alla superficie media, lungo il contorno di uno dei rettangoli elementari in cui essa resta suddivisa in seguito all'adozione di un sistema di coordinate curvilinee ortogonali.

Possiamo notare che le facce laterali del tronco così definito sono costituite in genere da superficie rigate, e che tra due facce opposte intervengono generalmente delle variazioni nei raggi di curvatura della cupola.

Basta questa osservazione per rendere intuitivo che le relazioni complete tra deformazioni ed azione interna debbono avere forma complessa, e che di conseguenza è giustificata la loro decomposizione nei termini di uno sviluppo in serie, e la conseguente assunzione di quelli soli tra di essi che danno un apprezzabile contributo numerico al termine principale.

Per questa ragione commisureremo tutte le caratteristiche statiche e geometriche, che ci interessano, alle sezioni mediane del tronco considerato, ottenute mediante due piani normali alla superficie media, e parallele ai lati del rettangolo infinitesimo di cui si è detto più sopra.

La semplificazione introdotta risulterà ancor meglio giustificata a posteriori, quando si constaterà che i risultati raggiunti sono già sufficientemente approssimati per gli usi applicativi.

Chiamati con ds_1 , ds_2 gli elementi d'arco che le sezioni in esame tagliano sulla superficie media, e con R_1 , R_2 i rispettivi raggi di curvatura, stabiliamo lungo la normale alla lastra una ordinata x , positiva se rivolta dalla parte opposta al centro di curvatura del ds che si considera.

Avremo così che la fibra giacente sulla faccia 1 alla ordinata x , ha una lunghezza espressa da $dl_1 = \left(1 + \frac{x}{R_1}\right) ds_1$, e dà luogo ad un elemento

(1) Quest'ultimo fatto si può rilevare anche nel: LOVE, *Theory of Elasticity*, ed. 1920, p. 536; e, limitatamente alle sole piastre cilindriche circolari, anche nel FLÜGGE, *Statik und Dynamik der Schalen*. Tuttavia il Love giunge a risultati non del tutto soddisfacenti per il caso del momento flettente; ed il Flügge procede ammettendo *a priori*, nel caso generale, l'accettabilità delle formule delle lastre piane.

Soltanto per il cilindro circolare Egli istituisce una apposita ricerca più rigorosa, concludendo in modo abbastanza concordante con i risultati più generali della presente Nota.

di area $dA_1 = \left(1 + \frac{x}{R_1}\right) dx ds_1$, mentre in modo analogo si hanno le corrispondenti quantità per la faccia 2.

Ciò posto, considerando solo l'azione dei momenti flettenti e degli sforzi assiali, lo spostamento relativo di due facce opposte del tronco, in virtù della nostra ipotesi circa la conservazione della normale rettilinea, è dato da una rotazione rigida attorno ad una retta parallela all'elemento di linea mediana.

L'allungamento $d\lambda$ di una fibra generica si potrà dunque scrivere nella forma $d\lambda = \alpha x + a$, e si riconoscerà che α è la rotazione relativa delle due facce opposte, ed a l'allungamento delle fibre lungo la superficie media.

Introdotta la variazione di curvatura k della fibra media, misurata rispetto alla sua lunghezza iniziale, e chiamata con ε la dilatazione, avremo anche: $d\lambda = (kx + \varepsilon) ds$.

Convenuto inoltre di prendere positivi gli allungamenti, vediamo che k è positiva se fa aumentare il valore assoluto della curvatura; e che a k positiva corrisponde un momento negativo (se si ritengono positivi i momenti che comprimono le fibre all'estradosso).

L'allungamento generico unitario che riscontriamo nella direzione 1 sarà espresso da:

$$\bar{\varepsilon}_1 = \frac{d\lambda_1}{dl_1} = \frac{\varepsilon_1 + k_1 x}{1 + C_1 x}$$

ove si è posto $C_1 = \frac{1}{R_1}$.

In maniera analoga si trova $\bar{\varepsilon}_2$.

Se sostituiamo nelle note espressioni che danno le σ in funzione delle dilatazioni secondo due direzioni perpendicolari, abbiamo:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1 - \nu_2} (\bar{\varepsilon}_1 + \nu \bar{\varepsilon}_2) = \frac{E}{1 - \nu_2} \left(\frac{\varepsilon_1 + k_1 x}{1 + C_1 x} + \nu \frac{\varepsilon_2 + k_2 x}{1 + C_2 x} \right)$$

ed analogamente per σ_2 .

Moltiplicando per dA_2 ed integrando rispetto ad x , otteniamo lo sforzo normale risultante $N_1 ds_2$ agente sulla faccia A_2 ; moltiplicando invece per $x dA_2$ ed integrando, otterremo, salvo il segno, il momento risultante $M_1 ds_2$ rispetto alla traccia della superficie media.

Posto per brevità $L = \frac{E\delta}{1 - \nu^2}$, si ha di conseguenza:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 \delta = L \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \left(\frac{\varepsilon_1 + k_1 x}{1 + C_1 x} + \nu \frac{\varepsilon_2 + k_2 x}{1 + C_2 x} \right) (1 + C_2 x) dx \\ - M_1 \delta = L \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} x \left(\frac{\varepsilon_1 + k_1 x}{1 + C_1 x} + \nu \frac{\varepsilon_2 + k_2 x}{1 + C_2 x} \right) (1 + C_2 x) dx. \end{array} \right.$$

Prima di sviluppare le precedenti espressioni, conviene esaminare il caso eccezionale offerto dalla sfera con $C_1 = C_2$.

In questa ipotesi scompare dalle formule ogni traccia della curvatura, e si ricade nei termini stessi che si hanno per le lastre piane.

In pari tempo si nota che, per la costanza del raggio, le superficie laterali del tronco elementare sono effettivamente uguali alle sezioni medie considerate, e perciò si conclude che, entro i limiti nei quali è accettabile l'ipotesi delle indeformabilità della normale, alla sfera non competono termini addizionali di sorta.

Per tutti gli altri casi l'integrazione contenuta nelle formule precedenti non offre difficoltà alcuna, ma piuttostochè eseguirla in modo esatto, stimiamo più utile per la pratica, e più significativo per i risultati che si conseguono, usare le ipotesi iniziali per introdurre qualche semplificazione.

Ammesso che δ sia trascurabile di fronte ai raggi di curvatura, risulterà $C_1 x$ minore dell'unità, e perciò potremo sviluppare l'espressione $(1 + C_1 x)^{-1}$ mediante il binomio di Newton.

Eseguita l'integrazione per serie, ed assunti i soli due primi termini non identicamente nulli dello sviluppo che ne risulta, si trova facilmente:

$$\begin{cases} N_1 = L (\epsilon_1 + \nu \epsilon_2) + D k_1 (C_2 - C_1) + \epsilon_1 C_1 (C_2 - C_1) D \\ M_1 = - D (k_1 + \nu k_2) - D \epsilon_1 (C_2 - C_1) \end{cases}$$

ove si è posto come di consueto: $D = \frac{E \delta^3}{12 (1 - \nu^2)}$.

La trascurabilità delle potenze superiori di $C_1 \delta$ rispetto all'unità, che ci ha permesso escludere tutti i termini successivi dello sviluppo in serie, fa sì che anche $\epsilon_1 C_1 (C_2 - C_1) D$ sia trascurabile di fronte ad $L \epsilon_1$, e perciò possiamo anche scrivere:

$$(1) \quad \begin{cases} N_1 = L (\epsilon_1 + \nu \epsilon_2) + D k_1 (C_2 - C_1) \\ M_1 = - D (k_1 + \nu k_2) - D \epsilon_1 (C_2 - C_1) \end{cases}$$

che, colle analoghe per N_2, M_2 , sono le espressioni richieste.

Da esse possiamo ricavare con semplici passaggi algebrici le k e le ϵ ; indi, per parziale sostituzione, abbiamo:

$$\begin{cases} N_1 = L \left[1 - (C_2 - C_1)^2 \frac{D}{E \delta} \right] (\epsilon_1 + \nu \epsilon_2) + \frac{C_1 - C_2}{1 - \nu^2} (M_1 - \nu M_2) \\ M_1 = - D \left[1 - (C_2 - C_1)^2 \frac{D}{E \delta} \right] (k_1 + \nu k_2) + \frac{\delta^2}{12} \frac{C_1 - C_2}{1 - \nu^2} (N_1 - \nu N_2). \end{cases}$$

Secondo le nostre convenzioni, il valore di $(C_2 - C_1)^2 \frac{D}{E \delta}$ è trascurabile di fronte all'unità e perciò potremo scrivere le (1) anche nella forma:

$$(2) \quad \begin{cases} N_1 = L (\epsilon_1 + \nu \epsilon_2) + \frac{C_1 - C_2}{1 - \nu^2} (M_1 - \nu M_2) \\ M_1 = -D (k_1 + \nu k_2) + \frac{\delta^2}{12} \frac{C_1 - C_2}{1 - \nu^2} (N_1 - \nu N_2) \end{cases}$$

colle analoghe per N_2, M_2 .

Queste formule, sebbene approssimate, rispettano le conclusioni tratte a proposito della sfera e del piano, e pertanto assumono una portata del tutto generale entro i limiti delle ipotesi ammesse.

Come si era annunciato, il termine addizionale degli M ha forma diversa dalla $\frac{\delta^2}{12} \frac{N}{R}$ indicata da altri Autori; per di più si ha un termine aggiuntivo anche per N .

Interessa in pratica esaminare l'errore che si commette usando le espressioni semplici senza termini correttivi.

Trascurando per semplicità l'effetto della contrazione trasversale, dalle (2) deduciamo che gli errori relativi sono dati da:

$$\eta_N = (C_1 - C_2) \frac{M}{N} \quad , \quad \eta_M = (C_1 - C_2) \frac{\delta^2}{12} \frac{N}{M} .$$

Essi divengono uguali tra di loro se:

$$(3) \quad M = N \frac{\delta}{\sqrt{12}} = 0.289 N \delta .$$

Si deduce di qui che nelle cupole prevalentemente inflesse sarà maggiore l'errore per N , e che accadrà il contrario per le cupole sollecitate prevalentemente a sforzo assiale.

Il valore comune assunto dall'errore quando è verificata la (3) è espresso da:

$$\eta = 0.289 (C_1 - C_2) \delta .$$

Perciò, considerato che nei casi pratici il rapporto $\frac{\delta}{R}$ non supera quasi mai $\frac{1}{20}$ si deduce per η un valore massimo del 3 % circa, e si conclude che nella normalità dei casi è lecito l'impiego delle semplici formule valide per le lastre piane.

Fisica. — *Sul coefficiente di compressibilità dei solidi*⁽¹⁾. Nota di P. GUARESCHI, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. L. ROLLA.

In una mia Nota precedente⁽³⁾ io ho dato come espressione della frequenza di vibrazione delle molecole di un solido la relazione seguente:

$$(1) \quad \nu = \frac{H}{2\pi^2 m \delta^2}.$$

Per le stesse frequenze Einstein ha dato una relazione approssimata⁽⁴⁾ in funzione del coefficiente di compressibilità che è la seguente:

$$\nu = 2.54 \times 10^7 \frac{V^{1/6}}{M^{1/2} K^{1/2}}$$

dove K è il coefficiente di compressibilità, V il volume atomico o molecolare e M il peso molecolare.

Siamo allora in grado di esprimere il coefficiente di compressibilità in funzione delle dimensioni molecolari. Si avrà così:

$$K = \frac{6.45 \times 10^{14} V^{1/3} 4\pi^4 M \delta^4}{H^2 N^2}$$

e posto

$$V = \frac{\pi}{6} \delta^3 N$$

si ha

$$K = \frac{36.2 \times 10^{16} M \delta^5}{2.74 \times 10^{-46} N^{5/3}}.$$

Si giunge così per i solidi alla relazione finale

$$(2) \quad K = 3.08 \times 10^{23} M \delta^5$$

per cui si deve concludere che il coefficiente di compressibilità di un solido è proporzionale al peso molecolare o atomico e alla quinta potenza del diametro d'azione molecolare.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Università di Genova.

(2) Nella seduta del 6 febbraio 1938.

(3) P. GUARESCHI, *Sull'energia potenziale molecolare*. « Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei », 5 dicembre 1937.

(4) EINSTEIN, « Ann. der Physik », p. 170, 1911.

TABELLA I.

	t°	M	δ	K (sperimentale)	K (calcolato)
Al	0°	27.1	$3.82 \cdot 10^{-8}$	$1.33 \cdot 10^{-12}$	$0.682 \cdot 10^{-12}$
Sb	0°	240.4	2.68	1.46	1.04
Zn	20°	65.4	3.62	0.9	1.24
Cu	30°	63.6	3 —	0.719	0.504
Bi	20°	208	3.2	2.9	2.31
Sn	20°	119	3.8	1.9	2.87
Pb	30°	206.2	3.19	2.37	2.1
Na	1°	22.99	5.9	15.92	5.52
Mg	20°	24.32	5.15	2.8	2.73
K	1°	39.10	7.74	40.96	33.7
Ca	20°	40.08	5.3	5.6	5.3
Cr	20°	52.01	3.52	0.8	0.867
Ag	20°	107.88	3.24	0.99	1.18
Cd	30°	112.41	3.04	1.954	0.883
Fe	20°	55.84	2.52	0.59	0.172

I valori calcolati di K sono abbastanza soddisfacenti e fatta eccezione di qualcuno per il quale non si può essere ben certi del valore del diametro molecolare (una lieve differenza in tale diametro può portare, entrandovi nella (2) alla quinta potenza, forti differenze nel valore calcolato di K) molti altri dati sono sufficientemente concordanti coi valori sperimentali di K o almeno dello stesso ordine di grandezza. Ad ogni modo alcune variazioni si debbono attribuire al fatto, che nella formula di Einstein egli è partito dalla ipotesi, già fatta dal Lindeman, che il volume atomico sia proporzionale al cubo del diametro atomico che si è supposto nei solidi coincidente col diametro d'azione molecolare o atomico il quale dove il coefficiente di associazione è uguale ad uno, come ho dimostrato in altra mia Nota ⁽¹⁾, coincide col diametro reale dell'atomo o della molecola.

(1) P. GUARESCHI, *Sul calcolo dei coefficienti di associazione dei liquidi*. « Soc. Ligustica di Scienze e Lettere ». 1938.

Fisica. — *Sul coefficiente di conducibilità termica dei gas* ⁽¹⁾.
Nota di P. GUARESCHI, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. L. ROLLA.

È nota l'equazione di trasporto che si scrive nella sua forma generale quando si dice con Q una funzione qualunque delle componenti delle velocità di una molecola nella forma seguente

$$\bar{Q} = \iiint f(u, v, w) Q \, du \, dv \, dw$$

dove u, v, w sono le componenti della velocità molecolare e \bar{Q} è il valore medio di Q . Si può ottenere allora una equazione del moto del tipo

$$\begin{aligned} (1) \quad 3 \rho \frac{Dq}{Dt} = \Sigma \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{15}{2} \frac{mq}{\chi} \frac{\partial q}{\partial x} \right) - 29 \rho \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} \right) + \\ + \frac{4}{\chi} \frac{mq}{\chi} \left\{ \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial z} \right)^2 \right\} - \frac{4}{3} \frac{mq}{\chi} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} \right) + \\ + \frac{2}{\chi} \frac{mq}{\chi} \Sigma \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial z} \right)^2 \end{aligned}$$

dove q è dato dalla relazione $3q = U^2 + V^2 + W^2$.

Se non si ha movimento di insieme e cioè $u_0 = v_0 = w_0 = 0$ l'equazione (1) diviene

$$(2) \quad 3 \rho \frac{Dq}{Dt} = \Sigma \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{15}{2} \frac{mq}{\chi} \frac{\partial q}{\partial x} \right)$$

dove

$$\chi = \frac{3}{2} \sqrt{2mk} A_2$$

e poichè $mq = mU^2 = RT$ la (2) rappresenta l'equazione della conduzione del calore in un gas in riposo e per questo uguagliandola all'equazione di Fourier sulla propagazione del calore si avrà

$$(3) \quad C_v \rho \frac{dT}{dt} = \Sigma \frac{\partial}{\partial x} \left(\vartheta \frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

dove ϑ è il coefficiente di conducibilità termica.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Università di Genova.

(2) Nella seduta del 6 febbraio 1938.

Facendo le debite sostituzioni Maxwell è riuscito ad esprimere il valore del coefficiente di conducibilità termica dei gas in funzione della viscosità del fluido e cioè

$$\vartheta = \frac{5}{2} \frac{mq}{\chi} C_v = \frac{5}{2} \frac{RT}{\chi} C_v$$

e poichè $\frac{RT}{\chi} = \eta$ dove con η si indica la viscosità assoluta si ha l'espressione generale di Maxwell.

$$(4) \quad \vartheta = \varepsilon \eta C_v$$

dove C_v rappresenta il calore specifico molecolare del gas e η la viscosità assoluta. Il valore ε fu trovato da Maxwell essere 2.5 e determinato più esattamente da Chapman fra 2.5 e 2.53.

Chapman trovò pure che il valore di ε diviene sensibilmente inferiore nelle molecole biatomiche e maggiormente complesse poichè in tal caso il trasporto dell'energia viene fatto in parte per traslazione e in parte per rotazione delle molecole mentre nei gas monoatomici il trasporto si fa esclusivamente per traslazione.

In alcuni miei lavori ⁽¹⁾ io ho determinato per il moto molecolare un sistema di quantizzazione per la quale ho determinato la costante d'azione molecolare $H = 1.23 \times 10^{-23}$ erg sec. In tali miei lavori ho espresso la viscosità dei gas η con la relazione seguente

$$(5) \quad \eta = \frac{HN}{n\pi\alpha V_m} = \frac{HN_1}{n\pi\alpha}$$

dove H = molquanto d'azione molecolare = 1.23×10^{-23} erg sec.;

n = numero di rotazioni della molecola intorno ad un centro di figura nell'intervallo fra un urto e l'altro e che per tutti i gas è uguale a $1/3$;

α = coefficiente di associazione molecolare;

N_1 = numero di molecole per unità di volume = 2.7×10^{19} .

In altra mia Nota ⁽²⁾ io ho indicato un sistema di calcolo dei calori specifici dei gas e vapori partendo dalla regola di Trouton e quindi in definitiva dalla equazione di Clapeyron. Se diciamo con C il calore specifico molecolare di un fluido alla temperatura T e con ρ_1 la densità del fluido allo stato liquido e con ρ_2 la densità del suo vapore, con λ il calore latente

(1) P. GUARESCHI, *Sulla viscosità dei gas*. «Rend. R. Acc. Naz. Lincei», maggio, 1936.

(2) P. GUARESCHI, *Sul calcolo rapido ed approssimato dei calori specifici*. «Rend. R. Acc. Naz. Lincei», maggio, 1937.

di ebollizione per unità di volume e con J il coefficiente dinamico del calore $= 4.2 \cdot 10^7$ erg/caloria, si scriverà il valore del calore specifico molecolare espresso in calorie

$$C_v = \frac{\lambda}{(\rho_1 - \rho_2) T J}$$

e se trascuriamo la densità di vapore rispetto a quella del liquido si scriverà

$$(6) \quad C_v = \frac{\lambda}{\rho_1 T J}.$$

Ma in altra mia Nota ⁽¹⁾ ho dimostrato la possibilità di esprimere il calore latente di ebollizione per unità di volume dei fluidi in funzione del molquante di energia molecolare $H\nu$ dove ν rappresenta il numero di urti di una molecola contro altra.

Poichè il calore latente di ebollizione di un fluido per unità di volume è dato da

$$(7) \quad \lambda = \frac{n_1 N}{\alpha V_m} H\nu$$

sostituendo nella (6) si ha il valore del calore specifico

$$(8) \quad C_v = \frac{n_1 N}{\alpha \rho V_m J T} H\nu$$

dove n_1 sono i gradi di libertà della molecola.

Dicendo con \overline{dE} la variazione dell'energia totale di calore specifico è

$$C_v = \frac{1}{Jm} \frac{\overline{dE}}{dT}$$

quindi

$$T \frac{\overline{dE}}{dT} = n_1 H\nu$$

e per i gas essendo $n_1 = 3$ si ha

$$C_v = \frac{N}{\alpha \rho V_m J} \frac{\overline{dE}}{dT}.$$

(1) P. GUARESCHI, *Sul calcolo del calore latente di ebollizione*. «Rend. R. Acc. Naz. Lincei», maggio, 1936.

Riprendendo la (4) e facendo le debite sostituzioni si ottiene il valore del coefficiente di conducibilità termica e cioè

$$(9) \quad \vartheta = \varepsilon \frac{H N_1^2 n_1}{n \pi \alpha^2 V_m^2 \rho J T} H v \quad \text{e per} \quad \frac{N}{V_m} = N_1 \quad \text{sarà} \quad \vartheta = \varepsilon \frac{n_1}{n} \frac{H^2 N_1^2}{\pi \alpha^2 \rho J} \frac{v}{T}$$

dove ad α si potrà sostituire l'espressione di Sutherland $1 + \frac{C}{T}$ dove C è la costante di Sutherland caratteristica di ogni gas.

Si osservi che la quantità $\frac{H^2 N_1^2}{n \pi \alpha^2}$ è proporzionale al quadrato della viscosità assoluta e si scriverà allora $\frac{N^2 H^2}{n \pi \alpha^2} = n \pi \eta^2$ e quindi la (9) si può porre sotto altra forma e cioè

$$(10) \quad \vartheta = \varepsilon n_1 n \pi \eta^2 \frac{v}{J \rho T}$$

che ci permette di verificare la relazione (9).

Qualora si ritenga il valore di v entro limiti abbastanza ristretti di temperatura come costante ponendo $\varepsilon n_1 n \pi v = k_1$ si avrà una espressione semplificata

$$\vartheta = k_1 \frac{\eta^2}{\rho T}$$

che ci dice essere il coefficiente di conducibilità termica proporzionale alla viscosità cinematica e alla viscosità assoluta.

Sia Maxwell che Chapman calcolarono per i vari gas il valore del coefficiente di proporzionalità ε valore che va diminuendo con il numero di atomi nella molecola. Ecco i valori trovati da Maxwell per i diversi gas

$$\text{He} = 2.38 \quad \text{Ar} = 2.49 \quad \text{H} = 1.91 \quad \text{CO} = 1.88 \quad \text{N} = 1.91$$

$$\text{Etilene} = 1.55 \quad \text{Aria} = 1.91 \quad \text{O} = 1.9 \quad \text{CO} = 1.55.$$

Nella tabella I io ho calcolato oltre ai valori di ϑ anche i valori di ε come rapporto

$$\frac{\vartheta \text{ sperimentale}}{\vartheta \text{ calcolato}} = \varepsilon.$$

I valori sono sufficientemente concordanti con quelli dati dalla teoria cinetica dei gas salvo un certo divario per i gas monoatomici.

TABELLA I.

Gas Temperatura T = 273	η	ρ gr./cm ³	ϑ	ϑ_c (calc.) con la (9)	ϑ_s (sperim.)	ε_c (calc.)	ε (Maxwell)
Idrogeno	882 · 10 ⁻⁷	898 · 10 ⁻⁷	9.3 · 10 ⁹	220 · 10 ⁻⁶	397 · 10 ⁻⁶	1.85	1.91
Azoto	1674	12500	4.77	29.3	56.6	1.94	1.91
Ossigeno	1926	14200	4.25	30	57	1.9	1.9
Elio	1880	1760	4.23	231	339	1.47	2.38
Argon	2110	17800	3.8	25.8	38.9	1.51	2.49
CO ₂	1630	12500	4.88	27.8	54	1.94	1.88
CO	1414	19700	5.8	16.1	33.7	2.1	1.55

LEGGE DI VARIAZIONE DEL COEFFICIENTE DI CONDUCEBILITÀ TERMICA
CON LA TEMPERATURA.

In base a quanto già esposto si può a questo punto ricavare la legge di variazione del coefficiente di conducibilità termica in funzione della temperatura.

Se si considerano le molecole oltrechè come sfere rigide ed elastiche anche come fornite di una forza costante agente in un raggio abbastanza limitato che sia in un determinato rapporto con il diametro reale della molecola, tale considerazione permette di giungere, come vi giunse il Chapman, ad una equazione che si adatta molto bene coi fatti e nella quale si ritrova in forma rigorosa la formula di Sutherland per il coefficiente di viscosità.

L'espressione generale che diede Chapman per il coefficiente di viscosità, quando si considerano le molecole come soggette ad una forza di attrazione la cui legge è espressa dalla forma $1/q^n$, è la seguente

$$\eta = A \frac{10}{32} \frac{m}{\delta^2} \frac{1}{1 + \frac{C}{T}} \sqrt{\frac{RT}{\pi M}}$$

dove A è una costante e δ è il diametro d'azione molecolare.

Poichè abbiamo scritto

$$\vartheta = B \frac{\nu}{\rho} \frac{\eta^2}{T}$$

dove ho posto

$$B = \frac{n_1}{n} \frac{\varepsilon \pi}{J}$$

si avrà

$$(11) \quad \vartheta = B \frac{\nu}{\rho} \left(A^2 \left(\frac{10}{32} \right)^2 \frac{M}{N^2 \delta^4} \frac{1}{\left(1 + \frac{C}{T} \right)^2} \frac{R}{\pi} \right).$$

Ammettendo limiti di temperatura non troppo ampi si può ritenere la variazione di ν sufficientemente piccola per poterla considerare indipendente dalla temperatura e allora si può porre come costante tutta la relazione seguente della (11) ossia

$$B\nu \left(A^2 \left(\frac{10}{32} \right)^2 \frac{MR}{N^2 \delta^4 \pi} \right) = k = \text{costante}$$

cosicchè si scriverà in definitiva il coefficiente di conducibilità termica entro stretti limiti di temperatura, come una funzione inversa delle densità del fluido e del quadrato del coefficiente di associazione molecolare.

Si scriverà allora

$$\vartheta = \frac{k}{\rho \alpha^2} \quad \text{dove} \quad \alpha = 1 + \frac{C}{T}.$$

Consideriamo la scala di temperatura centigrada e diciamo con ϑ_0 il valore del coefficiente di conducibilità termica alla temperatura di 0°C e con ϑ_t il valore del coefficiente di conducibilità termica alla temperatura t . Si potrà scrivere il rapporto

$$\frac{\vartheta_t}{\vartheta_0} = \frac{\rho_0 \alpha_0^2}{\rho_t \alpha_t^2}$$

e poichè la densità ρ_t alla temperatura t è data dalla relazione

$$\rho_t = \frac{\rho_0}{1 + kt}$$

dove k rappresenta il coefficiente di dilatazione dei gas $= 1/273 = 0.00369$ si scriverà quindi in definitiva

$$(12) \quad \vartheta_t = \vartheta_0 (1 + kt) \frac{\alpha_0^2}{\alpha_t^2}.$$

La (12) si può ritenere quindi come l'espressione generale del coefficiente di conducibilità termica in funzione della temperatura.

Essa è poi della stessa forma della espressione empirica

$$\vartheta_t = \vartheta_0 (1 + k_1 t)$$

dove k_1 rappresenta un coefficiente che fu determinato sperimentalmente per ogni gas e che ne è caratteristico.

Io sono giunto invece alla (12) che contiene il rapporto $\frac{\alpha_0^2}{\alpha_1^2}$ che è caratteristico di ogni gas.

Si noterà dai valori sperimentali del coefficiente k_1 che è detto anche coefficiente di temperatura, come essi siano prossimi al coefficiente di dilatazione specialmente per l'aria, l'anidride carbonica ecc.

Si possono vedere dalla tabella II i valori di k_1 dati da parecchi autori per diversi gas.

TABELLA II.

	k_1	Sperimentatore
Aria	0.0036	Eckerlein
Aria	0.00281	Schleirmacher
Idrogeno	0.00275	Schleirmacher
Idrogeno	0.00422	Eckerlein
Argon	0.0026	Schwarze
Elio	0.00318	Schwarze
Ossido d'azoto	0.00446	Winkelmann
Anidride carbonica	0.00401	Winkelmann
Anidride carbonica	0.00367	Eichhorn
Anidride carbonica	0.00548	Schleirmacher
Vapori di ammoniaca	0.00548	Winkelmann
Metano	0.00655	Ziegler
Etano	0.00583	Ziegler
Etilene	0.00445	Eichhorn

I valori variano alquanto da sperimentatore a sperimentatore per uno stesso gas.

Dalla tabella III si possono confrontare i valori ottenuti con la (12) e quelli sperimentali.

TABELLA III.

Gas Temperatura gradi centigradi	Coeff. di Sutherland	$\alpha = 1 + \frac{C}{T}$	α^2	ϑ_0	$\vartheta_T = \vartheta_0 \left(1 + \frac{T}{273} \right)$	$\vartheta_{(12)}$ (calc.)	k_T (vari autori)	ϑ_t calcolato con la $\vartheta_t = \vartheta_0 (1 + k_T t)$
He								
0°	80.2	1.29	1.66	$33.8 \cdot 10^{-5}$	$37 \cdot 10^{-5}$	$38 \cdot 10^{-5}$	0.00318	$36.3 \cdot 10^{-5}$
27°		1.266	1.6		43.2	47.5		42.4
77°		1.229	1.5					
127°		1.2	1.44					
H								
0°	79	1.28	1.63	41.3	43.6	44.5	0.00275	44
27°		1.263	1.6		51	55		52.5
77°		1.225	1.5		58.2	63		61
127°		1.197	1.43					
Ar								
0°	170	1.625	2.66	3.89	4.26	4.66	0.0026	4.16
27°		1.567	2.43		5	6.07		4.68
77°		1.486	2.19		5.7	7.5		5.3
127°		1.425	2.03					
CO								
0°	239	1.87	3.5	3.47	4.35	5.75	0.00401	4.94
100°		1.625	2.65		5.5	8.55		6.7
200°		1.5	2.25					
Etilene								
0°	225.9	1.825	3.34	3.95	5.4	7	0.00445	6.36
100°		1.605	2.58		6.9	10.6		7.55
200°		1.576	2.17					

Per l'anidride carbonica Trautz e Zundel hanno dato la formula empirica seguente

$$(13) \quad \vartheta_t = 3.47 \times 10^{-5} \left(1 + \frac{1}{273} t \right)^{1.216}$$

e fu dedotta dagli autori da esperienze accuratamente eseguite. Questa in fondo si avvicina molto alla mia formula più generale che nel caso del CO_2 diviene

$$(14) \quad \vartheta_t = 3.47 \times 10^{-5} \left(1 + \frac{1}{273} t \right) \frac{\alpha_0^2}{\alpha_t^2}$$

dove per 100°C il rapporto $\frac{\alpha_0^2}{\alpha_t^2}$ diviene uguale a 1.32 e per 200°C lo stesso diviene uguale a 1.56. Allora i valori di ϑ_t divengono

	Con la (14)	Con la formula di Trautz e Zundel (13)
a 100°	5.75×10^{-5}	6.24×10^{-5}
a 200°	8.55	8.24.

Devo però altresì notare come i valori del coefficiente di conducibilità termica dati dai vari autori anche per uguali temperature presentano discordanze non indifferenti di entità superiore a quello che io non abbia ottenuto nella tabella III per modo che i divari che si riscontrano in tale tabella si possono ritenere compresi nei limiti di errori sperimentali⁽¹⁾. La formula empirica di Trautz e Zundel che fornisce i valori di ϑ_t fra 0° e 320°C è quella più razionale almeno per il CO_2 . Io sono giunto ad una formula più generale partendo da considerazioni teoriche e in base ad un concetto

(1) E. SCHMEIDER, « Ann. der Physik », 80, 215, 1916; E. D. MC. ALISTER e H. J. YEARIAN, « Physical Review », 34, 542, 1929; M. TRAUTZ e M. GURSCHING, « Ann. der Physik » (5), 4, 985, 1930; TRAUTZ e ZUNDEL, « Zeit. S. Techn. Physik », 12, 273, 1931; Id., « Ann. der Physik », (5), 17, 345, 1933.

Alcuni valori di ϑ_0 furono determinati:

- per l'Ar da Curie e Lepape valore $4.06 \cdot 10^{-5}$;
- per l'He da Curie e Lepape valore $33.63 \cdot 10^{-5}$;
- per CO da Kamnhuik e Martin valore $5.37 \cdot 10^{-5}$;
- per il CO da Trautz e Zundel valore 5.399×10^{-5} ;
- per il CO_2 da Trautz e Zundel valore $3.43 \cdot 10^{-5}$;
- per il Kr da Bruche e Littwin valore $1.9 \cdot 10^{-5}$;
- per il Ne da Curie e Lepape valore $10.92 \cdot 10^{-5}$;
- per l'ossigeno da Kamnhuik e Martin valore $5.83 \cdot 10^{-5}$;
- per l'H da Kamnhuik e Martin valore $41.3 \cdot 10^{-5}$.

di quantizzazione dei moti molecolari le cui considerazioni permettono di calcolare i valori sia del coefficiente di conducibilità che dei calori latenti e della viscosità in concordanza con i valori sperimentali ⁽¹⁾.

CONCLUSIONE.

Le formule dedotte dai miei concetti di quantizzazione molecolare introducendo la costante H hanno permesso di ottenere dei valori attendibili oltrechè per la viscosità dei gas e dei liquidi e dei calori latenti di ebollizione anche il valore dei coefficienti di conducibilità termica dei gas.

Vedremo in altra Nota la possibilità di ottenere dei valori soddisfacenti anche per i coefficienti di conducibilità termica dei liquidi.

Chimica. — *La struttura degli acidi coleinici determinata con l'analisi Patterson* ⁽²⁾. Nota di G. GIACOMELLO, presentata ⁽³⁾ dal Socio N. PARRAVANO.

Negli organismi viventi esistono dei complessi molecolari così stabili che furono ritenuti per molto tempo dei veri individui chimici. Wieland e Sorge ⁽⁴⁾ per primi poterono per es. stabilire che nella bile si trovano dei complessi fra acido desossicolico e gli acidi grassi, complessi che differiscono dai loro componenti anche fisicamente: la loro solubilità infatti è molto più elevata di quella di quest'ultimi. Tale proprietà è della massima importanza se la si mette in relazione colla funzione che queste sostanze sono chiamate a compiere nel ciclo entero-epatico e se si pensa che l'acido desossicolico può dare dei complessi anche con quei composti che negli organismi viventi esplicano una azione regolatrice (vitamine ed ormoni). La β -carotina, che è da considerarsi come la provitamina « A », dà un complesso molecolare con l'acido desossicolico nei rapporti 1 : 4 ⁽⁵⁾. Euler ⁽⁶⁾ trovò che con l'aggiunta di sali biliari si può avere una soluzione acquosa della stessa sostanza.

L'esistenza di questi complessi, ed i risultati di ricerche strutturalistiche che vado da tempo eseguendo, consentono da una parte di chiarire il mec-

(1) P. GUARESCHI, *Sulla viscosità dei gas*. « Rend. R. Acc. Naz. Lincei »; *Sulla viscosità dei liquidi*. « Rend. R. Acc. Naz. Lincei »; *Sul calcolo del calore latente di ebollizione*. « Rend. R. Acc. Naz. Lincei », maggio, 1936.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(3) Nella seduta del 6 febbraio 1938.

(4) H. WIELAND e H. SORGE, HOPPE SEYLER « Z. physiol. Ch. », 97 (1916).

(5) KAZUMI, JAMASAKY « J. Biochem. », 22, 243 (1935).

(6) EULER, HOPPE SEYLER « Z. physiol. Ch. », 219, 216 (1933).

canismo dell'azione ormonica, dall'altra suggeriscono la via più adatta per somministrare agli organismi che soffrono di malattie di carenza e di disturbi disfunzionali, i rimedi atti a riportarli allo stato normale. È noto ad es. che la vitamina «C» è molto facilmente ossidabile: poco conveniente è la sua introduzione come tale nell'organismo essendo antieconomico «nutrire» mediante acido ascorbico. Un complesso relativamente stabile di questa sostanza con un supporto del tipo dell'acido desossicolico, mentre da una parte aumenterebbe la stabilità del principio attivo, dall'altra regolerebbe nel tempo la sua azione. Infatti è naturale pensare che un complesso coleinico di sostanze fortemente attive (vitamine ed ormoni) sia sempre dissociato, data la sua stabilità, solo in piccolissima parte nei due componenti: quel tanto che basta perchè la parte attiva eserciti la sua azione specifica.

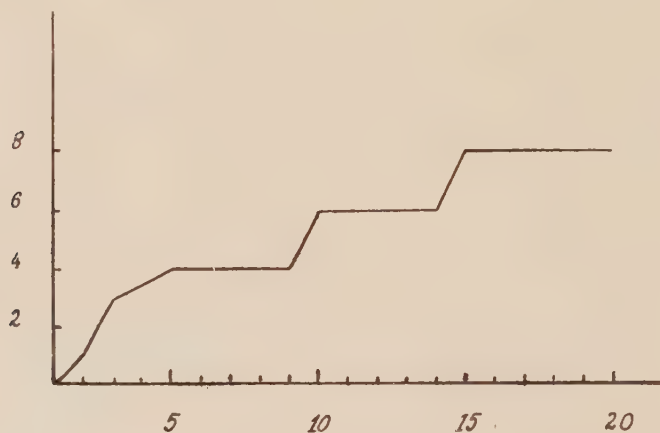


Diagramma n. 1.

Tali complessi servirebbero da serbatoio per mantenere nell'organismo una concentrazione costante di principii attivi.

Tralasciando queste considerazioni di interesse biologico e farmacologico, espongo qui i risultati delle mie ricerche fatte per interpretare il meccanismo della formazione dei complessi coleinici.

Rheinboldt⁽¹⁾ e collaboratori analizzarono una serie di complessi con i più svariati acidi grassi, alcoli esteri ecc. Da queste ricerche risultò che una molecola di acido grasso può combinarsi con 4, 6, 8 molecole di acido desossicolico a seconda della sua lunghezza. Nel diagramma N. 1 in ascisse è riportato il numero degli atomi di carbonio della molecola di acido grasso ed in ordinate il numero delle molecole di acido desossicolico ad essa associate.

(1) RHEINBOLDT e collaboratori, «Liebigs Annalen», 451, 256 (1927); «Angew. Chem.», 39, 765 (1926).

Rheinboldt pensò che attorno ad una molecola di acido grasso, fungente da centro di coordinazione, fossero disposte le molecole di acido desossicolico distribuite simmetricamente nello spazio. Il complesso formerebbe, sempre secondo quest'autore, un punto del reticolo. Contro questa ipotesi stanno i fatti stabiliti da Goo e Kratky ⁽¹⁾ che qualunque sia l'acido grasso ed il numero di coordinazione, le dimensioni della cella elementare *sono sempre le stesse* come è dimostrato dalla tabella I.

TABELLA I.

	acido stearocoleinico	acido Palmitocoleinico	acido laurocoleinico	acido caprilcoleinico	acido epitilcoleinico	acido Butirocoleinico	acido propionilcoleinico
<i>a</i> in Å	25.90	25.92	25.77	25.75	25.77	25.80	25.79
<i>b</i> in Å	13.53	13.40	13.48	13.49	13.52	13.49	13.57
<i>c</i> in Å	7.23	7.23	7.21	7.21	7.22	7.23	7.23

Veniva quindi spontaneo l'ammettere l'esistenza di un reticolo fondamentale percorso da canali in cui avrebbero potuto trovar posto le molecole degli acidi grassi. In collaborazione con Kratky ⁽²⁾ feci alcune ricerche roentgenografiche su derivati dell'acido colanico. I risultati di queste ricerche estesi anche ai complessi coleinici ⁽³⁾ ci portarono alla conclusione che la presenza di questi canali non solo era ammissibile, ma altresì richiesta da relazioni quantitative esistenti fra numero degli atomi di carbonio formanti la molecola dell'acido grasso, numero di coordinazione (numero di molecole di acido desossicolico legate con una molecola di acido grasso) e dimensioni dell'asse *c* della cella elementare.

Dalle proprietà ottiche, dall'intensità di certi riflessi e da altre considerazioni, che qui non è il caso di ripetere, si fu portati a credere che le molecole dell'acido grasso fossero disposte in canali paralleli all'asse *c*.

Naturalmente il riempimento di questi canali non poteva avvenire disordinatamente; doveva rispettare le condizioni richieste dalla simmetria del cristallo. È notorio infatti che gruppi polari tendono ad associarsi con gruppi polari, così pure è noto che le molecole dell'acido acetico si associano due a due, che analoga associazione esiste allo stato cristallino fra due molecole

(1) Y. GO e O. KRATKY, «Z. physik. Chem.», (B) 26, 439 (1934).

(2) G. GIACOMELLO e O. KRATKY, «Z. Kristallogr.», (A) 95, 459 (1936).

(3) O. KRATKY e G. GIACOMELLO, «Monatshefte Chem.», 69, 427 (1936).

di acido grasso e due di metilchetoni (il gruppo metilico non riesce ancora ad eliminare l'azione associante del carbonile ecc.), ed infine che l'associazione di due molecole di acido grasso avviene mediante i due carbossili. Naturalmente si pensò che l'acido grasso doveva associarsi nello stesso modo anche con l'acido desossicolico, sempre rispettando le norme di simmetria del reticolo fondamentale.

Il risultato delle ricerche cui eravamo pervenuti è il seguente: la cella elementare dell'acido coleinico ha le dimensioni $a = 25.8 \text{ \AA}$, $b = 13.5 \text{ \AA}$, $c = 7.22 \text{ \AA}$, appartiene al gruppo spaziale V^3 e contiene quattro molecole di acido desossicolico. Supponiamo che essa nel centro sia attraversata da un canale parallelo all'asse c e la figura 1 ci dia la proiezione della cella elementare sul piano ab .

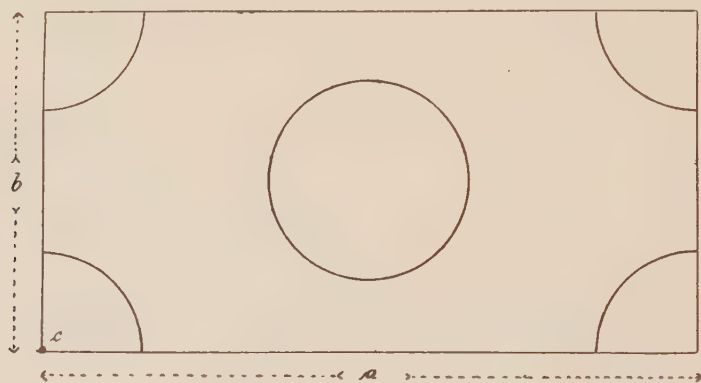


Fig. 1. - Proiezione della cella elementare sul piano (001).

Ogni cella elementare deve necessariamente essere attraversata da due canali, uno al centro e quattro quarti ai vertici. Se nel canale esiste una zona atta a provocare la formazione del complesso, questa stessa zona si ripeterà con continuità ogni 7.22 \AA nella direzione dell'asse c .

Ora possono verificarsi due casi: o la zona successiva a quella già impegnata è libera ed allora una nuova molecola di acido grasso vi prenderà posto, oppure è occupata ed allora l'acido grasso dovrà prendere posto nella successiva zona libera.

Se la lunghezza reale della molecola dell'acido grasso è l ; la sua sfera d'azione è di $L = l + 3.7 \text{ \AA}$, essendo 3.7 \AA la distanza che deve intercedere fra due atomi di carbonio appartenenti a due molecole diverse. Ora è naturale che quando L è maggiore di 7.22 \AA , la molecola dell'acido grasso, colla sua parte estrema, impedisca che una nuova molecola si associ alla zona attiva più vicina ed agisca come se in realtà occupasse due celle elementari. Essendoci per ogni cella elementare due canali, alle otto molecole

di acido desossicolico delle due celle, corrisponderanno due molecole di acido grasso ed il numero di coordinazione di questo sarà quattro.

Ciò sussisterà fino a quando L sarà maggiore di $2c$; in tal caso il numero di coordinazione sarà sei (dodici molecole di acido desossicolico per due molecole di acido grasso) e così via.

TABELLA II.

Numero degli atomi di carbonio dell'acido grasso = C_n	Numero di coordinazione determinato da Rheinboldt	Lunghezza della molecola dell'acido grasso $L = (C_n - 1)1.25 + 1.2 + 3.7$	nc	$(n - 1)c$	n	$2n$
1	2	3	4	5	6	7
4	4	8.65	14.44	7.22	2	4
5	4	9.90	»	»	2	4
6	4	11.15	»	»	2	4
7	4	12.40	»	»	2	4
8	4	13.65	»	»	2	4
9	6	14.90	21.66	14.44	3	6
10	6	16.15	»	»	3	6
11	6	17.40	»	»	3	6
12	6	18.65	»	»	3	6
13	6	19.90	»	»	3	6
14	6	21.15	»	»	3	6
15	8	22.30	28.88	21.66	4	8
16	8	23.55	»	»	4	8
17	8	24.80	»	»	4	8
18	8	26.05	»	»	4	8
20	8	28.55	»	»	4	8

Nella tabella II sono riportati, nella colonna 1, il numero di atomi di carbonio della molecola dell'acido grasso, nella colonna 2 il numero di coordinazione stabilito sperimentalmente, nella colonna 3 la lunghezza dell'acido grasso calcolata, nella 4 il prodotto nc , ove n rappresenta il numero di celle elementari occupate dall'acido grasso e c è uguale a 7.22 \AA (lunghezza dell'asse c), infine nella 5 il prodotto $(n - 1)c$. È evidente che L dovrà essere sempre maggiore di $(n - 1)c$ e minore di nc . Dato che due sono i canali che percorrono una cella e quindi due sono i sistemi di molecole di acido grasso che in essi vi trovano posto, poichè ogni cella contiene quattro mo-

lecole di acido desossicolico, il numero di coordinazione sarà evidentemente $2n$ (vedi colonne 6 e 7).

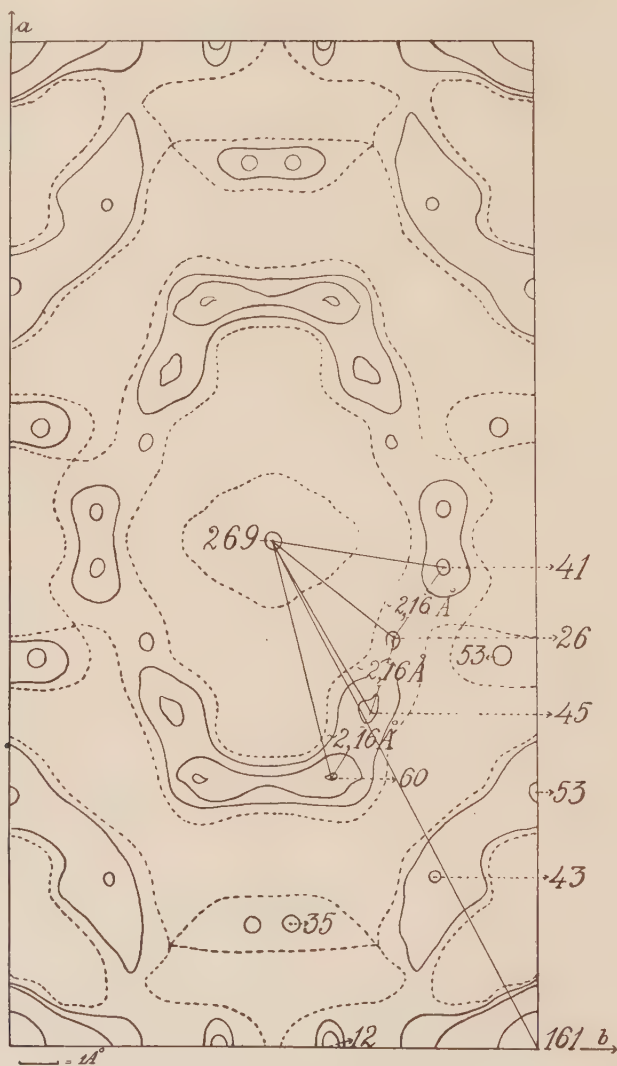


Fig. 2. - Analisi Patterson sul piano (001) eseguita usando i riflessi delle faccie in zona con l'asse c : la loro intensità relativa fu determinata mediante un diagramma Weissenberg considerando anche i riflessi dovuti alla $K\beta$ del rame.

Orbene, per confermare queste previsioni fatte in seguito ad un sommario esame strutturistico, occorre stabilire la posizione dei canali ed il modo esatto col quale la molecola dell'acido desossicolico si dispone nella cella elementare per dar luogo alla loro formazione.

Mi sono servito dell'*analisi Patterson*, che mi ha dato dei buoni risultati nel campo dei triterpeni, anche per gli acidi coleinici⁽¹⁾: all'uopo furono impiegate le riflessioni della zona [001]. Questa zona doveva essere la più adatta a dimostrare l'esattezza della ipotesi fatta. Il risultato dell'analisi è riportato nella fig. 2.

Le linee punteggiate congiungono punti aventi valore zero. Dalla parte dei massimi esse chiudono aree in cui vi sono tutti valori positivi.

Come fu detto in un'altra pubblicazione⁽²⁾, i vettori che congiungono l'origine con i diversi massimi rappresentano la proiezione sul piano *ab* di distanze interatomiche esistenti nella cella elementare.

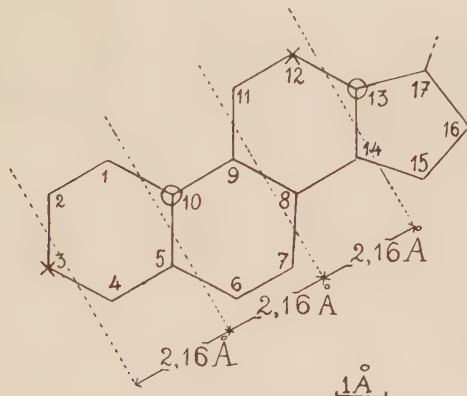


Fig. 3. - Molecola dell'acido desossicolico (senza catena laterale) proiettata sul piano passante per i centri degli atomi 8, 10, 11.

x = Gruppi ossidrilici. o = Gruppi metilici.

Si vede chiaramente che tutti i vettori congiungenti l'origine coi massimi più prossimi, sono maggiori o tutt'al più eguali a 3.7 \AA : è da ritenersi quindi a ragione che essi rappresentino la distanza fra gli atomi della molecola dell'acido desossicolico e quelli della molecola dell'acido grasso, che avrebbe una configurazione filiforme parallela all'asse *c*⁽³⁾.

Il fatto che tutti i massimi sono contenuti in zone positive relativamente strette sta ad indicare che il piano della molecola dell'acido desossicolico è quasi normale al piano *ab*. È da notarsi che la distanza fra i massimi contenuti nella stessa zona positiva corrispondono alle distanze medie che congiungono raggruppamenti atomici nella molecola dell'acido desossicolico come è dimostrato dalla fig. 3.

(1) G. GIACOMELLO, *Industria Saccarifera Italiana*, settembre 1937.

(2) G. GIACOMELLO, *Analisi Patterson e Fourier applicata allo studio della costituzione delle sostanze organiche complesse*. «Pontificia Acc. Sc.», 1938 (in corso di stampa).

(3) Da lavori eseguiti da Robertson e collaboratori, la distanza minima che intercede fra due atomi di carbonio appartenenti a due molecole differenti non è mai inferiore a $3.6-3.7 \text{ \AA}$.

Infine il vettore che congiunge l'origine col massimo 161, rappresenta la distanza fra due molecole di acido grasso, o meglio la distanza fra i loro assi.

Coll'aiuto del modello costruito basandoci sui risultati dell'analisi Patterson e col calcolo di un fattore di struttura approssimato, mi riprometto di eseguire l'analisi Fourier ⁽¹⁾ sul piano *ab* data la presenza di un centro di simmetria.

Tale analisi sarà del massimo interesse poichè ci permetterà di definire per l'acido desossicolico la posizione dei due ossidrili rispetto al piano della molecola e molte altre questioni ancora aperte nella chimica delle sterine.

Geologia. — *La piega dei Monti Lagoni e Libro Aperto nell'Appennino Modenese.* Nota di R. SIGNORINI, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. G. CHECCHIA RISPOLI.

Nell'alto Appennino Modenese la dorsale dei Lagoni e del Libro Aperto, ergentesi a un'altezza poco inferiore ai duemila metri, costituisce una speciale unità tettonica della potente formazione arenacea paleogenica.

Il Libro Aperto ha una forma caratteristica di basto, con due vette: una minore (quota 1806) a SO da cui scende precipite il versante dell'alta Val di Lima; una maggiore a NE (quota 1957) in testa alla valle del Fellicarolo. Tra le due vette una sella disegnata da quattro costoni che scendono rispettivamente da un lato verso ovest e verso NO, dall'altro verso SE e verso est. Lo spartiacque appenninico, che in questa zona non corrisponde alle direttrici tettoniche ma le attraversa spostandosi dalla linea (anche tettonica) Spigolino-Cima Tauffi all'altra Rondinaio-Alpe di San Pellegrino, percorre il costone est che per il Monte Lancino si collega alla Cima Tauffi, e il costone ovest che scende a Monte Maggiore verso il Passo dell'Abetone. Degli altri due costoni quello a SE, chiamato Costa Bronconi, scende a Rivoreta alla confluenza tra la Lima e il suo affluente Rio Maggiore; quello a NO si prolunga rialzandosi nella cresta dei Lagoni (quota 1961). Si prolunga poi ancora degradando attraverso le pendici SO del Cimone dove forma i cocuzzoli di quota 1631 e 1492, finchè si perde immergendosi a Roncodonego sopra a Fiumalbo. Mentre la linea spartiacque corrisponde ai costoni est e ovest, agli altri due costoni disegnanti la sella, quelli NO e SE ultimi descritti, corrisponde la linea tettonica, la piega della massa arenacea, che ha dunque direzione parallela

(1) Per quanto riguarda l'analisi Fourier e Patterson fu fatta altrove una trattazione molto esauriente (ved. nota 2 a p. 107 di questa Memoria).

(2) Nella seduta del 6 febbraio 1938.

alle direttrici generali dell'Appennino Settentrionale e che si allunga da Rivoleta fin sopra a Fiumalbo affiorando per una lunghezza di 7 chilometri.

Tutta questa massa di formazione arenacea è limitata verso NE da una striscia di argilloscisti, in lungo affioramento finora non messo in evidenza, che separa i Lagoni dal gruppo del M. Cimone. Questa striscia si trova in corrispondenza della sella del M. la Piazza e poi verso ovest di una zona dolce tra i cucuzzoli di quota 1638 e 1492 e il fianco del Cimone, riconoscibile direttamente nelle incisioni dei fossi e indirettamente dai caratteri geomorfologici; indi scende a Doccia e nel Rio Pistone sopra a Fiumalbo. Dal M. La Piazza verso SE la striscia degli argilloscisti attraversa la testata della valle de Fellicarolo e per la sella tra il M. Cervinara e il M. Lancino passa nella valle della Lima lungo il fianco destro del Rio Maggiore. Questa zona scistosa, di materiale vario per lo più molto tormentato e rotto, è costituita da scisti scuri uniti a scisti cinerei e giallicci, da scisti rossi, da scisti bruni o plumbei lucidi, da frammenti di arenarie e blocchi di calcare alberese. Un'altra zona scistosa analoga fiancheggia il versante SO dei Lagoni: essa è costituita da scisti rossi e verdastri, marnoscisti grigi, scisti bruni farciti, blocchi di calcare alberese spesso con patine lucide; ha inizio nel circo di testa della valle della Lima e dal Passo dell'Abetone scende lungo il fianco destro della valle delle Motte fino a Fiumalbo.

Poichè le striscie scistose corrispondono a zone morfologicamente depresse (selle, valli) per la maggior facilità di erosione rispetto alle arenarie, il rilievo morfologico del gruppo montuoso in oggetto ben corrisponde con l'area di affioramento dell'arenaria, negli stessi limiti. E vi corrisponde altresì un'unità tettonica: una piega che presenta un interesse notevole per la sua posizione e i suoi rapporti rispetto alle zone adiacenti. Questa piega sorge infatti tra due ampie zone a struttura diversa: una più interna, grande monoclinale del macigno che si appoggia sul nucleo mesozoico affiorante nella Val di Lima e si sviluppa con grande potenza, costituendo la catena dei monti Rondinaio, Tre Potenze, Caligi, con generale pendenza degli strati verso NE in posizione normale; l'altra più esterna, fascio di pieghe rovesciate a NE, quindi con strati inclinati prevalentemente a SO al contrario della prima, dei gruppi dei monti Cimone e Cima Tauffi fino al bordo della grande distesa delle argille scagliose emiliane sulla linea Montecreto-Sestola-Fanano. Sulla determinazione della struttura di questa piega interposta si basa l'interpretazione dei rapporti tra le due grandi zone tettoniche.

Esaminando la zona montuosa dei Lagoni e del Libro Aperto, prima di tutto colpisce la vista una potente pila regolare di strati inclinati a NE che ne costituisce la parte più alta e che mostrando nude pareti rocciose tutte stratificate in testata sul versante SO, sembra essere il motivo fondamentale di questo gruppo montuoso. E ciò spiega come questo sia stato talora ritenuto appartenere, insieme col gruppo del Cimone, a una forma-

zione arenacea superiore, separata dalla formazione arenacea inferiore mediante la striscia degli argilloscisti dell'Abetone⁽¹⁾. Infatti il macigno del gruppo delle Tre Potenze (col M. Gomito) inclina a NE andando sotto agli argilloscisti dell'Abetone-Fiumalbo; e la sommità dei Lagoni e del Libro Aperto è costituita in gran parte da strati inclinati pure a NE e quindi apparentemente soprastanti agli stessi argilloscisti.

Con un esame di dettaglio ho trovato invece che nel versante SO di questa dorsale gli strati volgono la loro inclinazione a SO raccordandosi in sinclinale con quelli che scendono dalla dorsale M. Gomito-M. Caligi inclinati a NE. Infatti la grande massa arenacea che costituisce il versante SO del Libro Aperto, eccettuata la parte più alta, presenta strati con pendenza a SO, cioè di faccia. Quel versante è anche inciso profondamente da torrenti con andamento longitudinale od obliquo: come nella Costa Bronconi gli strati sono inclinati a SO, così pure in queste valli si vede l'inclinazione a SO, e costole a leggio tra il Rio della Spelonca e il Rio Botre. Tra il Rio Botre e la Lima poi, nella costola che scende per Casa Seghi e il Poggio del Romito, gli strati divengono quasi pianeggianti o leggermente inclinati a NO. Così pure in fondo alla profonda valle della Lima si trova la stessa formazione del macigno in strati quasi pianeggianti con leggera pendenza a monte: è il fondo della sinclinale che raccorda il versante del Libro Aperto col fianco destro della Val di Lima ove è generale inclinazione a NE. Sinclinale che ha immersione assiale a NO e che quindi si allarga ad abbracciare più a NO gli argilloscisti dell'Abetone. Questi risultano infatti superiori alle arenarie dell'uno e dell'altro fianco. Che gli scisti, i quali all'Abetone e nella valle delle Motte pendono a NE come le sottostanti arenarie del M. Gomito, risalgono sulla fiancata di fronte si può constatare direttamente cercando gli affioramenti che, sia pure raramente, sono visibili nella grande foresta della testa della val di Lima, specialmente nelle incisioni dei torrenti: vi ho trovato in vari punti, soprattutto sulle pendici meridionali e orientali del M. Maggiore, gli scisti grigi o rossi o verdastri sempre con inclinazione a SO. Ciò dà la riprova che gli argilloscisti sono disposti in sinclinale, in continuazione della sinclinale delle sottostanti arenarie che sole emergono più a SE.

Inclinazione a SO ho osservato anche, nelle arenarie, presso al Lago della Risaia (Rio Borgognoni). Infine sulle pendici occidentali del M. Lagoni il T. Acquicciola incide gli strati di macigno inclinati a OSO e immergentisi sotto alla striscia degli scisti di Fiumalbo.

Invece sulla cresta della dorsale Libro Aperto-Lagoni gli strati sono costantemente inclinati a NE, di 25-30°, in posizione normale. Al di là della cresta, sul versante emiliano, l'inclinazione degli strati arenacei che

(1) B. LOTTI, *Geologia della Toscana*. «Mem. descr. della Carta Geol. d'Italia», Vol. XIII, p. 88, 1910; P. PRINCIPI, *Osservazioni intorno alla geologia della catena del Monte Cimone*. «Boll. Soc. Geol. Ital.», 1930.

si immergono sotto alla striscia scistosa verso NE aumenta rapidamente e, là dove l'erosione abbastanza profonda permette di seguirli, si vedono raddrizzarsi e rovesciarsi delineando così la cerniera di una piega anticlinale rovesciata a NE. Così dalla cresta del M. Lagoni gli strati arenacei, pendenti 25° a NE, accrescono gradualmente l'inclinazione: $30-35-40^\circ$, disegnando un arco e immergendosi sotto agli scisti scuri e cinerei che li separano dalle arenarie del M. la Piazza. In prosecuzione, il versante settentrionale del Libro Aperto, più profondamente eroso dalla testa della valle del Fellicarolo, presenta anche una zona a strati arenacei rovesciati, con inclinazione a SO, fiancheggiata dalla zona scistosa pure inclinata a SO che li separa dalle arenarie della Cima Tauffi.

In questa zona scistosa di NE risalta una bancata di calcare biancastro esteriormente, grigio all'interno, intercalato tra scisti bruni rossigni e anche scisti rossi pieni di frammenti di arenaria dura. Questa bancata di calcare alberese si segue da sud del M. la Piazza per la sella del cocuzzolo quota 1761, con inclinazione a NE come i sottostanti strati di arenaria ancora in posizione normale; per il M. Donato (quota 1726); al Pizzo dei Sassi Bianchi (quota 1604) che da essa prende il nome, con pendenza a SO come i soprastanti strati di arenaria, rovesciati; al cocuzzolo quota 1636; fino alla sella sullo spartiacque (presso al cocuzzolo quota 1702) tra M. Cervinara e M. Lancino, dove, sempre inclinata a SO, passa sul versante toscano, scendendo lungo il fianco destro del Rio Maggiore affluente della Lima, sempre tra scisti bruni e rossi soggiacenti agli strati arenacei inclinati a SO della Costa Bronconi. Tale bancata calcarea fa risaltare l'unità e la continuità della zona scistosa e sottolinea, all'esterno, la cerniera anticlinale ribaltata a NE della formazione arenacea.

L'interno della piega ribaltata dei Lagoni appare chiaramente nella profonda incisione del Rio della Cella (che dalla sommità del Cimone scende verso Fiumalbo). Questo infatti presso al suo sbocco nel Rio Acquicciola mostra gli strati arenacei inclinati sui $20-25^\circ$ a SO e a ovest in posizione normale. Più a monte si trova l'arco della cerniera convesso a NE (pendenza a NE, crescente fino alla verticale, indi passante alla pendenza a SO con rovesciamento): vi ho constatato che il senso di sedimentazione è rivolto verso l'esterno dell'arco, confermando l'anticlinalità. Il fascio di strati pendente a NE si erge fino in vetta ai cocuzzoli di quota 1631 e 1492, che la contigua zona degli scisti soprastanti divide dal fianco del M. Cimone.

L'affioramento della formazione arenacea dei Lagoni termina poco a NO di tale sezione, poichè in quella direzione la piega si immerge assialmente sotto agli scisti di Doccia e del Rio Pistone, ove si riuniscono così le due zone scistose che fiancheggiano le due gambe dell'anticlinale arenacea.

Nella parte mediana della piega Lagoni-Libro Aperto, più fortemente sollevata, il ripido fianco SO della cresta, a strati in testata inclinati a

NE, sovraincombe una zona depressa, ingombra di detriti e di bosco, nella quale non appare spazio sufficiente per lo sviluppo completo della gamba SO della piega: ritengo probabile che questa gamba sia abbassata da una faglia in corrispondenza con la parte più spinta e sopraelevata della piega; tale tipo di struttura è molto frequente in Toscana.

In conclusione la dorsale dei monti Lagoni e Libro Aperto è costituita da una piega anticlinale rovesciata a NE, il cui fianco superiore, normale, inclinato a SO, si raccorda senza discontinuità con la monoclinale arenacea del gruppo dell'Alpe delle Tre Potenze (macigno poggiante con strati basali nummulitici sopra al Mesozoico della media Val di Lima), mediante una dolce sinclinale corrispondente al tronco più alto della Lima (a monte di Rivoreta). L'asse di questa sinclinale si immerge verso NO e in questa direzione vi compare, sopra alle arenarie, una formazione di scisti grigi, bruni e rossi, che si sviluppa sulla cresta Abetone-M. Maggiore e nella valle delle Motte fino a Fiumalbo.

Presso alla cerniera della piega anticlinale gli strati inclinano a NE, in posizione normale; e un forte pacco con tale pendenza costituisce tutta la cresta del M. Lagoni e la sommità del Libro Aperto con appariscenti ripidi fianchi di testata sul versante SO. Più a NE gli strati arenacei si immergono raddrizzandosi e si rovesciano, e lungo tale bordo ribaltato della formazione arenacea si segue con continuità una nuova zona scistosa, in stretta sinclinale per lo più rovesciata insieme con le arenarie e spiegazzata e rotta. Questa zona scistosa separa la piega del Libro Aperto-M. Lagoni dal gruppo del M. Cimone e della Cima Tauffi che si estende a SE nel gruppo del Corno alle Scale e a NE fino al margine della distesa delle argille scagliose emiliane. Questo gruppo più esterno è costituito da formazione arenacea a pieghe ribaltate verso NE analogamente alla piega del Libro Aperto e come quest'ultima immergentesi sotto agli scisti varicolori, con materiale frammentario vario arenaceo e calcareo, che compaiono pure in sinclinali, più o meno pressate e fracassate, tra le pieghe stesse. In questo gruppo è stata identificata in varie località (Lago Scaffaiolo, Cima Tauffi, Fellicarolo, Canevare, bordo Rocca Corneta-Fanano-Sestola-Montecreto) una fauna oligocenica ⁽¹⁾, e il complesso litologico è alquanto diverso nell'insieme dal macigno, più interno, del gruppo delle Tre Potenze. Tuttavia non è possibile tracciare un limite netto, una netta distinzione. Sembra piuttosto trattarsi di un'unica formazione arenacea comprensiva, di cui affiorano termini tanto più recenti quanto più si procede verso NE. Uno studio

(1) D. PANTANELLI, *Sopra un piano del Nummulitico superiore nell'Appennino Modenese*. «Atti Soc. Nat.», Modena, 1893; D. PANTANELLI, *Sull'estensione dell'Oligocene nell'Appennino Settentrionale*. «Atti Soc. Nat. e Matem.», Modena, 1911; A. SILVESTRI, *Fossili rari o nuovi in formazioni del Paleogene*. «Boll. Soc. Geol. Ital.», 1920; P. PRINCIPI, *Osservazioni intorno alla geologia della catena del Monte Cimone*. «Boll. Soc. Geol. Ital.», 1930.

micropaleontologico dettagliato e sistematico potrebbe fornire importanti dati al riguardo.

Intanto le accennate osservazioni hanno potuto stabilire che tra la grande zona monoclinale (strati inclinati a NE) del macigno fondamentale e la prima piega della zona più esterna a pieghe rovesciate a NE (strati inclinati prevalentemente a SO) vi è continuità degli strati e raccordo mediante sinclinale regolare, e non si tratta già di due formazioni arenacee una (eocenica) sottostante e l'altra (oligocenica) soprastante alla formazione scistosa separatrice: quest'ultima è in realtà sempre superiore alla formazione arenacea e rimane soprattutto nelle sinclinali tra le pieghe della formazione arenacea stessa.

Pedologia. — *Intorno all'origine di alcune terre bianche della Valle del Nestore (Umbria).* Nota di P. PRINCIPI, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. A. PELLOUX.

Lungo la Valle del Nestore a sud del Lago Trasimeno si presentano assai estesi i depositi fluvio-lacustri del Villafranchiano, costituiti da argille, sabbie e ciottoli; le prime prevalgono nella parte inferiore della formazione, mentre le sabbie ed i ciottoli costituiscono essenzialmente la parte superiore di essa. I terreni agrari, che si originano su tali rocce, sono del tipo delle *terre brune*, marnoso-calcarei, argillosi o sabbiosi a seconda della natura del substrato⁽²⁾. Ma lungo la sinistra della Valle e precisamente a nord di Palazzetta in corrispondenza del Vocabolo Cerbinaiola appaiono diffuse delle terre bianche (fig. 1), che talora in alcuni punti fanno bruscamente passaggio a terre di colore nero e di estensione assai più limitata.

La zona del Villafranchiano, su cui si riscontrano queste terre bianche, corrisponde ad un bacino lacustre delimitato da arenarie alternanti con scisti marnoso-arenacei e con strati di calcare marnoso o arenaceo con Nummuliti e Lepidocycline dell'Oligocene⁽³⁾, le quali costituiscono i rilievi di Mongiovino ad est, di Panicale a nord e di Missiano ad ovest.

Un profilo verticale scavato a circa duecento metri a NE della casa colonica mostra dall'alto in basso la seguente successione di orizzonti (fig. 2):

- 1° m. 0-m. 0.50, terreno grigiastro alquanto agglomerato.
- 2° m. 0.50-m. 1, calcare terroso di colore bianco o gialliccio.
- 3° m. 1-m. 1.50, argilla grigio-verdastra con molluschi fossili.

(1) Nella seduta del 6 febbraio 1938.

(2) P. PRINCIPI, *I moderni indirizzi della Pedologia con alcune applicazioni allo studio dei terreni agrari dell'Umbria*. «Atti della R. Accademia dei Georgofili», Firenze, 1937.

(3) P. PRINCIPI, *Nuove osservazioni intorno alla presenza dell'Oligocene nell'Italia centrale*. «Memorie della Società Geologica Italiana», I, 1932.

4° m. 1.50-m. 2.70, argilla compatta azzurro-verdastra o grigio-giallastra.

5° m. 2.70-m. 3.20, lignite torbacea di colore nero, mescolata a materiali argillosi.



Fig. 1.



Fig. 2.

L'orizzonte superficiale 1° deriva non solo dalla elaborazione dello strato sottostante, ma riceve anche l'apporto di materiali provenienti dalle rocce marnoso-arenacee dell'Oligocene, che affiora a breve distanza, in modo che tende ad assumere una colorazione grigio-brunastra. Lo scheletro, presente nella proporzione del 200 ‰, risulta costituito da piccoli frammenti o ciottoletti di arenaria micacea e di calcare marnoso, mentre nella terra fina si osservano in prevalenza minutissimi frammenti di gusci di conchiglie e granuli di calcite, a cui si associano altri granuli di quarzo, di feldespati, quasi sempre torbidi per alterazione, di pirosseni (diopside?), di anatasio, di epidoto, laminette di biotite e di clorite e concrezioni limonitiche a forma di sferette del diametro di mm. 0.5-1. Il valore del P_H è di 7.4.

L'orizzonte 2° si presenta generalmente alquanto incoerente, terroso o addirittura farinaceo, di colore bianco o bianco-giallastro e risulta per la massima parte da un finissimo detrito di conchiglie di molluschi, ridotte per lo più in polvere sottile. Al microscopio si osservano anche granuli di quarzo, di pirosseno, laminette bruno-dorate di biotite, romboedri di calcite, concrezioni limonitiche bruno-nerastre, corpicciuoli rotondeggianti di natura calcarea e vari granuli resi opachi da patine limonitiche giallo-brune. In alcuni punti il detrito calcareo appare fortemente cementato ed assume allora l'aspetto di un tufo calcareo.

L'analisi chimica ha dato i seguenti risultati:

Si O ₂	13.21 ‰
Ca CO ₃	84.98 »
Fe ₂ O ₃ + Al ₂ O ₃	1.42 »
Mg CO ₃	tracce
P_H	7.6

L'orizzonte 3° è formato da un'argilla grigia-verdastra piena zeppa di conchiglie fossili lacustri, appartenenti quasi esclusivamente ai generi *Vivipara*, *Melanopsis*, *Unio*; quest'ultimo genere è il più abbondante e rappresentato da individui, che raggiungono dimensioni assai notevoli. L'argilla include scarsissimo materiale sabbioso, rappresentato da granuletti di quarzo, di feldespati, di pirosseni, da laminette di biotite e da minutissime concrezioni sferoidali di natura limonitica. Il valore del P_H è di 7.5.

L'orizzonte 4° risulta, come il precedente, di argilla compatta, ma poverissima di calcare e priva di conchiglie fossili. Vi si riscontrano esigui frammenti di arenaria oligocenica, granuli di quarzo, laminette di biotite e concrezioni limonitiche sferoidali del diametro di mm. 1-2.

L'orizzonte 5° comprende della lignite torbacea di colore nerastro, mescolata a materiale argilloso con qualche raro ciottoletto di arenaria e di calcare marnoso dell'Oligocene.

Il deposito calcareo farinoso dell'orizzonte 2° è, come abbiamo già accennato, il risultato della triturazione delle conchiglie di molluschi, che dovevano particolarmente prosperare in un periodo, in cui le acque del lago villafranchiano erano limpide e tranquille. È anche probabile che i resti di conchiglie presenti nelle argille sottostanti abbiano, in seguito alla asportazione della sostanza argillosa, subito una specie di concentrazione e non può neppure escludersi che alla formazione del sedimento abbiano contribuito certi Rizopodi di acqua dolce, che potrebbero essere rappresentati da quei corpicciuoli rotondeggianti sopra ricordati, ora interi, ora in frammenti e più leggeri della rimanente porzione del materiale calcareo.

La successione di orizzonti descritta attesta come in una prima fase il margine del bacino villafranchiano, con acque pochissimo profonde, era occupato da una flora palustre; in seguito il livello delle acque si innalzò e si estese al di là dei limiti originari e si depositarono così dei fanghi argillosi trascinati dai torrenti, che discendevano dalle pendici sovrastanti. Successivamente le acque diventarono più limpide e tranquille, ospitando in prossimità della spiaggia una ricca fauna di molluschi, le cui conchiglie, in seguito forse a movimenti di correnti, riuscirono ad accumularsi in gran copia, subendo, poi, un intenso processo di triturazione.

Il calcare farinoso affiora pure estesamente senza la presenza di materiali eterogenei ed allora prende origine un terreno agrario di colore bianco, soffice, lievemente agglomerato, privo di scheletro; mentre in alcuni casi, ma per aree limitatissime, anche lo strato di lignite torbacea può, per fenomeni di erosione, costituire l'orizzonte superficiale e si hanno allora delle terre nere, che contrastano nettamente colle precedenti. Queste terre nere presentano una reazione acida ($P_H = 6.2$), contengono sempre una certa quantità di materiale argilloso e scarsissimo scheletro costituito da ciottolotti di arenaria micacea e di calcare marnoso più o meno sfatto. Esse per la loro esigua estensione non offrono grande interesse sia dal punto di vista pedologico che da quello agronomico.

Le terre bianche, generalmente coltivate a grano, sono caratterizzate da una straordinaria ricchezza di carbonato di calcio e grande povertà di sostanze argillose. Esse, mentre tendono facilmente ad incrostarsi alla superficie durante i periodi di siccità prolungata, per il richiamo di correnti capillari ascendenti, durante i periodi normali le acque di pioggia, per il limitato potere assorbente del suolo, trasportano verso il basso una certa quantità di carbonato di calcio e di sesquiossidi di ferro. Tale fenomeno è dimostrato dalla presenza di nuclei cementati a guisa di tufo calcareo nell'orizzonte inferiore e di concrezioni limonitiche sparse nei diversi orizzonti. Una intensa decalcificazione dell'orizzonte superficiale è impedita non solo dalla natura mineralogica di esso, ma anche dalla presenza delle argille degli orizzonti 3° e 4°, che vengono ad ostacolare la rapida eliminazione delle acque superficiali.

Botanica. — *Cariologia dei generi «Aposeris» e «Hyoseris» (Compositae-Cichorieae tribus Cichorinae)*⁽¹⁾. Nota di G. NEGODI, presentata⁽²⁾ dal Socio E. CARANO.

La tribus *Cichorinae* delle *Liguliflorae* (*Cichorieae*) è ancora assai poco nota dal punto di vista cariologico tanto che qualsiasi contributo sull'argomento riesce interessante onde colmare le numerose lacune che in essa vi sono ed onde giungere ad un quadro più completo delle conoscenze in merito.

Come ebbi a riassumere in una mia precedente Nota, le attuali conoscenze vertono su alcune specie del genere *Lapsana* ($n = 6$, $n = 8$, $n = 22$) su *Zacyntha verrucosa* ($n = 3$), *Cichorium Intybus* (con circa $n = 9$) e, dai nostri contributi, sul genere *Hedypnois* (con $n = 8$) e sul genere *Microseris* ($n = 8$)⁽³⁾.

In questa memoria si espongono i risultati di indagini da me fatte su due generi affini: *Aposeris* e *Hyoseris*, di cui il primo monotipico ed il secondo scarso di specie, per quanto in possesso di un certo polimorfismo endospecifico.

Per più tempo, l'unica specie del gen. *Aposeris* e cioè *A. foetida* fu considerata una entità facente parte del genere *Hyoseris*. Essa però giustamente ora viene tenuta staccata come genere a sè ed in questo riguardo anche i caratteri cariologici confermano il significato di questa distinzione.

Aposeris foetida Less. — È specie decisamente europea, distribuita talora in consorzi molto fitti nei boschi e boschetti della regione montana e subalpina delle Alpi, dei monti Illirici e dei Carpazi, costituente per la posizione sistematica isolata nel sistema e per la sua area e stazione, un testimone interessante degli altri monti europei. È specie che costituisce l'unico rappresentante nel genere.

La pianta da cui si trasse il materiale corrisponde perfettamente ai caratteri della specie. Esso venne fissato con il liquido di Carnoy e colorato con l'ematossilina ferrica Heidenhain.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico della R. Università di Modena.

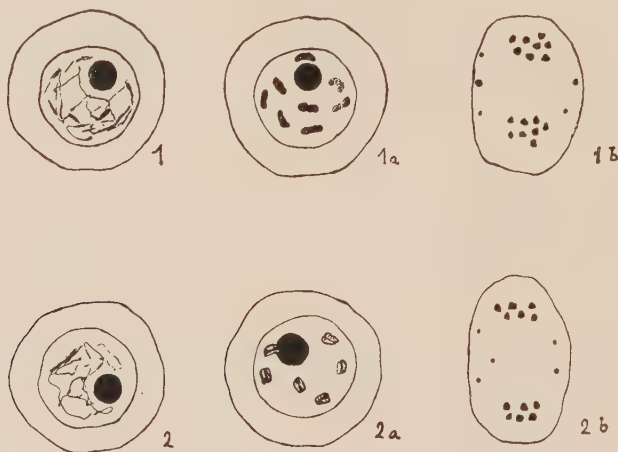
(2) Nella seduta del 9 gennaio 1938.

(3) G. NEGODI, *Reperti cariologici su razze di «Hedypnois globulifera»* Lam. «Archivio Botanico», vol. XII, pp. 82-90, 1936; Id., *Primi reperti cariologici sul genere «Microseris»* D. Don. «Atti Soc. Nat. e Matem. di Modena», vol. LXVII, 1936; Id., *Reperti cariologici su Fanerogame*. «Atti Soc. Nat. e Matem. di Modena», vol. LXVII, 1935.

Cariologia. — Il sacco pollinico si presenta allungato e piuttosto ristretto senza tuttavia essere decisamente leptocelomico in quanto nella sezione trasversa compaiono sempre due cellule madri.

La microsporogenesi si presentò regolarissima nel materiale da me avuto in esame.

La grandezza delle cellule madri del polline in *synapsis* ed anche nelle diacinesi (non vi sono in queste due fasi delle differenze sostanziali) è la seguente: cellula diam. 14 μ ; nucleo diam. 9 μ , nucleolo diam. 3 μ . Il rapporto nucleo nucleolare (N/n) è quindi 3.



Aposeris foetida: 1, cellula madre delle microspore prima della *synapsis*; 1 a, la stessa in diacinesi; 1 b, la stessa in anafase eterotipica.

Hyoseris radiata: 2, cellula madre delle microspore prima della *synapsis*; 2 a, la stessa in diacinesi; 2 b, la stessa in anafase eterotipica.

Il numero di cromosomi rilevato nelle diacinesi e nelle anafasi etero- ed omeotipiche è $n = 8$. I cromosomi sono tra loro simili, allungati nelle diacinesi precoci, in seguito si raccorciano notevolmente e nelle metafasi hanno forma rotondato-poliedrica e tali si presentano pure nelle anafasi etero- ed omeotipiche. Già nella metafase e più ancora nella anafase eterotipica è visibile la scissura longitudinale dei singoli cromosomi e quindi è evidente l'esistenza di due cromonemati in ognuno di essi.

Prima della scomparsa del nucleolo, che avviene nel passaggio dalla diacinesi alla metafase, non riscontrai dei rapporti tra nucleo e qualche coppia cromosomica.

Così pure non mi fu dato di colpire nitidi rapporti tra singoli cromosomi e nucleolo durante la sua ricostituzione nella anafase tarda.

Esso però compare presto ed è relativamente voluminoso. In questo riguardo non ho dati per stabilire sicuramente se dei singoli pezzi di esso

si formano in punti distanti e se in seguito vi è una successiva fusione o se si costituisca un solo centro di formazione del nucleolo.

Certo è invece che dalla anafase alla telofase, in parallelo alla comparsa del nucleolo, i cromosomi subiscono una regressione facendosi più piccoli e spezzandosi in minuti frammenti (cromocentri) di cui taluni rimangono anche in seguito ed altri scompaiono, in modo però che il loro numero è generalmente superiore a quello dei cromosomi del nucleo relativo.

Mentre sono assenti dei granuli siderofili citoplasmatici fino alla diacinesi, con la messa a fuso dei cromosomi e la scomparsa del nucleolo appaiono nel citoplasma numerosi nucleoli extranucleari.

Le cellule del tappeto sono indipendenti (tappeto ameboide), e mai si costituisce un vero periplasmodio e non si osservano mai residui di sporo-pollenina sulle loro superficie anche con la loro degenerazione finale.

Hyoseris. — Il genere *Hyoseris* quale è oggi inteso, se considerato nelle grandi specie risulta esserne scarso, in quanto ne contiene tre soltanto (tutte mediterranee), per quanto alcune di esse e soprattutto *H. radiata* L. possa presentare un polimorfismo abbastanza esteso.

È da rimarcare la tendenza all'ingrossamento della parte superiore del pedicello portante l'antodio nella *H. scabra* L. specie affine a *H. radiata*; manifestazione che ricorre polifileticamente anche in altre *Cichoriae* quali alcune forme di *Hedypnois* e nel monotipo *Arnoseris minima*.

Le mie osservazioni vertono su due specie: *H. radiata* L. diffusa in tutta la regione mediterranea e *H. blechnoides* Pomel, propria dell'Algeria ed avente quindi un'area molto più ristretta.

Entrambe le specie sono perenni (l'affine *H. scabra* invece è annua) e possiedono delle particolarità somatiche per grandezza non dissimili, per quanto *H. blechnoides* possieda dei filli più spessi, carnosetti che sono invece fogliacei, sottili, nella *H. radiata*.

Cariologia. — Gli aspetti dell'antera e dei sacchi pollinici sono in entrambe le specie simili a quelli di *Aposeris foetida*.

Per quanto riguarda i caratteri cariologici, le due specie sono tra loro molto simili, sia in ciò che riguarda le grandezze nucleari e nucleolari sia nella grandezza, l'aspetto ed il numero dei cromosomi.

Le cellule madri delle microspore in *synapsis* hanno le seguenti grandezze:

Cellula diam. $13\ \mu$, nucleo diam. $8-9\ \mu$, nucleolo diam. $2.5-3\ \mu$; il rapporto nucleo nucleolare (N/n) è quindi 3 circa.

Entrambe le specie di questo genere possiedono il numero cromosomico aploide eguale a 6, valore da me letto nelle diacinesi e nelle anafasi eterotipiche.

I cromosomi si presentano poliedrici nelle metafasi e tra loro simili, non potei mettere in evidenza particolari relazioni tra qualche cromosoma ed il nucleolo.

Anche in queste due specie come in *Aposeris* la regressione dei cromosomi nella telofase è graduale e porta prima ad una loro riduzione di grandezza ed in seguito ad una polverizzazione in minuti granuli cromatinici che in seguito la più parte scompaiono, ed i residui rimangono come cromocentri.

Dalla metafase in poi vi sono delle granulazioni siderofile citoplasmatiche aventi il carattere di nucleoli extranucleolari.

Il tappeto è di tipo ameboide.

*
* *

Riassumiamo qui le attuali conoscenze sul numero cromosomico delle specie appartenenti alla tribù delle *Cichorinae*.

<i>Hyoseris radiata</i>	$n = 6$	Negodi	1937
» <i>blechnoides</i>	$n = 6$	»	1937
<i>Aposeris foetida</i>	$n = 8$	»	1937
<i>Hedypnois cretica</i>	$n = 8$	»	1935
» <i>monspeliensis</i>	$n = 8$	»	1935
» <i>tubaeformis</i>	$n = 8$	»	1935
<i>Microseris pygmaea</i>	$n = 8$	»	1935
» <i>acuminata</i>	$n = 8$	»	1935
» <i>linearifolia</i>	$n = 8$	»	1935
<i>Lapsana communis</i>	$n = 6$	Tischler	1933
» <i>humilis</i>	$n = 8$	M. Ishikawa	1911, 1916
» <i>apogonoides</i>	$n = 22$	»	»
<i>Zacyntha verrucosa</i>	$n = 3$	Nawaschin	1930
<i>Cichorium intybus</i> circa	$n = 9$	Makowetsky	1929

A parte il valore incerto relativo a *Cichorium*, e quello impari e molto basso di *Zacyntha*, tutte le altre specie finora esaminate hanno il valore di $n = 6$ e $n = 8$, valori decisamente pari.

Ciò potrebbe indiziare che essi rappresentano dei tetraploidi dei valori 3 e 4, dato che il valore 3 è stato sicuramente riscontrato in *Zacyntha*.

La frequenza di questi valori pari potrebbe però stare in relazione a particolari modalità della evoluzione del nucleo, sulla base di sdoppiamenti cromosomici per duplicazioni endocromosomiche, ma in questo gruppo per ora mancano dati per poter sicuramente decidere in merito.

Parassitologia. — *Su alcune fasi del ciclo schizogonico del « Plasmodium gallinaceum » e del « Plasmodium cathemerium ».*
Nota di A. CORRADETTI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio S. BAGLIONI.

Dallo studio di quattro polli infettati con *P. gallinaceum* ho potuto dedurre che in generale si osserva un parallelismo tra infezione nei globuli rossi e infezione delle cellule endoteliali dei capillari cerebrali: infatti a un'infezione più o meno intensa nei primi corrisponde un'infezione di pari grado nelle seconde.

Studiando la morfologia delle forme schizogoniche del *P. gallinaceum* nel sangue circolante si osserva che nei globuli rossi ciascuna rosetta forma in genere 16 merozoiti e talvolta di più. Difficilmente però ciascuna rosetta riesce a produrre il numero massimo di merozoiti, poichè nel *P. gallinaceum* si verifica normalmente un'infezione multipla del medesimo globulo rosso da parte di 3-4 merozoiti diversi, ciascuno dei quali prosegue normalmente nel suo sviluppo.

Nelle forme schizogoniche apigmentate delle cellule endoteliali dei capillari cerebrali si osserva un numero enorme di merozoiti. Non è facile determinare se tutti i merozoiti presenti in una cellula endoteliale dei capillari cerebrali sieno derivati dalla divisione di un unico merozoita penetrato nella cellula stessa o se si verifichi un'infezione multipla analoga a quella che si riscontra nei globuli rossi.

Poichè tanto le forme del sangue quanto quelle delle cellule endoteliali dei capillari cerebrali compaiono dopo trasmissione dell'infezione mediante inoculazione di sangue, si deve dedurre che i due cicli schizogonici derivino da merozoiti della stessa natura.

Naturalmente uno o più merozoiti che penetrino in un globulo rosso hanno a disposizione per il loro accrescimento e sviluppo materiali di quantità minore a quelli trovati da uno o più merozoiti che penetrino in una cellula endoteliale dei capillari cerebrali. Quindi il numero totale dei merozoiti che può prodursi in questo secondo caso è proporzionalmente superiore. Si spiega così la diversa morfologia assunta nelle diverse cellule da forme schizogoniche derivate da merozoiti della stessa natura.

Nelle cellule endoteliali dei capillari cerebrali non si nota alcuna forma di sviluppo di gametociti, per cui si può dedurre che i merozoiti al momento

(1) Nella seduta del 6 febbraio 1938.

della penetrazione nelle cellule siano ancora indifferenziati e abbiano necessità di materiale emoglobinico per potersi evolvere in gametociti, oppure che i merozoiti destinati a divenire gametociti non penetrino nelle cellule dei tessuti o penetratevi non vi si sviluppino.

Su alcuni preparati di *P. cathemerium* inviati da KIKUTH all'Istituto di Sanità Pubblica di Roma ho potuto stabilire che le cellule ospiti di forme schizogoniche apigmentate nel fegato milza e reni di canarini infetti con *P. cathemerium* appartengono alla categoria dei macrofagi e dei monociti.

Fisiologia. — *Sul meccanismo dell'epilessia sperimentale riflessa per stimoli luminosi*⁽¹⁾. Nota di E. FULCHIGNONI, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. C. CIACCIO.

È ormai ben noto il fenomeno, studiato e descritto nel cane da G. Amantea⁽³⁾, della *epilessia sperimentale da eccitamenti afferenti*: l'applicazione di stricnina su un determinato centro sensitivo-motore corticale (del giro sigmoideo) provoca l'iperestesia di una determinata zona cutanea controlaterale, con esso funzionalmente connessa; la stimolazione artificiale di questa determina l'insorgenza, in via riflessa, di contrazioni cloniche del muscolo, o del gruppo muscolare, dal centro dipendente; successivamente la stimolazione artificiale della zona cutanea riflessogena favorisce l'aumento di frequenza e di intensità del clono muscolare, la trasformazione e la diffusione delle scosse, l'evoluzione di accessi epilettiformi, partenti dai muscoli in clono. Ciò si ottiene però solo in alcuni animali spontaneamente disposti al fenomeno, mentre negli altri (non predisposti) non è mai possibile ottenere nelle ordinarie condizioni l'aumento di frequenza delle scosse cloniche nè lo scoppio consecutivo dell'accesso.

Dopo queste fondamentali osservazioni di G. Amantea, furono oggetto di indagine, da parte di A. Clementi, gli effetti della stimolazione degli organi di senso superiori dopo stricninizzazione delle corrispondenti sfere sensoriali della corteccia cerebrale. Le prime indagini vennero eseguite sulla corteccia sensoriale visiva⁽⁴⁾, ed i risultati conseguiti (e le relative conclusioni) possono essere così riassunti:

1° Si può provocare un accesso epilettico generalizzato (in cani non narcotizzati) per stricninizzazione diretta e circoscritta di vari punti della

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia della R. Università di Messina.

(2) Nella seduta del 6 febbraio 1938.

(3) G. AMANTEA, « Arch. ital. di Biol. », 1915, 63, 143.

(4) A. CLEMENTI, « Arch. di Fisiol. », 1929, 3, 388.

superficie corticale di un lobo occipitale (giro spleniale posteriore, terzo posteriore del giro sopraspleniale, giro entolaterale della prima circonvoluzione; terzo posteriore del giro ectolaterale e del giro soprasilvio della II circonvoluzione) se contemporaneamente forti e prolungate stimolazioni luminose vengono portate sulle due retine.

L'accesso si inizia con movimenti clonico-tonici dei muscoli dell'organo della vista, del lato opposto all'emisfero stricninizzato.

2° La stricninizzazione della corteccia occipitale non provoca il caratteristico clono muscolare spontaneo, che si osserva per stricninizzazione della zona sensitivo-motrice.

3° Stimoli diversi da quelli luminosi non sarebbero atti a provocare l'epilessia riflessa con le modalità qui descritte.

Pertanto il Clementi pensava potersi riconoscere una doppia natura, sensoriale e motoria, ai centri visivi occipitali, nonchè la capacità di rivelarsi, nelle opportune condizioni sperimentali (come quelli sensitivo-motori della zona sigmoidea), *epilettogeni*.

Ad analoghe conclusioni pervenne il Clementi dopo stricninizzazione delle altre aree sensoriali della corteccia cerebrale: l'uditiva, l'olfattiva, la gustativa ⁽¹⁾.

Tuttavia, alcune delle osservazioni di questo Autore potevano autorizzare l'ipotesi che l'epilessia da stricninizzazione delle zone sensoriali avesse uno svolgimento sostanzialmente diverso da quella descritta da G. Amantea (per stricninizzazione della corteccia sensitivo-motrice):

a) Mentre in quest'ultimo caso gli accessi si ottengono solo in una categoria di cani costituzionalmente disposti, e mai negli altri, dopo stricninizzazione delle aree sensoriali il Clementi ottenne sempre, in tutti i cani, accessi epilettiformi riflessi;

b) mentre nelle esperienze di G. Amantea gli accessi avevano inizio da un gruppo muscolare ben determinato, cioè da quello corrispondente al centro sigmoideo stricninizzato, ed erano sempre preceduti dal clono di esso, nelle esperienze di A. Clementi gli accessi non erano preceduti dalle medesime scosse cloniche ed inoltre non sempre si iniziavano da un preciso e ben determinato gruppo muscolare, presumibilmente connesso col centro stricninizzato.

L'indagine del preciso meccanismo degli accessi epilettiformi per stricninizzazione delle sfere corticali sensoriali e la precisazione dei limiti dell'analisi col fenomeno di Amantea imponevano dunque ulteriori ricerche sperimentali.

Sperimentando sulla corteccia occipitale del cane ottenemmo risultati che ci sembrano degni di comunicazione.

(1) A. CLEMENTI, « Arch. di Fisiol. », 1929, 27, 488; « Boll. Soc. Ital. Biol. sper. », 1929, 4, 934; *Scritti in onore del prof. Gallerani*, Tip. Guggiani, Roma, 1935.

Uno dei risultati più notevoli delle nostre esperienze fu la localizzazione, sulla corteccia occipitale degli emisferi cerebrali del cane, di un punto — situato tra il giro sopraspleniale, il giro spleniale posteriore e il giro ectolaterale — la stricninizzazione del quale si dimostrò elettivamente atta a favorire (come nel caso dei centri sigmoidei) la comparsa del clono muscolare e spesso l'insorgenza di accessi epilettiformi. La stricninizzazione di altro punto della corteccia occipitale, anche solo di poco discosto dal precedente, diede invece risultati negativi.

In tutti gli animali ottenemmo sempre, per effetto di quella stricninizzazione, il clono dell'orbicolare controlaterale; gli accessi epilettiformi si ottennero invece in un numero limitato di animali, e precisamente solo in quelli che risultavano spontaneamente disposti all'epilessia sperimentale da eccitamenti afferenti (per stricninizzazione della corteccia sigmoidea).

La comparsa del clono, l'intensificazione delle scosse, la trasformazione e la diffusione di esse fino allo scoppio dell'accesso convulsivo generalizzato, furono evidentemente favorite dalla forte illuminazione dell'occhio controlaterale. Ma la medesima efficacia dimostrarono pure le stimolazioni tattili e meccaniche della cute della faccia circostante l'orbicolare in clono (che presentava, dopo la stricninizzazione occipitale, *evidentemente iperestesica*), cioè di quella zona cutanea che è funzionalmente connessa col centro sigmoideo dell'orbicolare palpebrale. L'importanza di questa zona cutanea nel meccanismo del nostro accesso epilettiforme risultò così notevole, che la stovainizzazione di essa bastò in ogni caso ad impedire l'insorgenza delle convulsioni ed a provocare la scomparsa del clono.

La cloroformizzazione o la distruzione del centro sigmoideo dell'orbicolare non bastarono ad impedire del tutto la provocazione sperimentale degli accessi, se non quando venne associata la distruzione del centro accessorio dell'orbicolare palpebrale, messo in evidenza da A. Rizzo⁽¹⁾ nella zona temporo-parieto-occipitale. In questo caso la stricninizzazione occipitale e la contemporanea illuminazione dell'occhio controlaterale si rivelarono assolutamente inefficaci.

Non vennero mai osservati fenomeni epilettiformi con meccanismo diverso. Anche quando alla stricninizzazione del solito punto della corteccia occipitale venne associata, invece della stimolazione fotica suddetta, quella meccanica (energica e prolungata) di una qualsiasi regione cutanea (cute di uno degli arti posteriori), gli accessi partirono sempre dall'orbicolare palpebrale opposto all'emisfero stricninizzato e vennero annunziati dal clono di esso. Anche quando contemporaneamente si esaltò — a mezzo della stricnina — l'eccitabilità di un altro centro della corrispondente zona corticale sigmoidea (quello degli estensori della zampa anteriore), gli accessi vennero parimenti preceduti dal clono dell'orbicolare e partirono sempre da esso.

(1) A. RIZZO, « Riv. oto-neuro oftalmologica », 1925, 2, 1.

Per questi risultati ci sembra logico ammettere che nelle nostre condizioni sperimentali l'accesso epilettiforme si verificasse col necessario intervento del centro sigmoideo dell'orbicolare (e del centro accessorio di A. Rizzo), nonchè dei relativi organi periferici di senso e di moto: cioè col meccanismo e nella forma descritti da G. Amantea. In altri termini, non sarebbe epilettogeno il centro della zona sensoriale ma invece quello della zona sensitivo-motrice; ed il riflesso, in ultima analisi, avverrebbe per le vie a quest'ultimo centro corrispondente.

In tal caso per spiegare gli effetti della stricninizzazione del centro occipitale e quelli della stimolazione luminosa della retina oculare è necessario invocare fatti di *agevolazione* (o *facilitazione*, o *Bahnung*). Fenomeni di *Bahnung* sarebbero responsabili di quell'esaltamento dell'eccitabilità del centro sigmoideo dell'orbicolare dopo la stricninizzazione della corteccia occipitale.

Se questa ipotesi è esatta, bisogna riconoscere che solo per indiretto intervento le zone corticali sensoriali possono partecipare al meccanismo dell'epilessia riflessa; la zona sensitivo-motrice resta la sola veramente capace di manifestarsi *epilettogena* nelle opportune condizioni sperimentali.

Fisiologia. — *Il fenomeno dell'agevolazione nell'epilessia riflessa da stricninizzazione occipitale, sotto l'azione di stimoli luminosi condizionati* ⁽¹⁾. Nota preliminare di G. MARTINO e E. FULCHIGNONI, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. C. CIACCIO.

G. Martino e A. Alibrandi sono riusciti ad ottenere l'elaborazione, nel cane, del riflesso condizionato dell'ammiccamento per stimoli luminosi. Questo riflesso è posto sotto il dominio di uno dei centri sensitivo-motori del giro sigmoideo (il centro per la contrazione dell'orbicolare palpebrale) e, nella reazione assoluta o *incondizionata*, lo stato attivo di esso viene suscitato dagli eccitamenti centripeti che partono da una determinata e ben nota zona cutanea riflessogena, che con detto centro è funzionalmente connessa. Gli Autori hanno dimostrato che questi eccitamenti afferenti intervengono pure nella reazione *condizionata* per stimoli fotici; che anzi l'intervento di essi è condizione indispensabile per il manifestarsi della reazione associativa: ciò che li ha indotti a sostenere, che l'azione dello stimolo condizionato non consiste nel suscitare lo *stato attivo* del centro, ma piuttosto nell'esaltarne l'*eccitabilità*. In altri termini, gli effetti dell'agente senso-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia umana della R. Università di Messina.

(2) Nella seduta del 6 febbraio 1938.

riale condizionato si ritroverebbero in processi di agevolazione (o facilitazione, o *Bahnung*). Infatti la soppressione degli eccitamenti centripeti, partenti dall'ordinaria zona riflessogena (quella del riflesso assoluto), ottenuta mercè l'energica stovainizzazione della cute, basta ad impedire la comparsa della reazione condizionata ⁽¹⁾. Inoltre, in una serie di recenti osservazioni sperimentali, gli stessi Autori hanno potuto dimostrare che l'eccitabilità faradica del centro sigmoideo dell'orbicolare si eleva, in seguito all'azione dell'agente sensoriale condizionato; e che, sotto l'azione dello stesso agente sensoriale risulta notevolmente agevolata la provocazione del clono riflesso (per stricninizzazione corticale localizzata e circoscritta), nonchè dell'accesso epilettiforme da eccitamenti afferenti ⁽²⁾. Nel riflesso condizionato per stimoli fotici si produrrebbe quindi un collegamento funzionale tra la corteccia sensoriale (occipitale) ed il centro sensitivo-motore del giro sigmoideo: questo collegamento renderebbe possibile appunto il riflesso dell'ammicciamento (per fatti di *Bahnung*). Analogo collegamento funzionale tra le due predette zone corticali è stato ammesso da uno di noi (E. Fulchignoni) nel meccanismo dell'*epilessia riflessa per stimoli luminosi*.

Si riteneva, dopo le ricerche di A. Clementi, che la zona sensoriale visiva della corteccia occipitale del cane si comportasse nell'*epilessia sperimentale riflessa per stimoli luminosi* (cioè dopo diretta stricninizzazione della corteccia occipitale) in modo analogo a quello della sensitivo-motrice del giro sigmoideo; che essa potesse rivelarsi, come questa, epilettogena, nelle adatte condizioni sperimentali. Il Fulchignoni ha potuto localizzare sulla corteccia occipitale degli emisferi cerebrali un *centro*, per la cui stricninizzazione era possibile ottenere (in cani *predisposti*) lo scoppio dell'accesso epilettiforme riflesso da stimoli luminosi. Questo centro è situato tra il giro *sopraspleniale*, il giro *spleniale posteriore* ed il giro *ectolaterale*.

Una serie di risultati sperimentali, ottenuti colla cloroformizzazione o cauterizzazione dei centri del giro sigmoideo o colla stovainizzazione della cute riflessogena, ha inoltre dimostrato che nell'*epilessia da stimoli luminosi* (da stricninizzazione occipitale) necessariamente partecipa il centro sigmoideo dell'orbicolare, cogli organi periferici (di senso e di moto) ad esso corrispondenti; cioè che il *centro riflesso* non è rappresentato dalla corteccia visiva, ma da quella sensitivo-motrice. È precisamente il centro sigmoideo dell'orbicolare palpebrale che dev'essere considerato responsabile dell'accesso epilettiforme per stricninizzazione occipitale (e contemporanea stimolazione della retina oculare). Il riflesso si verifica col medesimo meccanismo come nella *epilessia riflessa* (descritta da G. Amantea) da stricninizzazione della corteccia sigmoidea. Anche nel caso dell'*epilessia sperimentale riflessa da stimoli luminosi*, si verificano dunque processi di *Bahnung*, corrispondenti

(1) G. MARTINO e A. ALIBRANDI, « Boll. Soc. It. Biol. sper. », 11, 763, 1936.

(2) G. MARTINO e A. ALIBRANDI, « Arch. di Fisiol. », 37, 533, 1937.

a quelli descritti da Martino e Alibrandi: corrispondenti collegamenti funzionali tra le medesime zone della corteccia cerebrale (1).

È ovvia allora l'ipotesi, che gli stimoli luminosi *condizionati* (per il riflesso dell'orbicolare palpebrale) possano riuscire ancora più efficaci degli stimoli luminosi *indifferenti* (di pari intensità), per la provocazione dell'accesso epilettiforme da stricninizzazione occipitale: per quelli infatti già esiste un collegamento funzionale tra corteccia occipitale e giro sigmoideo (tra centro sensoriale e centro sensitivo-motore); per quelli è dunque già aperta la via che gli eccitamenti retinici necessariamente devono seguire per ripercuotersi sul centro sigmoideo dell'orbicolare ed elevarne l'eccitabilità. È questa appunto l'ipotesi di lavoro che ha guidato le presenti ricerche.



Fig. 1. — La croce indica l'ubicazione del centro identificato da E. Fulchignoni.

Su di un giovane cane venne esplorata anzitutto la spontanea disposizione all'epilessia sperimentale riflessa (al fenomeno di G. Amantea), dopo stricninizzazione diretta e circoscritta del centro sigmoideo dell'orbicolare. Il cane risultò debolmente predisposto all'epilessia da eccitamenti afferenti.

Successivamente, operatasi la perfetta guarigione della ferita chirurgica, si provocò l'elaborazione di due distinti riflessi condizionati dell'ammicciamento: coll'occhio sinistro per azione d'una lampada rossa, coll'occhio destro per una lampada violetta. L'intensità luminosa delle due lampade colorate era di pari grado. Ottenuti questi due riflessi associativi in forma stabile, si passò allo studio della loro rispettiva efficacia nella provocazione dell'accesso epilettiforme per stricninizzazione occipitale. L'animale venne dapprima operato di craniectomia sull'emisfero di sinistra, e si applicò sul centro identificato da E. Fulchignoni (fig. 1) un dischetto di carta da filtro di

(1) E. FULCHIGNONI, « Riv. di Pat. nerv. e ment. » (in corso di stampa).

3 mm. di diametro, imbevuto di una soluzione di stricnina all'1 %. Si esplorò quindi l'efficacia della luce rossa e della luce violetta per la provocazione di scosse cloniche riflesse dell'orbicolare destro, per l'aumento d'intensità e di frequenza di esse, ed infine per lo scoppio dell'accesso epilettiforme. Per effetto delle ritmiche stimolazioni con luce rossa, comparvero contrazioni dell'orbicolare di sinistra; per azione della luce violetta, contrazioni dell'orbicolare di destra. Queste ultime erano però, già dopo le prime prove, molto più energiche delle prime. Pochi minuti dopo dell'applicazione corticale della stricnina, sotto l'azione della luce violetta, insorsero rapide e fugaci scosse cloniche dell'orbicolare di destra; la cute riflessogena corrispondente al rispettivo centro sigmoideo dell'orbicolare si dimostrava iperestesica, per lievi stimolazioni tattili, in confronto con quella omologa dell'altro lato. Si rinnovò la stricnina sul centro. Le stimolazioni con luce rossa provocavano sempre la normale contrazione riflessa dell'orbicolare sinistro, ma non esercitavano alcun effetto sull'attività dell'orbicolare di destra; invece la stimolazione con luce violetta determinò l'immediata ricomparsa del clono dell'orbicolare destro, con scosse forti e frequenti. Ripetendo la stimolazione ritmica con la luce rossa, si ottennero ritmiche contrazioni dell'orbicolare di sinistra, senza evidenti effetti sull'attività motoria del muscolo di destra; ripetendo le stimolazioni ritmiche con luce violetta, si ottennero energiche contrazioni tonico-cloniche dell'orbicolare di destra, e, successivamente, lo scoppio di un accesso epilettiforme generalizzato e completo.

Dopo un riposo di circa mezz'ora, l'animale venne operato sull'emisfero destro. Dopo l'applicazione della stricnina sul noto centro, si eseguì la solita stimolazione ritmica con la luce rossa e con la luce violetta. Questa volta la luce rossa provocava contrazioni dell'orbicolare di sinistra molto più energiche di quelle provocate (nell'orbicolare di destra) dalla luce violetta.

Poco dopo, la solita illuminazione con la lampada rossa provocò l'insorgenza del clono nell'orbicolare di sinistra. Le luce violetta non parve sostanzialmente modificarne l'intensità nè la frequenza; la rossa, invece, determinò subito lo scoppio di un accesso epilettiforme generalizzato e completo. Alla fine di questo l'animale morì.

Risulta evidente da queste osservazioni la diversa efficacia dei due stimoli luminosi nella provocazione del clono e dell'accesso epilettiforme da stricninizzazione occipitale: infatti lo stimolo *condizionato* si manifestava sempre notevolmente più efficace di quello *indifferente*. L'agevolazione del riflesso sigmoideo risultava nettamente più forte nel primo caso, molto più debole nel secondo. Ciò conferma da un lato le osservazioni e deduzioni di Martino e Alibrandi sul meccanismo del riflesso associativo dell'ammicciamento; d'altro lato anche quelle di E. Fulchignoni sul meccanismo dell'epilessia sperimentale riflessa per stimoli luminosi.

Fisiologia. — *Azione dei vaghi sul metabolismo dei glicidi.* —

I. *Sul comportamento del glicogeno epatico, cardiaco e muscolare in seguito alla vagotomia bilaterale nei colombi* ⁽¹⁾. Nota di V. ZAGAMI, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

È noto che i vaghi esercitano una notevole azione sul metabolismo dei glicidi. Varie sono state le condizioni sperimentali con cui si è cercato di mettere in evidenza questa azione: studiando gli effetti consecutivi alla annullata o esaltata attività dei vaghi, per mezzo del taglio uni- o bilaterale del nervo, o per mezzo di applicazioni su di esso di opportuni anestetici, o per mezzo di stimolazione faradica del nervo integro o del suo moncone centrale o periferico; studiando gli effetti consecutivi alla somministrazione di farmaci vago- o simpaticotropi, nonchè quelli consecutivi alla somministrazione di sostanze ed ormoni ad azione iper- o ipoglicemizzante, comparativamente, in condizioni di normale, esaltata o annullata attività dei vaghi; studiando, infine, sempre comparativamente nelle condizioni sperimentali suddette, l'andamento della secrezione di ormoni (insulina, adrenalina, ecc.) di fondamentale importanza per il metabolismo dei glicidi.

Ma nelle condizioni sperimentali ricordate si è tenuto conto quasi esclusivamente della glicemia e delle sue variazioni quantitative; relativamente poco numerose sono le ricerche, in cui si è tenuto conto anche del comportamento dei glicidi degli organi, come indubbiamente sarebbe convenuto per potere con maggiore precisione interpretare l'argomento in questione.

Forse questo studio unilaterale del problema è la causa principale, per cui non si è arrivati ancora a precisare in modo chiaro e sicuro quale sia effettivamente l'ufficio esercitato dai vaghi sul metabolismo dei glicidi, e, più particolarmente ancora, quale il complesso meccanismo di azione.

Non è nostra intenzione riportare in questa breve Nota tutta la copiosa letteratura esistente in merito; ci limitiamo solo a ricordare le principali ricerche, con le quali si è cercato di studiare, più particolarmente, le variazioni del glicogeno negli organi, connesse con l'attività dei vaghi.

Era già nota, in base ai classici lavori di Cl. Bernard, l'importanza dei pneumogastrici per la regolazione della funzione glicogenica del fegato; ma per quanto concerne il meccanismo di azione, solo più tardi, in seguito alle ri-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica biologica della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 6 febbraio 1938.

cerche dei fratelli A. e E. Cavazzani ⁽¹⁾, di Morat e Dufourt ⁽²⁾, ecc., si poté ritenere come dimostrata la esistenza di nervi, che regolano direttamente la glicogenesi epatica, e si cominciò a parlare di nervi glicosecretori e glicoinibitori.

Arthaud e Butte ⁽³⁾ osservarono nei cani, dopo stimolazione del vago sottodiaframmatico, abbondante produzione di glicosio, che, in seguito, Butte ⁽⁴⁾ attribuì all'influenza esercitata dal vago sulla glicogenesi epatica.

Anche Levene ⁽⁵⁾ nei cani, e Dubois ⁽⁶⁾ nelle marmotte affermarono la esistenza di fibre glicosecretorie nel tronco del vago. Invece Morat e Dufourt ⁽⁷⁾ avendo constatato, che dopo la stimolazione del vago la produzione di glicosio di regola si arrestava, e solo in rari casi presentava aumento, ritennero possibile la esistenza nel vago anche di fibre glicoinibitorie, ad azione ordinariamente prevalente su quelle secretorie.

Ma in merito una serie di importanti e pregevoli indagini è stata condotta nel Laboratorio di Stefani ⁽⁸⁾ dai suoi collaboratori (A. e E. Cavazzani, B. Vasoin, A. Farini, A. Berti, A. Roncato, A. Rossi).

Con adatta tecnica, A. e E. Cavazzani ⁽⁹⁾, nel 1892, dimostrarono, che in seguito alla stimolazione elettrica del plesso celiaco aumentava la percentuale del glicosio nelle vene sopraepatiche, nel mentre diminuiva, in quantità corrispondente, il glicogeno del fegato, e conclusero, che « il plesso celiaco contiene fibre nervose, la cui eccitazione stimola le cellule epatiche, determinando lo svolgimento in esse di un'attività, in virtù della quale il glicogeno accumulato viene trasformato in glucosio ».

Vasoin ⁽¹⁰⁾, nel 1903, mise in evidenza, che nelle rane ibernanti, in seguito al risveglio, prodotto dall'innalzamento rapido della temperatura ambiente, il glicogeno epatico diminuisce in proporzione notevolmente maggiore nelle

(1) A. ed E. CAVAZZANI, *Le funzioni del pancreas ed i loro rapporti colla patogenesi del diabete*. Venezia, Nodari, 1892; *Sulla funzione glicogenica del fegato*. « Ann. di Chim. e Farmacol. », 1894.

(2) J. P. MORAT e DUFOURT, *Les nerfs glycosécréteurs*. « Arch. de Physiol. norm. et path. », 6, 371, 1894.

(3) A. ARTHAUD e L. BUTTE, *Recherches sur les effets produits par la section des vagues au dessus du diaphragme*. « C. R. Soc. Biol. », 1889.

(4) L. BUTTE, *Action du nerf pneumogastrique sur la fonction glycogénique du foie*. « C. R. Soc. Biol. », 45, 166 e 734, 1894.

(5) P. A. LEVENE, *Die Zuckerbildende Funktion des N. Vagus*. « Central f. Physiol. », 8, 337, 1894.

(6) DUBOIS, *Variation du glycogène du foie*. « C. R. Soc. Biol. », 45, 219, 1894.

(7) J. P. MORAT e DUFOURT, *Action du nerf pneumogastrique sur la glycogénèse*. « Arch. de Physiol. norm. et path. », 6, 631, 1894.

(8) A. STEFANI, *Azione dei vaghi sugli scambi e sulla temperatura interna*. « Arch. Fisiol. », 5, 285, 1908; *Nervi regolatori del ricambio*. « Atti R. Acc. Naz. Lincei, Memorie », 12, 255, 1919.

(9) A. e E. CAVAZZANI, loc. cit.

(10) B. VASOIN, *Sul glicogeno epatico delle rane ibernanti e sulle sue modificazioni quantitative in seguito ad un aumento rapido della temperatura nelle rane normali e nelle rane vagotomizzate*. « Lo Sperimentale », 57, 584, 1903.

rane vagotomizzate che nelle normali; e pertanto l'A. conclude, che il vago contiene fibre glicosecretorie.

Gli stessi risultati hanno ottenuto, sempre sperimentando su rane, Farini ⁽¹⁾ nel 1908, e Berti e Roncato ⁽²⁾ nel 1909.

In seguito Roncato ⁽³⁾, sperimentando su conigli, appena sacrificati, a cui stimolava con corrente indotta, per la durata di 30-60' minuti, il moncone periferico del vago destro o sinistro al collo, dopo averlo isolato dal simpatico, ha dimostrato, che, per effetto di tale stimolazione, diminuisce la trasformazione del glicogeno epatico in glicosio, che — come è noto — in un primo tempo dopo la morte dipende da attività delle cellule epatiche sopravvivenenti. Egli pertanto conclude, che il vago spiega un'azione inibitrice sulla glicogenesi epatica, anche *post mortem*, quando la circolazione è sospesa, e quindi il fattore nervoso e l'umorale agiscono sulla glicogenesi epatica indipendentemente l'uno dall'altro.

Rossi ⁽⁴⁾, sperimentando su conigli, a cui tagliava, in due tempi, i vaghi al disotto dell'origine dei laringei inferiori, trovò, che dopo due giorni di digiuno nel fegato di animali vagotomizzati si aveva sempre minore quantità di glicogeno di quella contenuta nel fegato di animali con vaghi integri, parimenti a digiuno da due giorni. Successivamente, lo stesso Autore ⁽⁵⁾ dimostrò, che la glicosuria, che si provoca in via riflessa mediante stimolazione del moncone centrale del vago, si accompagna a diminuzione del glicogeno epatico.

Come si vede, soprattutto dalle ricerche eseguite nel Laboratorio di Stefani, risulta dimostrata l'azione inibitrice diretta del vago sulla mobilitazione del glicogeno epatico.

Le indagini più recenti sono state dirette in ispecial modo a precisare l'eventuale azione dei vaghi sulla secrezione di determinati ormoni. Si è così attribuita ad essi una funzione regolatrice per la secrezione di adrenalina (Tournade, Chabrol e Taditch ⁽⁶⁾, Gutowski ⁽⁷⁾, ecc.), una funzione regola-

(1) A. FARINI, *Sulle variazioni quantitative del glicogeno e delle sostanze albuminose del fegato per la influenza della temperatura e del taglio dei vaghi*. « Atti R. Ist. Veneto di Sc., Lett. ed Arti », 67, 261, 1907-08.

(2) A. BERTI e A. RONCATO, *Ulteriori ricerche sul glicogeno e sul grasso del fegato delle rane vagotomizzate in contributo all'azione del vago sugli scambi*. « Atti R. Ist. Veneto di Sc., Lett. ed Arti », 69, 963, 1909-10.

(3) A. RONCATO, *Rapporti tra la coordinazione nervosa e la coordinazione umorale della funzione glicogenetica del fegato*. « Arch. Fisiol. », 13, 305, 1915.

(4) A. ROSSI, *Influenza del pneumogastrico sulla mobilitazione degli idrati di carbonio del fegato*. « Arch. Fisiol. », 13, 155, 1915.

(5) A. ROSSI, *Azione riflessa del pneumogastrico sulla mobilitazione degli idrati di carbonio del fegato*. « Arch. Fisiol. », 14, 184, 1916.

(6) A. TOURNADE, M. CHABROL e S. TADITCH, *Interventions d'actions vasoconstrictives indépendantes du système nerveux dans la genèse de l'hypertension post-dépressive qui suit l'excitation centrifuge du vague*. « C. R. Soc. Biol. », 89, 879 e 881, 1923.

(7) B. GUTOWSKI, *Rôle des surrénales dans l'hypertension artérielle après l'excitation du bout périphérique du nerf vague*. « C. R. Soc. Biol. », 92, 1000, 1925.

trice per la secrezione di insulina (Britton⁽¹⁾, La Barre⁽²⁾, ecc.), e si comprende agevolmente da ciò quali notevoli perturbazioni possa apportare nel metabolismo dei glicidi una alterata attività dei vaghi.

Non ci risulta, che siano state eseguite indagini col preciso intento di studiare il comportamento del glicogeno nel muscolo cardiaco e nei muscoli scheletrici, in condizioni di modificata o lesa attività dei vaghi. Soltanto di recente Debois⁽³⁾ ha riscontrato nei gatti, in seguito ad iniezione endovenosa di glicosio, forte aumento del glicogeno muscolare negli animali normali, che non si verificherebbe invece nei vagotomizzati.

Poichè la glicopessi muscolare sarebbe condizionata dalla presenza di insulina, l'Autore interpreta tale diverso comportamento ammettendo e convalidando la funzione regolatrice per la secrezione di insulina, che spetterebbe ai vaghi, e che mancherebbe precisamente negli animali vagotomizzati.

Per estendere precedenti nostre esperienze, di cui riferiremo in una prossima Nota, ci era indispensabile conoscere, con sufficiente esattezza, l'ordine e l'entità delle eventuali variazioni quantitative del glicogeno epatico, cardiaco e muscolare, indotte dalla vagotomia, particolarmente nel Colombo; e, dato che la letteratura non ci forniva, da quanto abbiamo visto, esatte e precise notizie al riguardo, si imponeva questo accertamento.

Poichè dalle ricerche eseguite a tale intento sono emersi fatti, a nostro parere, meritevoli di considerazione, intendiamo riassumerli nella presente Nota.

Le esperienze sono state condotte su 28 colombi, divisi in due gruppi. Un primo gruppo (Gruppo I) ci è servito per ricavare i valori normali di confronto, relativi al contenuto in glicogeno del fegato, del cuore, e dei muscoli pettorali, e, a tale scopo, gli animali sono stati sacrificati, in condizioni perfettamente normali, dopo un digiuno di 24, 48 o 96 ore. Un secondo gruppo (Gruppo II) ci è servito per ricavare le variazioni quantitative del glicogeno epatico, cardiaco e muscolare, indotte dalla vagotomia bilaterale, e, a tale scopo, gli animali sono stati sacrificati dopo 24, 48 o 96 ore dall'inizio del digiuno coincidente, in questo caso, colla vagotomia.

Precisamente, ogni gruppo è risultato composto da tre colombi « pavoncelli bianchi », i quali sono stati sacrificati dopo 24 ore dall'inizio del digiuno (Gruppo I), o dall'inizio del digiuno coincidente colla vagotomia (Gruppo II), e da undici colombi « torraioli », di stipiti diversi, di cui sei sono stati sacrificati dopo 24 ore, tre dopo 48 ore e due dopo 96 ore dal-

(1) S. W. BRITTON, *The nervous control of insulin secretion*. « Amer. Journ. Physiol. », 74, 291, 1925.

(2) J. LA BARRE, *Le pneumogastrique, nerf insulino-secreteur*. « Arch. Int. de Physiol. », 29, 238, 1927 e 37, 1, 1933.

(3) G. DEBOIS, *Sur la reconstitution du glycogène musculaire perdu par le travail*. « C. R. Soc. Biol. », 103, 546, 943 e 944, 1930.

l'inizio del digiuno (Gruppo I), o dall'inizio del digiuno coincidente colla vagotomia (Gruppo II).

Abbiamo scelto i colombi per queste esperienze, anzitutto, perchè proprio per questa categoria di animali ci interessava accertare le variazioni quantitative del glicogeno indotte dalla vagotomia, e, in secondo luogo, perchè, come era già noto, e come è stato visto anche recentemente da Moracci ⁽¹⁾ nel nostro Istituto, questi animali, in confronto degli altri, tollerano assai bene la vagotomia bilaterale al collo.

La vagotomia è stata praticata nella parte inferiore del collo. Si eseguiva una incisione postero-mediana dei tegumenti, e con successivo spostamento di essi verso destra e verso sinistra, si individuavano e si isolavano i vaghi, che venivano poi tagliati, asportandone un tratto della lunghezza di 1-2 cm.

Gli animali sono stati sacrificati tutti per dissanguamento, dopo aver prelevato dei campioni di sangue per la determinazione del tasso glicemico, che si è eseguita col micrometodo di Bang. Subito dopo la morte si prelevavano, il più rapidamente possibile, il cuore, il fegato e un tratto dei muscoli pettorali, e, seguendo le modalità di tecnica già in una nostra precedente Nota ⁽²⁾ dettagliatamente descritte, si determinava il contenuto in glicogeno mercè il metodo di Pflüger, combinato con quello di Bang (pel dosaggio dello zucchero riducente ottenuto in seguito all'idrolisi).

Nell'annessa tabella sono riportati i risultati ottenuti.

(1) E. MORACCI, *Sul decorso del digiuno nei colombi normali e vagotomizzati*. «Riv. Pat. Sper.», 10, 434, 1933.

(2) V. ZAGAMI, *Sul contenuto comparativo in glicogeno di varii segmenti del sistema nervoso centrale e di varii organi toracici ed addominali*. «Arch. Fisiol.», 35, 407, 1936.

TABELLA I.

Numero progressivo degli animali	Sesso	Peso corporeo gr.	Razza	Tempo trascorso dall'inizio del digiuno (Gruppo I) o dall'inizio del digiuno e dalla vagotomia (Gruppo II) ore	Glicosio nel sangue gr. %	Glicogeno gr. %			Medie parziali: Glicogeno: gr. %		
						Cuore	Fegato	Muscoli pettorali	Cuore	Fegato	Muscoli pettorali
GRUPPO I. — <i>Colombi normali</i>											
1	♂	355	pavoncelli	24	0.157	0.392	0.312	0.608			
2	♀	270	»	24	0.146	0.361	0.909	0.831			
3	♂	370	»	24	0.150	0.262	0.499	1.194	0.338	0.573	0.877
4	♂	360	torraioli	24	0.146	0.102	0.031	0.753			
5	♀	320	»	24	0.176	0.196	0.060	0.648			
6	♂	460	»	24	0.181	0.141	0.350	0.703			
7	♂	350	»	24	0.157	0.238	0.055	0.469			
8	♂	330	»	24	0.168	0.121	0.751	0.729			
9	♀	330	»	24	0.180	0.136	0.034	0.725	0.155	0.213	0.671
10	♂	290	»	48	0.201	0.101	0.063	0.815			
11	♀	340	»	48	0.160	0.062	0.036	0.474			
12	♀	350	»	48	0.160	0.136	0.014	0.864	0.100	0.037	0.718
13	♂	310	»	96	0.174	0.095	0.098	0.555			
14	♂	315	»	96	0.162	0.125	0.090	0.510	0.108	0.094	0.532
Medie complessive . . .					0.165	0.176	0.235	0.706			

Segue: TABELLA I.

Numero progressivo degli animali	Sesso	Peso corporeo gr.	Razza	Tempo trascorso dall'inizio del digiuno (Gruppo I) o dall'inizio del digiuno e dalla vagotomia (Gruppo II) ore	Glicosio nel sangue gr. %	Glicogeno gr. %			Medie parziali: Glicogeno: gr. %		
						Cuore	Fegato	Muscoli pettorali	Cuore	Fegato	Muscoli pettorali
GRUPPO II. — <i>Colombi vagotomizzati</i>											
1	♀	240	pavoncelli	24	0.191	0.496	2.362	0.054			
2	♂	320	»	24	0.207	0.411	0.241	0.194			
3	♂	380	»	24	0.154	0.646	1.654	0.153	0.518	1.419	0.134
4	♂	450	torraioli	24	0.196	0.135	0.259	0.316			
5	♀	440	»	24	0.168	0.103	0.989	0.182			
6	♂	360	»	24	0.251	0.121	0.139	0.317			
7	♂	340	»	24	0.240	0.190	0.103	0.126			
8	♀	310	»	24	0.250	0.171	0.239	0.187			
9	♂	340	»	24	0.213	0.280	0.076	0.153	0.167	0.300	0.213
10	♂	340	»	48	0.247	0.086	0.163	0.304			
11	♂	315	»	48	0.181	0.134	0.120	0.150			
12	♂	400	»	48	0.261	0.260	0.466	0.210	0.160	0.249	0.221
13	♀	320	»	96	0.244	0.116	1.130	0.101			
14	♀	300	»	96	0.186	0.136	0.166	0.322	0.126	0.648	0.211
Medie complessive . . .					0.213	0.230	0.579	0.197			

Contenuto in glicogeno nel cuore: Nei colombi normali il contenuto in glicogeno nel cuore è risultato di gr. 0.176 %, in media, considerando complessivamente i valori spettanti a tutti i colombi (pavoncelli e torraioli). Medie più alte (gr. 0.338 %) si hanno, considerando separatamente i valori spettanti ai pavoncelli, e medie invece più basse (gr. 0.155 %), considerando separatamente i valori spettanti ai torraioli, sacrificati dopo un corrispondente periodo (24 ore) di digiuno.

Nei vagotomizzati il contenuto in glicogeno nel cuore è risultato di gr. 0.230 %, in media, considerando complessivamente i valori spettanti a tutti i colombi. Anche in questo caso, medie più alte (gr. 0.518 %) si hanno considerando separatamente i valori spettanti ai pavoncelli, e medie più basse (gr. 0.167 %), considerando separatamente i valori spettanti ai torraioli, sacrificati, come i precedenti, dopo 24 ore dalla vagotomia e dall'inizio del digiuno.

Raffrontando le medie complessive, sembra che nei colombi vagotomizzati il contenuto in glicogeno nel cuore sia più elevato, che nei controlli normali (gr. 0.230 % nei primi, e gr. 0.176 % nei secondi), ma in effetti, mentre la differenza è netta ed evidente nei pavoncelli (gr. 0.518 % nei vagotomizzati e gr. 0.338 % nei normali), risalta poco invece nei torraioli (gr. 0.157 % nei vagotomizzati e gr. 0.132 % nei normali).

Contenuto in glicogeno nel fegato: Nei colombi normali il contenuto in glicogeno nel fegato è risultato di gr. 0.235 %, in media, considerando complessivamente tutti gli animali. Come per il cuore, medie più alte (gr. 0.573 %) si hanno considerando a parte i pavoncelli, e medie più basse (gr. 0.213 %) considerando a parte i torraioli, sacrificati, come i precedenti, dopo 24 ore di digiuno.

Nei vagotomizzati, il contenuto in glicogeno nel fegato è risultato di gr. 0.579 %, in media, considerando complessivamente tutti gli animali. Persistono anche qui medie più alte (gr. 1.419 %) nei pavoncelli, e medie più basse (gr. 0.300 %) nei torraioli, vagotomizzati e digiunanti da uno stesso periodo di tempo.

Raffrontando le medie complessive, il contenuto in glicogeno nel fegato appare indubbiamente più elevato nei vagotomizzati (gr. 0.579 %), che nei controlli normali (gr. 0.235 %): tale differenza è netta nei pavoncelli (gr. 1.419 % nei vagotomizzati e gr. 0.573 % nei normali), un po' meno accentuata nei torraioli (gr. 0.350 % nei vagotomizzati, e gr. 0.144 % nei normali).

Contenuto in glicogeno nei muscoli pettorali: Nei colombi normali il contenuto in glicogeno nei muscoli pettorali è risultato di gr. 0.706 %, in media, considerando tutti gli animali; di gr. 0.877 % considerando solo i pavoncelli; e di gr. 0.671 % considerando solo i torraioli a digiuno, al pari dei pavoncelli, da 24 ore.

Nei vagotomizzati, il contenuto in glicogeno nei muscoli pettorali è risultato di gr. 0.197 %, in media, considerando tutti gli animali; di

gr. 0.134 % considerando solo i pavoncelli; e di gr. 0.213 % considerando solo i torraioli, a digiuno e vagotomizzati, al pari dei precedenti, da 24 ore.

Raffrontando le medie complessive, il contenuto in glicogeno nei muscoli pettorali appare nettamente inferiore nei vagotomizzati (gr. 0.197 %, in media) rispetto ai controlli normali (gr. 0.706 %, in media). Come sempre, la differenza è più marcata nei pavoncelli (gr. 0.134 % nei vagotomizzati, e gr. 0.877 % nei normali), che nei torraioli (gr. 0.215 % nei vagotomizzati e gr. 0.659 % nei normali).

Riassumendo e concludendo adunque, nei colombi « pavoncelli bianchi », dopo 24 ore di digiuno, il contenuto in glicogeno nel cuore, nel fegato e nei muscoli pettorali, è risultato nettamente più elevato, che nei comuni colombi « torraioli », a digiuno da un corrispondente periodo di tempo.

Nei colombi vagotomizzati da 24 a 96 ore, in confronto coi normali, pari essendo tutte le altre condizioni sperimentali, compreso il periodo di digiuno subito, è risultato un contenuto in glicogeno lievemente più alto nel cuore, sensibilmente più alto nel fegato, e nettamente più basso nei muscoli pettorali.

Queste differenze, tra colombi normali e colombi vagotomizzati, si sono manifestate più nette nei colombi pavoncelli che nei colombi torraioli.

Dare una interpretazione di questi fatti sarebbe ora prematuro: ci riserviamo perciò di discuterli insieme con i risultati, che emergeranno dalle esperienze che si impongono e ci proponiamo di istituire a seguito delle presenti.

Fisiologia. — *Ricerche su un ciclo di modificazioni istologiche della tiroide di ratto albino maschio.* Nota di T. PERRI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Corrisp. BAGLIONI presenta il secondo volume dei suoi « Elementi di Fisiologia umana » e un fascicolo della Rivista da lui diretta « Il problema alimentare » e parla di ambedue le pubblicazioni.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Il Presidente sen. MILLOSEVICH, a nome del Corrisp. ALOISI, presenta, per l'inserzione nelle Memorie Accademiche, lo studio del dott. Probo Comucci dal titolo: « Le rocce raccolte dalla spedizione geografica italiana al Karakorum (1929-VII) ».

Presentano Note per l'inserzione nei Rendiconti i Soci: BAGLIONI, BOMPIANI, LEVI-CIVITA, SEVERI.

PRESENTAZIONE DI PLICHI SUGGELLATI

Il Presidente sen. MILLOSEVICH comunica che sono pervenuti due plichi suggellati inviati rispettivamente dal prof. Guido Cremonese e dal dott. Filiberto Garofali. Tali plichi saranno conservati negli archivi dell'Accademia secondo le norme consuete.

PREMI IN CORSO D'ASSEGNAZIONE
PRESSO LA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ELENCHI DEI CONCORRENTI

PREMIO REALE PER LA *FISICA*

(Scadenza 31 dicembre 1937 — Premio lire 10.000).

AYÒ ANGELO. — 1. « Teoria dell'energia e termochimica » (ms.).

PREMIO MINISTERIALE PER LE *SCIENZE MATEMATICHE*

(Premio lire 4.000 — Scadenza 31 dicembre 1937) .

1. AGOSTINELLI CATALDO. — 1. « Sopra alcuni integrali particolari delle equazioni del moto di un corpo rigido pesante, intorno a un punto fisso ». — 2. « Sopra alcuni problemi di idromeccanica piana, nei quali il campo rappresentativo dei vettori velocità delle particelle liquide è un settore di corona circolare ». — 3. « Corrente traslocircolatoria piana che investe un profilo rigido ipocicloidale girevole intorno al suo centro ». — 4. « Sul moto piano generato da una sorgente liquida poste nel vertice di una spezzata rigida bilatera ». — 5. « Moto liquido piano generato da una doppietta posta nel vertice di una spezzata rigida bilatera ». — 6. « Sopra la ripartizione delle acque di una sorgente piana ». — 7. « Sopra la ripartizione delle acque di una sorgente liquida piana ». — 8. « Moto liquido piano generato da una sorgente e da un pozzo addossati a pareti rigide ». — 9. « Moto generato da una sorgente liquida piana addossata a un profilo rigido rettilineo con formazione di vortici ». — 10. « Sul vortice elicoidale ». — 11. « Sopra alcuni notevoli moti fluidi vorticosi ». — 12. « Sui sistemi dinamici di masse variabili ». — 13. « Sopra l'integrazione per separazione di variabili dell'equazione dinamica di Hamilton-Jacobi ». — 14. « Sulle equazioni di Hamilton-Jacobi ». — 15. « Sui sistemi dinamici corrispondenti ». — 16. « Risoluzione per un campo circolare o sferico di un problema più generale di quello di Dirichlet ». — 17. « Risoluzione mediante integrali definiti dell'equazione differenziale ecc. ».

2. BOTTO COSTANTINO. — 1. « Un interessante problema di minimo ». — 2. « Il matematico Giuseppe Peano ». — 2. bis. « Nota sull'asteroide e su una questione da risolvere ». — 3. « Novo resolutione graphico de oequationes de tertio gradu ». — 4. « Un insigne fisico piemontese del '700 poco conosciuto dagli Italiani ». — 5. « Nuovo procedimento numerico per trovare le soluzioni di qualunque equazione di terzo grado ». — 6. « Giuseppe Luigi Lagrangia nel 2º centenario della nascita ». — 7. « La celebrazione di Lagrangia ». — 8. « Sopra una superficie d'area minima collegata ad un fascio di particolari coniche sferiche ». — 9. « Alcuni manoscritti (quattro) (vedi descrizione nel testo della domanda), contrassegnati con le lettere *A*, *B*, *C*, *D* ».

3. CHIELLINI ARMANDO. — 1. « Alcune ricerche sopra le equazioni differenziali lineari omogenee ». — 2. « Sulle funzioni aventi la stessa derivata e la cui differenza non è costante ». — 3. « Applicazione della teoria degli invarianti differenziali lineari alla integrazione delle equazioni differenziali lineari del terzo ordine ». — 4. « Sulla riduzione di un'equazione differenziale lineare omogenea alla forma ridotta di Laguerre-Forsyth » (ms.). — 5. « Sopra una proprietà funzionale delle coniche ».

4. GIULOTTO VIRGILIO. — 1. « Sopra un sistema di relazioni ricorrenti al quale soddisfano le funzioni cilindriche » (2 copie). — 2. « Funzioni di Bessel del campo poliarmonico » (2 copie).

5. MESSINEO ZENIA. — 1. « Curve affini a curve di Mannheim relative ad una parabola » (ms.). — 2. « Altra genesi della trisettrice del Mac-Laurin - Suo studio particolare » (ms.).

6. NICOTRA SALVATORE. — « Sulla costruzione d'una particolare funzione e sue applicazioni in idrodinamica ».

7. PLATONE GIULIO. — 1. « Su una disuguaglianza integrale ». — 2. « Sui problemi insolubili ». — 3. « Sulla risoluzione approssimata dei sistemi di equazione ». — 4. « Nuovi metodi per la risoluzione approssimata dei sistemi di 2, equazioni ad n incognite » (ms.). — 5. « Il teorema sull'equivalenza nello spazio » (ms.).

8. SCONZO PASQUALE. — 1. « Sopra gli sviluppi di alcuni elementi del moto ellittico ». — 2. « Effetti dinamici dovuti alla traslazione dei continenti ». — 3. « Sulla risoluzione dell'equazione di Kepler ». — 4. « Sul tentativo di spiegare l'avanzo del perielio di Mercurio mediante l'ipotesi di un anello di pianetini intramercuriali ». — 5. « L'avanzo del perielio di Mercurio spiegato con lo schiacciamento del nucleo solare ». — 6. « Nel centenario dell'uso delle rette di altezza in astronomia nautica ». — 7. « Considerazioni teoriche sul problema della determinazione del punto nave » (ms.). — 8. « Sull'effetto dello spostamento dei continenti nella durata della rotazione terrestre » (ms.). — 9. « L'impiego delle curve di altezza in astronomia nautica » (ms.). — 10. « L'uso dei piani idrografici nel tracciamento della retta di altezza » (ms.). *Fuori concorso*: 1. « Ueber eine geschwinde kurze Methode, um die Breite zu bestimmen ». — 2. « Anwendung einer neuen Formel bei der photographischen Photometrie ».

9. TOCCHI LUIGI. — 1. « Sopra un criterio di convergenze » (2 copie). — 2. « Sopra una proprietà delle matrici » (2 copie). — 3. « Sopra una semplificazione delle condizioni di Eulero-Sjlvester-Bézout affinché due polinomi abbiano un M. C. D. di dato grado » (2 copie). — 4. « Sulla teoria delle serie doppie » (2 copie).

10. TOSCANO LETTERIO. — 1-2. « Sulla integrazione delle successioni ricorrenti del secondo ordine; lineari ed omogenee ». — 3. « Sulla interpolazione nelle successioni ricorrenti del secondo ordine ». — 4. « Sull'iterazione degli operatori xD E Dx ». — 5. « Risposta alla questione di F. Palatini proposta nella Rubrica Intermediario del Bollettino di Matematica ». 6. « Sulla somma delle potenze dello stesso grado dei primi numeri interi ». — 7. « Una equazione a matrice circolante ». — 8. « Operatori permutabili con la potenza di uno speciale operatore lineare - Nota I^a ». — 9. « Operatori permutabili con la potenza di uno speciale operatore lineare - Nota II^a ». — 10. « Sui coefficienti della tangente e sui numeri di Bernoulli ». — 11. « Operatori lineari e numeri di Stirling generalizzati ». — 12. « Operatori permutabili di secondo ordine ». — 13. « Sulle potenze di una matrice del secondo ordine ». — 14. « Sugli operatori lineari associati ». — 15. « Successioni ricorrenti e polinomi di Bernoulli e di Eulero ». — 16. « Inviluppi di cerchi e podarie di curve piane algebriche ». — 17. « Su alcuni determinanti dedotti da quello di Vandermonde ». — 18. « Sulla somma di alcune serie ». — 19. « Sullo scarto della permutabilità nella teoria degli operatori lineari ». — 20. « L'equazione secolare a matrice circolante ». — 21. « Sugli operatori lineari associati ». — 22. « Relazioni sugli scarti dalla permutabilità nella teoria operatori lineari ». — 23. « Sui determinanti cir-

colanti » (ms.). — 24. « Ricerche algebriche sugli operatori lineari permutabili di secondo ordine e possibilità di applicazioni » (ms.).

33. VIRDIS VIRGILIO. — « Vibrazioni delle ali nei velivoli ».

PREMIO MINISTERIALE PER LE SCIENZE FISICHE

(Premio lire 4.000 — Scadenza 31 dicembre 1937)

1. GIACOMELLI RAFFAELE. — 1. « Il “ De volatu ” di Borelli ». — 2. « Uno sguardo allo sviluppo storico della teoria aerodinamica ». — 3. « Gli scritti di Leonardo Da Vinci sul volo ». — 4. « Juan de la Cierva ». — 5. « Guglielmo Marconi ». — 6. « La voce “ Volo ” estratta dall'*Enciclopedia Italiana* ».

2. SCARDINA MARIANO. — 1. « A proposito dei “ Nuovi gradi assoluti ” del prof. Giuseppe Siboni ». — 2. « Un dispositivo eliminatore dell'aereo ricevente ». — 3. « Un apparecchio interferenziale che mancava ». — 4. « Una semplice dimostrazione della formula della deviazione prismatica ». 5. « Sull'elettroforo di Volta ». — 6. « Influenza della luce sulla emissione termoionica del filamento ad ossido di un diodo “ Zenith 4050 ” ». — 7. « Sulla dilatazione dei liquidi ».

3. UBALDI PIO. — « Esplorazione del sottosuolo con metodi elettrici » (ms.).

PREMIO MINISTERIALE PER LE SCIENZE CHIMICHE

(Scadenza 31 dicembre 1937. — Premi lire 4.000).

1. AUGUSTI SELIM. — 1. « Sui solfocianati doppi di mercurio e cobalto ». — 2. « Studi ed osservazioni sul comportamento dei sali di cromo in analisi ». — 3. « Sui solfocianati doppi di mercurio e cobalto — Nota II ». — 4. « Su di una reazione microchimica del mercurio (mercuroso) ». — 5. « Sui metodi analitici per l'esame dei composti mercurioammonici ». — 6. « Su di una reazione cromatica del catione magnesio ». — 7. « Su di una microreazione cromatica del catione manganese ». — 8. « Sul comportamento dei composti mercurio ammonici con cianuro di potassio ». — 9. « Sul cromato di mercurioammonio ». — 10. « Metodo sistematico per il riconoscimento microchimico dei colori minerali ». — 11. « Su di un metodo rapido e preciso per la determinazione quantitativa del mercurio ». — 12. « Su di una microreazione cromatica del crom. ». — 13. « Sulla ricerca microchimica dello jodioione ». — 14. « Sulla determinazione quantitativa del cloruro mercurio nelle compresse di sublimato corrosivo ». — 15. « Il cloridrato di P-Aminofenolo come reattivo dei cationi rame e ferro ». — 16. « Sulla precipitazione del cromoione $\text{Cr} + + +$ al 3° gruppo in presenza di notevoli quantità di anione ossalico ». — 17. « Metodo sistematico per il riconoscimento microchimico dei colori minerali ». — 18. « Su di un procedimento analitico per la eliminazione degli anioni fosforico, ossalico, fluoridrico, silicico e fluosilicico al 3° gruppo ». — 19. « Su di un nuovo metodo per la determinazione quantitativa del cromo ». — 20. « Sulla precipitazione del cromato di mercurio ammonio in presenza di cloruri alcalini ». — 21. « Sulla formazione dei composti di mercurio ammonio per doppio scambio dal nitrato di mercurio ammonio ». — 22. « Sull'impiego della difenilamina e del carbazolo per il riconoscimento dell'acido ossalico ». — 23. « Applicazioni scientifiche moderne all'esame dei dipinti ». — 24. « Metodo sistematico per il riconoscimento microchimico dei colori minerali ». — 25. « Sulla formazione dei composti di mercurio ammonio per doppio

scambio dal nitrato di mercurio ammonio ». — 26. « Metodo sistematico per il riconoscimento microchimico dei colori minerali ». — 27. « Sulla reazione fra sali rameici ed acido bromidrico e sua utilizzazione per il riconoscimento microchimico del catione rameico ». — 28. « Azione del permanganato potassico sui composti mercurio ammoniacali ». — 29. « Sulla sensibilità delle perle al borace ed al sal di fosforo per il riconoscimento di alcuni cationi ». — 30. « Sul riconoscimento microchimico del catione rameico con ammoniaca, con acido tartarico e glucosio, con ferrocianuro potassico e con ferrocianuro potassico in presenza di ammoniaca ».

2. BRUNI GIORDANO. — « La cinetica della trasformazione allotropica di zolfo amorfo » (2 copie).

3. COSIANTINI BRUNO. — « Analisi industriale di Bauxite ».

4. FRENGUELLI BERNARDINO. — 1. « La nefelometria applicata ai vini ». — 2. « Contributo allo studio sulla mobilizzazione della potassa leucitica ». — 3. « Su alcuni derivati naftalinici ». — 4. « Ricerche sulla saccarificazione delle sanse esauste » (m. s.).

5. LODI GIULIO. — « Il manganese in alcuni grani italiani » (3 copie).

6. MACCHIA OSVALDO. — 1. « Ricerche sul comportamento delle superfici interne delle bocche da fuoco cromate e nitrurate ». — 2. « Gli spessori dei depositi elettrolitici e loro determinazione ». — 3. « Ricerche sulla protezione fosfatica del ferro ottenuta con fosfati biacidi di zinco, ferro, manganese ». — 4. « La protezione fosfatica dei metalli ferrosi » (m. s.). *Fuori concorso*: 1. « Geschichte des Phosphatrostschutzes » — 2. « Die mangelhaften Phosphatüberzüge, deren Ursachen und Abhilfe ».

7. MASSARA GIOVANNA. — « Azione dell'acido bromidrico sulla benzaldeide e sul metiletilchetone ».

8. PALMERI CARLO. — « Dall'energia del "Campo Universale" all'energia ponderale o materia ».

AL PREMIO MINISTERIALE PER LE SCIENZE NATURALI

(Scadenza 31 dicembre 1937 — Premio lire 4.000).

1. COMES SALVATORE. — « Le generazioni alternanti ed il loro ritmo nel mondo degli organismi » (ms.).

2. LENGUEL BELARIO. — « Le fritillarie del Monte Maggiore e la fritillaria liburnica: nuova specie endemica ».

3. PONZO ANTONINO. — 1. « Stipule e guaina ». — 2. « Sui fillocladii delle asparagee ». — 3. « La punta iniziale delle foglie nelle Monocotiledoni ». — 4. « Monocotiledoni per eterocotilia o sincotilia ? ». — 5. « Le stipule di "Spergularia rubra Pers" ». — 6. « Ancora sulla punta iniziale e guaina delle foglie nelle Monocotiledoni ». — 7. « Sulla fillostassi: I nomofilli di "Menyanthes trifoliata" L. ». — 8. « Le stipule di "Spergularia arvensis" L. » (ms.). — 9. « Le stipule e la fillostassi di "Tropaeolum Majus" L. » (ms.). — 10. « Osservazioni sulle foglie del Gen. *Alstroemeria* » (ms.). — 11. « Sulla filogenia delle monocotiledoni ».

4. PROCASI TIZIANO. — « Florula dei laghetti dell'Appennino di Parma e Reggio » (ms.).

5. ZANONI GIUSEPPINA. — 1. « Fenomeni di isteresi protoplasmatica consecutivi alla castrazione nel germoglio florale ». — 2. « Livello metabolico e correlazioni dovute agli elementi riproduttivi nel germoglio floreale ». — 3. « Simmetria morfologica e fisiologica degli elementi tepalici ». — 4. « Equivalenti fisiologici della simmetria ». — 5. « Gradienti autonomi e correlazioni d'origine embrionale nel seme delle legumi ».

nose ». — 6. « Fernandes A. — Estudos nos cromosomas das “ Liliáceas ” e “ Amarillidáceas ” ». — 7. « Cotiledonoresistenza e cotiledonolabilità ». — 8. « Ulteriori ricerche sulla cotiledonoresistenza e sulla cotiledonolabilità ». — 9. « Aspetti funzionali della Dicotomia ». — 10. « Sistema staminale ed accrescimento del fiore ». — 11. « Espressioni differenziali di sessualità nelle correlazioni di origine germinativa in fiori monoclini di cogami ». — 12. « Sulla fisiologia dello sporofillo di alcune Filicinee ». — 13. « Nuovo contributo alla differenziazione biochimica degli stati di sessualità sui tessuti corollini di fiori monoclini dicogami ». — 14. « Sui rapporti funzionali tra fiore e brattea ». — 15. « Fenomeni di dominanza nella infiorescenza ». —

ZODDA GIUSEPPE. — « Flora italica Cryptogama ».

PREMIO MINISTERIALE

(DIREZIONE GENERALE PER L'ISTRUZIONE TECNICA,
ISTRUZIONE NAUTICA).

PER LAVORI SOPRA ARGOMENTI DI *SCIENZE FISICHE E CHIMICHE*

(Scadenza 31 dicembre 1937. — Premio lire 3.872)

GIAMBALVO VITO. — 1. « Calcolo delle tubazioni negli impianti di riscaldamento a livello mediante termosifoni » (st.). — 2. « Ciclo Termodinamico ad iniezione per macchine frigorifere » (st.). — 3. « Sulla temperatura raggiungibile con la concentrazione dell'energia raggiante » (st.). — 4. « Considerazioni su di un nuovo ciclo frigorifero » (st.). — 5. « Questioni inerenti alla trasmissione del suono attraverso pareti » (st.). — 6. « Ein kältetechnisches Verdichter mit stufenweiser Einspritzung in den Verdichter » (st.). — 7. « Processi frigoriferi con iniezione nel compressore » (st.). — 8. « Alcune ricerche sulla nuova lampada a vapori di sodio » (st.).

ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO BATTISTA GRASSI

(Scadenza 31 dicembre 1937 — Premio lire 4.000).

I. GIOVANNOLA ARNALDO. — 1. « L'azione sterilizzante della plasmochina sui gameti dei parassiti malarigeni e sua importanza profilattica » (st.). — 2. « Zur Frage der medikamentösen Malariaphylaxe auf Grund von experimentellen Untersuchungen an der Vogel malaria » (st.). — 3. « Caratteristiche alterazioni delle glandole salivari dell'Anopheles maculipennis infetto da parassiti malarici » (st.). — 4. « Controllo biologico dei preparati antimalarici sulla malaria aviaria » (st.). — 5. « La malaria delle scimmie impiegata nel controllo biologico dei farmaci antimalarici » (st.). — 6. « Sulla presenza in Italia del “ Plasmodium tenue ” (Laveran e Marullax 1914) e del “ P. circumflexum ” (Kikuth 1931) » (st.). — 7. « Tentativo di classificazione dei plasmodi aviari » (st.). — 8. « La colorazione vitale degli sporozoit ed il suo impiego nella diagnosi dell'infettività degli anafeli » (st.). — 9. « Die Glykogenreaktionen nach Best und Bauer, in ihrer Anwendung auf Protozoen » (st.). — 10. « Sulla permanenza dei caratteri biochimici di alcune specie di Monilia mantenute in coltura per vari anni » (st.). — 11. « Plasmodium ovale considered as a modification of plasmodium vivax after a long residence in the human host » (st.). — 12. « “ Plasmodium immaculatum ” (Grassi and

Feretti, 1892) Schaudinn, 1902, the correct name for the parasite causing malarian malaria » (st.). — 13. « Osservazioni sulla natura delle coste nella borsa caudale degli Anchilostomi » (st.). — 14. « Les leucocytozoon: leur développement schizogonique » (st.). — 15. « Energy and food reserves in the development of nematodes » (st.). — 16. « Inversion in the periodicity of emission of cercariae from their snail hosts by reversal of light and darkness » (st.). — 17. « Some observations on the emission of cercariae of *Schistosoma Mansoni* (Trematoda: Schistosomatidae) from *Australorbis glabratus* » (st.). — 18. « Unisexual infection with *Schistosoma Mansoni* » (st.). — 19. « Comparative action of tartar emetic and foaidin on *Schistosoma Mansoni* *in vitro* » (st.). — 20. « Specific action of some drugs on experimental infections of *Schistosoma Mansoni* » (st.). — 21. « Su due nuove Cercariae studiate in Sardegna » (st.). — 22. « Schistosomiasi intestinale da *S. Mansoni* nel Harar e sua trasmissione con il *Planorbis* Beissyi » (st.).

2. RAFFAELE GIULIO. — 1. « Una nuova specie di « *Anopheles* » (st.). — 2. « Sul comportamento nel sangue dei parassiti della malaria aviaria » (st.). — 3. « Il “ *Plasmodium* ” della civetta (*Athene noctua*) » (st.). — 4. « Chiavi dicotomiche degli anofelini italiani » (st.). — 5. « Sulle cosiddette toxoplasmosi dei passerii » (st.). — 6. « Su alcuni cestodi rinvenuti in una pantera » (st.). — 7. « Un ceppo italiano di “ *Plasmodium elongatum* ” » (st.). — 8. « Sul comportamento degli sporozoi nel sangue dell'ospite » (st.). — 9. « Sul comportamento degli sporozoi nel sangue dell'ospite — Nota II^a » (st.). — 10. « Potere infettante del sangue durante l'incubazione della malaria aviaria » (st.). — 11. « Il doppio ciclo schizogonico di “ *Plasmodium elongatum* ” » (st.). — 12. « Presumibili forme iniziali di evoluzione di “ *Plasmodium relictum* ” » (st.). — 13. « Ancora sul ciclo schizogonico di “ *Plasmodium elongatum* ” » (st.). — 14. « Sullo sviluppo iniziale dei parassiti malarici nell'ospite vertebrato » (st.). — 15. « L'anofelismo nella piana di Rieti » (st.). — 16. « Missione dell'Istituto di malariologia nell'Africa Orientale Italiana. Relazione in collaborazione con il prof. G. Lega e A. Canalis » (st.). — 17. « Osservazioni su di un ceppo etiopico di “ *Plasmodium falciparum* ” » (st.).

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 20 febbraio 1938 — Anno XVI

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Interpretazione geometrica dell'equazione*
 $\frac{\partial^2 \log \beta \gamma}{\partial u \partial v} + \beta \gamma = 0$ e qualche proprietà delle congruenze di rette
del fascio canonico. Nota di EF. MARCUS, presentata⁽¹⁾ dal Socio
G. FUBINI.

Le x, y, z, t , siano funzioni di u, v ; al variare di u, v , il punto, di cui esse sono le coordinate omogenee, descriva una superficie S di cui le u, v siano le asintotiche.

Sia $\frac{\beta du^3 + \gamma dv^3}{du dv}$ l'elemento lineare proiettivo del Fubini di S e sia $\beta \gamma \neq 0$ cioè S non sia rigata.

Sia (Fubini e Čech, *Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces*):

$$\varepsilon a_{12} = (x, x_u, x_v, x_{uv}), \quad \varepsilon = \pm 1, \quad \theta = \log |a_{12}|, \quad \bar{\theta}_{uv} + \theta_{uv} + 2\beta\gamma = 0$$

$$\Omega = \frac{1}{a_{12}} (\theta_{uv} + \beta\gamma).$$

Sia λ un parametro e:

$$l_1 = -\lambda \frac{\partial \log \beta \gamma^2}{\partial u} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \log \beta \gamma}{\partial u} - \theta_u \right),$$

$$l_2 = -\lambda \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \log \beta \gamma}{\partial v} - \theta_v \right).$$

(1) Nella seduta del 20 febbraio 1938.

Per ogni valore di λ il punto (X, Y, Z, T) definito dalle:

$$(1) \quad X = x + \frac{\rho}{a_{12}}(x_{uv} - l_1 x_v - l_2 x_u) \text{ e analoghe in } Y, Z, T$$

descrive al variare di ρ una *retta canonica* r_λ . Questa retta, al variare di u, v , descrive una congruenza, i cui fuochi F_λ^1, F_λ^2 sulla retta sono i punti ottenuti dalla (1) dando a ρ due valori ρ_1, ρ_2 opportuni. Un facile calcolo prova che:

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = -\frac{2\Omega}{a_{12}} + \frac{1}{a_{12}}[l_{2u} + l_{1v} + 2l_1 l_2].$$

Tra le rette canoniche alcune sono specialmente notevoli. Così, per es., per $\lambda = 0$ si ha la normale proiettiva; per $\lambda = -\frac{1}{2}$ la direttrice; per $\lambda = -\frac{1}{3}$ l'asse; per $\lambda = -\frac{1}{4}$ lo spigolo.

Le coordinate (X, Y, Z, T) di un punto qualunque P dello spazio si scrivano nella forma:

$$X = x_0 x + x_1 x_u + x_2 x_v + x_3 x_{uv} \quad (\text{analoghe in } Y, Z, T).$$

Le (x_0, x_1, x_2, x_3) saranno le coordinate locali di P .

L'equazione $2(x_0 x_3 - x_1 x_2) + x_3^2[(1-h)\beta\gamma + \theta_{nv}] = 0$ definisce una quadrica Q_h di Darboux. Per $h = 0$ si ha la quadrica del Lie; per $h = 1$ la quadrica del Wilczinski; per $h = \frac{1}{3}$ si ha la quadrica del Fubini. Facendo corrispondere bilinearmente ad un punto un piano si ha una correlatività. La correlatività più notevole in questi studi è quella definita da Fubini e Čech nel modo seguente. Siano ξ, η, φ, τ le coordinate del piano tangente corrispondente secondo gli autori citati alle coordinate x, y, z, t , di punto. Le coordinate Ξ, H , ecc. di un piano qualunque π dello spazio si scrivano nella forma:

$$\Xi = \zeta_0 \zeta + \zeta_1 \zeta_u + \zeta_2 \zeta_v + \zeta_3 \zeta_{uv} \quad (\text{e analoghe per } H \text{ ecc.})$$

ove le ζ sono le coordinate del piano tangente nel punto considerato le ζ_u sono i valori in tale punto delle $\frac{\partial \zeta}{\partial u}$ ecc. Le $(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ saranno le coordinate locali del piano π . In coordinate locali, la condizione di appartenenza di un punto P e di un piano π è:

$$\zeta_0 x_3 + \zeta_3 x_0 + \zeta_3 x_3 (\theta_{uv} + \beta\gamma) - \zeta_1 x_2 - \zeta_2 x_1 = 0.$$

La *correlatività fondamentale* è quella che porta il punto x_i nel piano ζ_i . L'equazione della quadrica Q_h di Darboux come involuppo dei suoi piani

tangenti $[\zeta_0 = x_0 - h \beta \gamma x_3, \zeta_i = x_i \quad i = 1, 2, 3]$ è $2[\zeta_0 \zeta_3 - \zeta_1 \zeta_2] + \zeta_3^2 [(1+h) \beta \gamma + \theta_{uv}] = 0$ come dimostra un facile calcolo. Alla quadrica $Q_h = 2(x_0 x_3 - x_1 x_2) + x_3^2 ((1+h) \beta \gamma + \theta_{uv}) = 0$ corrisponde per $x_i = \zeta_i$ ($i=0, 1, 2, 3$) la quadrica $2(\zeta_0 \zeta_3 - \zeta_1 \zeta_2) + \zeta_3^2 ((1+h) \beta \gamma + \theta_{uv}) = 0$. Quindi nella correlatività fondamentale si corrispondono le quadriche di Darboux corrispondenti a due valori h e $-h$ uguali e di segno contrario. Ci chiediamo quando i precedenti fuochi F_λ^1, F_λ^2 sono coniugati rispetto a Q_h .

Un calcolo semplice dice che ciò avviene se:

$$(2) \quad \beta \gamma (1+h) + (3\lambda + 1) \frac{\partial^2 \log \beta \gamma}{\partial u \partial v} = 0.$$

La (2) è soddisfatta se $h = -1$, $\lambda = -\frac{1}{3}$. Perciò i punti focali della congruenza dell'asse di qualsiasi superficie sono coniugati rispetto alla quadrica correlativa di quella del Wilczinski.

Se $h = -1$, $\lambda \neq -\frac{1}{3}$ la (2) diventa:

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \log \beta \gamma}{\partial u \partial v} = 0$$

ossia

$$\beta \gamma = e^{U(u) + V(v)}$$

ove U è funzione della sola u , V della sola v .

Solo per le superficie per cui vale (3) i punti focali della congruenza generata da una qualsiasi retta canonica sono coniugati rispetto alla quadrica correlativa di quella del Wilczinski.

Fissati ad arbitrio h e λ , cioè fissate una retta canonica ed una quadrica Q_h di Darboux, la (2) dà:

$$(4) \quad \beta \gamma = -2 \frac{3\lambda + 1}{1+h} \times \frac{U'(u) \cdot V'(v)}{[U(u) + V(v)]^2}$$

con U e V funzioni rispettivamente della sola u e v .

Le superficie per cui vale (4) sono le sole per cui la congruenza generata dalla retta canonica r_λ , ha, su ogni suo raggio, fuochi coniugati rispetto alla corrispondente quadrica Q_h di Darboux.

Per $\frac{3\lambda + 1}{1+h} = -\frac{1}{2}$ la (4) diventa $\beta \gamma = \frac{U'(u) V'(v)}{[U(u) + V(v)]^2}$. Per $\lambda = -\frac{1}{2}$, $h = 0$ cioè le S per cui $\beta \gamma = \frac{U'(u) V'(v)}{[U(u) + V(v)]^2}$ sono le sole per cui i punti focali della direttrice sono coniugati rispetto alla quadrica del Lie.

Per $\frac{3\lambda + 1}{1 + b} = \frac{3}{8}$ la (4) diventa $\beta\gamma = -\frac{3}{4} \frac{U'(u) V'(v)}{[U(u) + V(v)]^2}$. Per $\lambda = -\frac{1}{4}$, $b = -\frac{1}{3}$ cioè le S con $\beta\gamma = -\frac{3}{4} \frac{U'(u) V'(v)}{[U(u) + V(v)]^2}$ sono le sole per cui i punti focali dello spigolo sono coniugati rispetto alla quadrica correlativa di quella del Fubini.

Per $3\lambda = b$ si ottiene l'equazione:

$$(5) \quad \frac{\partial^2 \log \beta\gamma}{\partial u \partial v} + \beta\gamma = 0.$$

In questo caso si osserva che i fuochi della normale proiettiva sono coniugati rispetto alla quadrica del Lie.

Se le coordinate sono normalizzate secondo Fubini ($\theta = \log \beta\gamma$) la (5) diventa $\theta_{uv} + \beta\gamma = a_{12} \Omega = 0$ e, dalla $\bar{\theta}_{uv} + \theta_{uv} + 2\beta\gamma = 0$, si ottiene:

$$\bar{\theta}_{uv} + \beta\gamma = 0 \quad \text{ossia} \quad \bar{\theta}_{uv} = \theta_{uv}.$$

Per finire, basterà provare l'esistenza di superficie che soddisfacciano alle condizioni qui trovate, cioè di superficie per cui vale la (4). Con un cambiamento di parametri per le linee asintotiche, basterà provare l'esistenza di superficie tali che

$$(4 \text{ bis}) \quad \beta\gamma = -2 \frac{1 + 3\lambda}{1 + b} (u + v)^{-2}.$$

Supposto in più, ad es., $\beta = \gamma$, cioè

$$\beta = \gamma = \sqrt{A} (u + v)^{-1} \quad \left(\text{ove } A = -2 \frac{1 + 3\lambda}{1 + b} \right)$$

le equazioni (111) di Fubini e Čech (loc. cit., p. 83) si possono integrare e danno:

$$\begin{aligned} L &= A \left(-\frac{3}{2} (u + v)^{-2} + c_1 u^2 + c_2 u + c_3 \right) \\ M &= A \left(-\frac{3}{2} (u + v)^{-2} + c_1 v^2 - c_2 v + c_3 \right) \end{aligned} \quad (c_i = \text{cost. arbitraria}).$$

Resta così dimostrata l'esistenza di superficie isoterma-asintotiche, per cui vale la (4 bis), dipendenti da 3 costanti arbitrarie c_1, c_2, c_3 .

Matematica. — *Sulla riduzione di rango dei sistemi pfaffiani.*

Nota di G. D. MATTIOLI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Nella Meccanica Analitica si va introducendo — specie ad opera di Birkhoff ⁽²⁾ — la considerazione dei *sistemi pfaffiani*, quali generalizzazione dei *sistemi canonici*; in quanto provengono da questi per una trasformazione generica di variabili. In modo autonomo, dicesi *sistema pfaffiano* il sistema ai differenziali totali associato ad una forma differenziale lineare, che risulta eguagliando a zero i coefficienti di una serie di differenziali del relativo co-variante bilineare.

Per i sistemi canonici sono noti i casi classici di abbassamento di rango consentito dalla conoscenza di un certo numero di integrali — eventualmente dotati di proprietà particolari: in involuzione, ecc. — che risultano dai teoremi di Lie (Liouville). È pensabile che siffatte possibilità siano la particolarizzazione di analoghe che si presentano per i più generali sistemi pfaffiani. Ciò faccio vedere nel presente lavoro, dove espongo un metodo di utilizzazione degli integrali supposti noti di un sistema pfaffiano ai fini della sua riduzione di rango, che è analogo a quello già da me adottato in una Nota del 1932 di questi « Rendiconti », dove i sistemi canonici erano trattati quali pfaffiani ⁽³⁾. Risulterà, in particolare, completato in un punto importante il teorema ivi dimostrato.

In riguardo all'estensione di proprietà note nel caso canonico, ricordo che pure il Levi-Civita riconobbe la possibilità di trasferire ai pfaffiani i suoi teoremi concernenti la costruzione di soluzioni particolari ⁽⁴⁾.

I. Sia la forma di Pfaff, di classe $2n + 1$,

$$(1) \quad \omega = \sum_{i=1}^{2n+1} X_i dx^i$$

le X_i essendo funzioni regolari in un campo delle $2n + 1$ variabili x^i . Ne consideriamo un numero dispari, perchè tale è il caso dei problemi dinamici. Il sistema pfaffiano associato alla ω è

$$(2) \quad \sum_{i=1}^{2n+1} a_{ij} dx^i = 0 \quad , \quad j = 1, 2, \dots, 2n + 1$$

(1) Nella seduta del 6 febbraio 1938.

(2) *Dynamical systems*, New York, 1927. « American Math. Society Colloquium Publications », vol. IX.

(3) *Sulla riduzione di rango dei sistemi canonici mediante integrali generici.* « Rendic. Lincei », vol. XV, 1932, p. 437.

(4) Cfr. *Sulle soluzioni stazionarie dei sistemi pfaffiani.* — I. Generalità e richiami. — II. Il caso più significativo. « Rend. Lincei », ser. 6^a, vol. XIX, 1934, pp. 261-267, 369-375.

dove

$$a_{ij} = \frac{\partial X_j}{\partial x^i} - \frac{\partial X_i}{\partial x^j}.$$

Il sistema ai differenziali totali (2) contiene sempre un numero pari di equazioni linearmente indipendenti; nel caso normale, che qui supporremo, esse sono dunque $2n$, per cui (2) equivale ad un sistema di $2n$ equazioni differenziali di primo ordine.

Le $f_i(x)$ essendo $2n + 1$ funzioni indipendenti delle variabili x^i , si faccia il cambiamento di variabili

$$y^i = f_i(x), \quad \text{cioè: } x^i = \varphi_i(y).$$

Se la forma ω diviene

$$(1') \quad \tilde{\omega} = \sum_i^{2n+1} Y_i dy^i,$$

il sistema (2) — covariante della ω — si trasforma in

$$(2') \quad \sum_i^{2n+1} b_{ij} dy^j = 0$$

dove:

$$b_{ij} = \frac{\partial Y_j}{\partial y^i} - \frac{\partial Y_i}{\partial y^j} = \sum_r^{2n+1} a_{rs} \frac{\partial \varphi_r}{\partial y^i} \frac{\partial \varphi_s}{\partial y^j}.$$

Supponiamo ora che

$$(3) \quad y^\alpha = f_\alpha(x) = c_\alpha(\text{cost.}) \quad , \quad \alpha = 1, 2, \dots, m,$$

siano integrali del nostro sistema pfaffiano (2). Allora il trasformato (2') nel quale si faccia

$$(4) \quad y^\alpha = c_\alpha \quad , \quad dy^\alpha = 0,$$

deve ridursi a contenere $2n - m$ equazioni linearmente indipendenti⁽¹⁾, ed essere, naturalmente, completo nelle variabili y^{m+1}, \dots, y^{2n+1} , cioè atto a fornire i rimanenti $2n - m$ integrali. Separiamo in due gruppi le equazioni che così si ottengono:

$$(5') \quad \sum_{r=m+1}^{2n+1} b_{pr} dy^r = 0 \quad , \quad p = m+1, \dots, 2n+1,$$

$$(5'') \quad \sum_{r=m+1}^{2n+1} b_{\alpha r} dy^r = 0 \quad , \quad \alpha = 1, 2, \dots, m.$$

(1) GOURSAT, *Leçons sur le problème de Pfaff*. Parigi, 1922, J. Hermann ed., p. 48.

In queste equazioni, e in tutto il seguito, le m variabili y^α sono da considerare quali parametri costanti, conformemente alle (4).

Facciamo le posizioni (4) anche nella forma $\tilde{\omega}$; essa diviene

$$(6) \quad \tilde{\omega}_m = \sum_{p=1}^{2n+1} Y_p dy^p$$

e si riconosce immediatamente che le equazioni (5') ne costituiscono il sistema pfaffiano associato. Perciò (5') è, considerato a sè solo, un sistema ai differenziali totali illimitatamente integrabile, e consta inoltre di un numero pari di equazioni linearmente indipendenti⁽¹⁾.

Vedremo più innanzi come questo numero è determinabile appena siano assegnati gli integrali f_α . Indichiamolo con μ , necessariamente $\leq 2n - m$; tale essendo il numero complessivo delle equazioni indipendenti di (5') e (5''). Allora l'integrazione del sistema completo (5') permette di esprimere le $2n + 1 - m$ variabili y^r in funzione di $N = 2n + 1 - m - \mu$ variabili indipendenti u^e e di μ costanti arbitrarie h_1, h_2, \dots, h_μ :

$$(7) \quad y^r = y^r(u^1, \dots, u^N | y^\alpha | h_1, \dots, h_\mu) \quad , \quad r = m + 1, \dots, 2n + 1;$$

nelle quali, ricordiamolo, le y^α intervengono quali parametri costanti. Il determinante funzionale delle y^r rapporto alle u^e e h_σ

$$(8) \quad \left\| \frac{\partial y^s}{\partial u^e} \mid \frac{\partial y^s}{\partial h_\sigma} \right\| \neq 0$$

non deve essere identicamente nullo; chè altrimenti dalle (7) le u^e e h_σ sarebbero eliminabili, e ne risulterebbero delle relazioni tra le y^{m+1}, \dots, y^{2n+1} che limiterebbero l'arbitrarietà dei loro valori iniziali nell'integrale (7); contrariamente all'ipotesi che questo sia l'integrale generale di un sistema completo.

È chiaro che se $\mu = 2n - m$, le (7) e le (3) forniscono l'integrale generale del sistema (2). Quando invece sia $\mu < 2n - m$, per esaurire l'integrazione occorre considerare anche (5''). Orbene: *esprese le equazioni (5'') in funzione delle u^e mediante le (7), ognuna di esse è esatta, e perciò s'integra con quadrature*. È chiaro, che quali u^e , si può prendere anche un ugual numero di variabili y^r .

Costruiamo infatti il covariante bilineare di una (5''):

$$(9) \quad \chi_\alpha = \sum_{r=1}^{2n+1} \left(\frac{\partial b_{\alpha r}}{\partial y^s} - \frac{\partial b_{\alpha s}}{\partial y^r} \right) dy^r \delta y^s,$$

il quale, per l'equazione espressa in termini delle u^e , diviene:

$$\chi_\alpha = \sum_{i=1}^N \sum_{v=1}^{2n+1} \left(\frac{\partial b_{\alpha r}}{\partial y^p} - \frac{\partial b_{\alpha p}}{\partial y^r} \right) \frac{\partial y^r}{\partial u^e} \frac{\partial y^p}{\partial u^v} du^e \delta u^v,$$

(1) GOURSAT, loc. cit., p. 27.

al quale, essendo

$$\frac{\partial b_{ar}}{\partial y^p} - \frac{\partial b_{ap}}{\partial y^r} = \frac{\partial}{\partial y^p} \left(\frac{\partial Y_r}{\partial y^a} - \frac{\partial Y_a}{\partial y^r} \right) - \frac{\partial}{\partial y^r} \left(\frac{\partial Y_p}{\partial y^a} - \frac{\partial Y_a}{\partial y^p} \right) = \frac{\partial b_{pr}}{\partial y^a},$$

si può pure dare la forma:

$$(9') \quad \chi_a = \sum_{\mathbf{r}}^N \sum_{\mathbf{m}}^{2n+1} b_{pr} \frac{\partial y^r}{\partial y^a} \frac{\partial y^p}{\partial u^e} \frac{\partial y^p}{\partial u^v} du^e \delta u^v.$$

A derivazioni eseguite, le y^r sono — beninteso — da sostituire con le espressioni (7).

Poichè le (7) danno l'integrale generale di (5'), valgono le identità

$$(10) \quad \sum_{\mathbf{m}}^{2n+1} b_{pr} \frac{\partial y^r}{\partial u^e} = 0, \quad \begin{matrix} p = m+1, \dots, 2n+1, \\ r = 1, 2, \dots, N, \end{matrix}$$

rispetto a tutte le variabili u^e, h_σ, y^a .

Deriviamo le (10) rapporto al parametro y^a ; risulta

$$\sum_{\mathbf{m}}^{2n+1} \left[\left(\frac{\partial b_{pr}}{\partial y^a} + \sum_{\mathbf{m}}^{2n+1} \frac{\partial b_{pr}}{\partial y^s} \frac{\partial y^s}{\partial y^a} \right) \frac{\partial y^r}{\partial u^e} + b_{pr} \frac{\partial^2 y^r}{\partial u^e \partial y^a} \right] = 0,$$

da cui si costruisce l'espressione

$$(11) \quad \begin{aligned} \sum_{\mathbf{m}}^{2n+1} b_{pr} \frac{\partial y^r}{\partial y^a} \frac{\partial y^p}{\partial u^e} \frac{\partial y^p}{\partial u^v} &= - \sum_{\mathbf{m}}^{2n+1} b_{pr} \frac{\partial y^p}{\partial y^s} \frac{\partial y^p}{\partial u^v} \frac{\partial y^r}{\partial u^e} \frac{\partial y^s}{\partial y^a} - \\ &- \sum_{\mathbf{m}}^{2n+1} b_{pr} \frac{\partial y^p}{\partial u^v} \frac{\partial^2 y^r}{\partial u^e \partial y^a}. \end{aligned}$$

L'ultimo termine è identicamente nullo, per le identità (10) e a causa dell'emisimmetria delle b_{pr} . Dimostriamo che lo è anche la sommatoria precedente.

Deriviamo le (10) rapporto ad una u^λ . Procedendo come or ora (si noti che b_{pr} contiene la u^λ solamente per il tramite delle y^{m+1}, \dots, y^{2n+1}) si constata che

$$(12) \quad \sum_{\mathbf{m}}^{2n+1} b_{pr} \frac{\partial y^p}{\partial y^s} \frac{\partial y^p}{\partial u^v} \frac{\partial y^r}{\partial u^e} \left(\frac{\partial y^s}{\partial u^\lambda} \right) = 0 \quad ; \quad \lambda = 1, 2, \dots, N;$$

ed analogamente derivando rapporto a una costante h_σ , risulta

$$(12') \quad \sum_{\mathbf{m}}^{2n+1} b_{pr} \frac{\partial y^p}{\partial y^s} \frac{\partial y^p}{\partial u^v} \frac{\partial y^r}{\partial u^e} \left(\frac{\partial y^s}{\partial h_\sigma} \right) = 0 \quad , \quad \sigma = 1, 2, \dots, \mu.$$

Interpretiamo le (12), (12') come un sistema di $N + \mu = 2n + 1 - m$ equazioni lineari in altrettante incognite, di coefficienti $\frac{\partial y^s}{\partial u^\lambda}, \frac{\partial y^s}{\partial h_\sigma}$. Il deter-

minante del sistema, (8), è diverso da zero; perciò — sempre quando tutto sia espresso mediante le (7) — sarà identicamente

$$\sum_{m+1}^{2n+1} r_p^p \frac{\partial b_{pr}}{\partial y^s} \frac{\partial y^p}{\partial u^v} \frac{\partial y^r}{\partial u^q} = 0;$$

e quindi anche la prima sommatoria del secondo membro delle (11) è nulla. In conclusione, il primo membro della (11) è identicamente zero; cioè è tale anche il covariante bilineare (9') di ogni equazione (5''), la quale, espressa in termini delle u^e , è perciò esatta. c. d. d.

Si ha quindi il teorema: *l'abbassamento di rango consentito dall'utilizzazione dei noti m integrali f_α di un sistema pfaffiano è uguale a $2n - \mu$, se $\mu \leq 2n - m$ sono le equazioni linearmente indipendenti di (5'). Integrato questo sistema completo, l'integrazione del pfaffiano si esaurisce con sole quadrature, integrando (in generale) $2n - m - \mu$ equazioni linearmente indipendenti prese tra le m equazioni esatte (5'')* (1).

2. Calcolo di μ .

Una determinazione di questo numero, già nelle variabili iniziali x^i , è esprimibile mediante il simbolismo introdotto da Cartan⁽²⁾ nella teoria del problema di Pfaff: quello delle forme differenziali simboliche, e in particolare delle derivate successive $\omega', \omega'', \dots \omega^{(k)}$ di una forma lineare ω .

Secondo Cartan⁽³⁾, le m funzioni f_α formano un gruppo di rango k se le posizioni (4) introdotte nella forma (1') ne abbassano la classe di k unità. Se cioè — nel nostro caso in cui la forma $\tilde{\omega}$ è di classe $2n + 1$ — la classe della forma ridotta $\tilde{\omega}_m$ è uguale a $2n + 1 - k$. Perchè k sia il rango delle m funzioni distinte f_α , occorre e basta che il prodotto simbolico

$$(13) \quad \omega^{(2n+1-k)} df_1 df_2 \dots df_m$$

sia nullo, mentre sono diversi da zero $\omega^{(i)} df_1 \dots df_m$ dove $i < 2n + 1 - k$.

Per applicare questo teorema al caso nostro, basta tener presente che, detta c la classe di una forma ω , il suo primo sistema pfaffiano (quello che stiamo considerando) contiene c equazioni linearmente distinte se c è pari; $c - 1$ se c è dispari.

Il rango k dei noti integrali f_α sia pari: allora la classe $2n + 1 - k$ della forma $\tilde{\omega}_m$ è dispari, e perciò il relativo sistema pfaffiano (5') contiene $\mu = 2n - k$ equazioni indipendenti. Se k risulta dispari, $2n + 1 - k$ è pari; ed allora $\mu = 2n + 1 - k$.

(1) Questo teorema vale naturalmente anche quando la forma ω è canonica. Il complemento da apportare all'analogo teorema enunciato nella Nota citata, è il seguente: le equazioni ivi indicate (5'''), (5^{IV}), sono esatte (nel senso ora indicato).

(2) GOURSAT, loc. cit., capp. III, IV.

(3) GOURSAT, loc. cit., p. 166.

L'abbassamento di rango è dunque uguale a k o $k - 1$, secondo che il rango k del gruppo di integrali è pari o dispari. In ogni caso il rango delle operazioni differenziali è abbassato di un numero pari di unità.

Cartan dimostra che $k \leq 2m$, e quindi per l'abbassamento di rango si ha $2n - \mu \leq 2m$; e poichè le funzioni f_α sono integrali, è chiaro che anche $2n - \mu \geq m$, in quanto le equazioni (5') indipendenti sono in numero $\mu \leq 2n - m$.

In particolare è inoltre $2n - \mu \geq 2$ qualunque sia m . Basta osservare che per $m = 1$, il fatto che f è integrale di (2) si esprime, secondo Cartan, scrivendo

$$\omega^{(2n-1)} df = 0;$$

per cui, confrontando con (13) si riconosce che, per un solo integrale, k , e quindi $2n - \mu$, è uguale a 2; e non può essere maggiore per il teorema generale prima enunciato.

3. Il caso più notevole.

I casi più notevoli corrispondono alla massima riduzione di rango consentita dagli m integrali: essa è di $2m$ unità e si ha quando $k = 2m$. Si dice allora che le f_α formano un *gruppo coniugato di funzioni*; ed il caso corrisponde a quello degli integrali in involuzione per i sistemi canonici.

Per $m = n$, e le f_α formanti un gruppo coniugato: cioè per $k = 2n$, e quindi $\omega' df_1 df_2 \dots df_n = 0$, si ha l'analogo del teorema di Liouville: *l'integrazione del pfaffiano si compie con sole quadrature.*

Infatti, (5') contiene allora $2n - k = 0$ equazioni; cioè si ha $b_{pr} = 0$ ($p, r = m + 1, \dots, 2n + 1$). Ma queste sono le condizioni di esattezza della forma

$$(14) \quad \sum_{r=1}^{2n+1} Y_r dy^r, \quad \text{che è perciò} \quad \equiv dV(y^{n+1}, \dots, y^{2n+1}/y^\alpha).$$

Siccome le y^α sono parametri costanti, si ha pure

$$\sum_{r=1}^{2n+1} \frac{\partial Y_r}{\partial y^\alpha} dy^r = d \frac{\partial V}{\partial y^\alpha};$$

e quindi integrata la (14), cioè determinata — con sole quadrature — la funzione $V(y^r/y^\alpha)$, si sono senz'altro integrate tutte le equazioni (5''); essendo, per quanto precede,

$$\sum_{r=1}^{2n+1} b_{\alpha r} dy^r = \sum_{r=1}^{2n+1} \left(\frac{\partial Y_r}{\partial y^\alpha} - \frac{\partial Y_\alpha}{\partial y^r} \right) dy^r = d \left(\frac{\partial V}{\partial y^\alpha} - Y_\alpha \right),$$

per cui le (5'') equivalgono alle

$$(15) \quad \frac{\partial V}{\partial y^a} - Y_a = h_a(\text{cost.}) \quad , \quad a = 1, 2, \dots n.$$

Queste, assieme con le (3), completano l'integrale generale del sistema considerato.

È facile verificare che nel caso della forma $\omega = \sum_i p_i dq_i - H dt$, la condizione $\omega' df_1 df_2 \dots df_n = 0$ esprime che le f_a sono integrali del corrispondente sistema canonico, ed in involuzione.

Matematica. — *Extension aux variétés non holonomes* V_n^{n-1} *de quelques propriétés des surfaces et des* V_3^2 . Nota di M.me CHR. PAUC, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. E. BOMPIANI.

L'extension aux courbes intégrales d'une équation de Pfaff de notions classiques relatives aux courbes tracées sur une surface a déjà fait l'objet de nombreuses recherches ⁽²⁾. Dans cette Note, nous nous proposons de retrouver brièvement, en les complétant, quelques uns de ces résultats sur les variétés non holonomes V_3^2 de l'espace euclidien à 3 dimensions, puis de les étendre aux V_n^{n-1} d'un espace riemannien quelconque (cette extension est même parfois possible dans le cas tout à fait général des V_n^m).

Nous utiliserons pour cela la méthode du repère mobile déjà exposée dans ma Note aux C. R. Paris, to. 204, p. 1027. Etant donné un système non complètement intégrable de $(n - m)$ équations de Pfaff:

$$ds^{b'} = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{b'} dx^i = 0$$

déterminant dans un espace de Riemann de métrique donnée une variété non holonome V_n^m , on adjoint à tout point M un système de vecteurs unitaires et

(1) Nella seduta del 6 febbraio 1938.

(2) Cfr. en particulier: A. VOSS, *Geometrische Interpretationen der Differentialgleichung* $Pdx + Qdy + Rdz$. « Math. Ann. », 16, 1880; *Zur Theorie der allgemeinen Punktebenen-systeme*. « Math. Ann. », 23, 1884; A. DALL'ACQUA, *Sulla teoria delle congruenze di curve in una varietà qualunque a 3 dimensioni*. « Ann. di Matem. », 6, 1901; U. CASSINA, *Sulle traiettorie ortogonali di una congruenza di linee*. « Atti Ist. Veneto », 81, 1921-22; D. SINTZOV, *Zur Krümmungstheorie der Integralkurven der Pfaffschen Gleichung*. « Math. Ann. », 101, 1929; *Studien über das System der Integralkurven der Pfaffschen Gleichung*. « Commun. Soc. Math. Kharkow et Inst. Sci. Ukraine », 5, 1932; R. INZINGER, *Zur Differentialgeometrie Pfaffscher Mannigfaltigkeiten*. « Monatsh. f. Math. u. Phys. », 45, 1937; E. BORTOLOTTI, *Geometria proiettiva differenziale delle superficie anolonomiche*. « Atti Congresso Firenze », 1937.

rectangulaires par rapport à cette métrique, dont $m, \vec{\Lambda}_b$ ($b = 1, 2, \dots, m$) sont tangents à la variété, les $(n - m)$ autres $\vec{\Lambda}_{b'}$ ($b' = m + 1, \dots, n$) lui étant normaux. On a déjà vu que la variation infinitésimale du repère $\{\vec{\Lambda}_b, \vec{\Lambda}_{b'}\}$, lorsque le point M se déplace sur une courbe intégrale de la variété: $d\vec{M} = \sum_b ds^b \vec{\Lambda}_b$, est donnée par:

$$\begin{cases} d\vec{\Lambda}_b = -\sum \gamma_{k,b}^a ds^k \vec{\Lambda}_a \\ d\vec{\Lambda}_{b'} = -\sum \gamma_{b',k}^a ds^k \vec{\Lambda}_a \end{cases} \quad (a = 1, 2, \dots, n)$$

où les $\gamma_{b,c}^a$ sont les coefficients de Ricci: $\sum_{i,j} \frac{\partial \lambda_i^a}{\partial x^j} \Lambda_b^i \Lambda_c^j$.

Dans le cas le plus simple d'une V_3^2 de l'espace euclidien E_3 , définie par l'équation de Pfaff $\sum_i \lambda_i^3 dx^i = 0$ (où $\vec{\lambda}^3$ est pris vecteur unitaire); nous conserverons, pour des raisons de simplicité et de facile généralisation, la notation $\{\vec{\Lambda}_1, \vec{\Lambda}_2, \vec{\Lambda}_3\}$ au trièdre unitaire de référence, bien que dans ce cas les vecteurs λ^3 et Λ_3 soient identiques.

PROPRIÉTÉS DES COURBES INTÉGRALES D'UNE V_3^2 .

Vecteur unitaire tangent à une courbe intégrale:

$$\vec{t} = \frac{d\vec{M}}{ds} = \vec{\Lambda}_1 u^1 + \vec{\Lambda}_2 u^2$$

où

$$u^1 = \frac{ds^1}{ds} = \cos \varphi, \quad u^2 = \frac{ds^2}{ds} = \sin \varphi.$$

Vecteur normal:

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R}.$$

Courbure normale:

$$\frac{\cos \tilde{\omega}}{R} = \vec{\Lambda}_3 \cdot \frac{d\vec{t}}{ds} = -(\gamma_{1,1}^3 (u^1)^2 + v_{1,2}^3 u^1 u^2 + \gamma_{2,2}^3 (u^2)^2)$$

où

$$v_{1,2}^3 = \gamma_{1,2}^3 + \gamma_{2,1}^3.$$

$\tilde{\omega}$ désignant l'angle fait par la normale principale à la courbe avec la normale $\vec{\Lambda}_3$ à la V_3^2 .

Le *théorème de Meusnier* ⁽¹⁾ se généralise: toute courbe tangente de la V_3^2 a même rayon de courbure normal que toute courbe intégrale de cette variété ou de toute autre (holonome ou non) qui lui est osculatrice, c'est à dire possède au point envisagé la même *seconde forme fondamentale*:

$$\gamma_{1,1}^3 (ds^1)^2 + v_{1,2}^3 ds^1 ds^2 + \gamma_{2,2}^3 (ds^2)^2.$$

Lignes de courbure de première espèce ⁽²⁾, correspondant au maximum et au minimum du rayon de courbure normal; leur équation est:

$$\frac{\gamma_{1,1}^3 ds^1 + \frac{1}{2} v_{1,2}^3 ds^2}{ds^1} = \frac{\gamma_{2,2}^3 ds^2 + \frac{1}{2} v_{1,2}^3 ds^1}{ds^2}.$$

Si la V_3^2 est rapportée à ces lignes de courbure de 1^{ère} espèce, rectangulaires dont la courbure sera désignée par N_1 et N_2 respectivement, on aura alors:

$$\gamma_{1,1}^{3*} = -N_1, \quad \gamma_{2,2}^{3*} = -N_2, \quad v_{1,2}^{3*} = 0.$$

Courbure moyenne ⁽³⁾; constance de la courbure moyenne de deux courbes intégrales orthogonales quelconques de la variété:

$$N_1 + N_2 = -(\gamma_{1,1}^3 + \gamma_{2,2}^3).$$

Courbure totale, ou produit des courbures normales principales:

$$D_1 = N_1 N_2 = \gamma_{1,1}^3 \gamma_{2,2}^3 - \left(\frac{v_{1,2}^3}{2} \right)^2.$$

Première indicatrice de la V_3^2 , obtenue en portant sur la tangente à toute courbe intégrale, de part et d'autre du point de contact, une longueur égale à la racine carrée du rayon de courbure normal. Rapportée aux directions principales, l'équation cartésienne de cette première indicatrice sera donc:

$$N_1 (y^1)^2 + N_2 (y^2)^2 = 1.$$

Image sphérique d'une courbe intégrale: c'est encore la courbe décrite par l'extrémité d'un vecteur équipollent au vecteur normal $\vec{\Lambda}_3$ issu d'un point fixe, lorsque M décrit la courbe intégrale:

$$d\vec{\Lambda}_3 = \sum_{b,k} \gamma_{b,k}^3 ds^k \vec{\Lambda}_b, \quad d\vec{M} = \sum_b ds^b \vec{\Lambda}_b.$$

(1) Cfr. D. SINTZOV, loc. cit.

(2) Cfr. A. VOSS, DALL'ACQUA et D. SINTZOV, loc. cit.

(3) Cfr. DALL'ACQUA, loc. cit.

Il y a encore deux familles de courbes telles que le déplacement de leur image sphérique soit parallèle à celui du point; ce ne sont plus les lignes de courbure de 1^{ère} espèce, mais les *lignes de courbure de seconde espèce* ⁽¹⁾ d'équation :

$$\frac{\gamma_{1,1}^3 ds^1 + \gamma_{1,2}^3 ds^2}{ds^1} = \frac{\gamma_{1,2}^3 ds^1 + \gamma_{2,2}^3 ds^2}{ds^2}$$

(ne coïncidant avec les premières que dans le cas d'holonomie: $w_{1,2}^3 = \gamma_{1,2}^3 - \gamma_{2,1}^3 = 0$).

Théorème d'Olindes Rodrigues, valable pour les lignes de courbure de 2^{ème} espèce (de rayons de courbure normaux ρ_1 et ρ_2):

$$d\vec{M} + \rho d\vec{\Lambda}_3 = 0$$

$$\rho_1 \rho_2 = \gamma_{1,1}^3 \gamma_{2,2}^3 - \gamma_{1,2}^3 \gamma_{2,1}^3.$$

Courbure de Gauss ⁽²⁾, introduite comme rapport constant des éléments superficiels sur la sphère unité et le plan tangent à la V_3^2 , engendrés respectivement par deux déplacements infinitésimaux du point M et de son image sphérique

$$K = \gamma_{1,1}^3 \gamma_{2,2}^3 - \gamma_{1,2}^3 \gamma_{2,1}^3 = D_1 + \left(\frac{w_{1,2}^3}{2} \right)^2$$

K et D_1 coïncident dans le cas holonome.

Déplacement du trièdre de Darboux. Ribaucour attaché à une courbe intégrale (trièdre encore déterminé par la tangente \vec{t} , la normale $\vec{\Lambda}_3$, la normale géodésique \vec{G})

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{1}{R} [\vec{\Lambda}_3 \cos \tilde{\omega} + \vec{G} \sin \tilde{\omega}] \\ \frac{d\vec{G}}{ds} = -\frac{\sin \tilde{\omega}}{R} \vec{t} - \left(T - \frac{d\tilde{\omega}}{ds} \right) \vec{\Lambda}_3 \\ \frac{d\vec{\Lambda}_3}{ds} = -\frac{\cos \tilde{\omega}}{R} \vec{t} + \left(T - \frac{d\tilde{\omega}}{ds} \right) \vec{G} \end{array} \right.$$

d'où les expressions des :

Courbure géodésique :

$$\frac{\sin \tilde{\omega}}{R} = \gamma_{1,1}^2 u^1 + \gamma_{1,2}^2 u^2 - \frac{1}{u^2} \frac{du^1}{ds} = \gamma_{1,1}^2 \cos \varphi + \gamma_{1,2}^2 \sin \varphi + \frac{d\varphi}{ds}.$$

(1) Cfr. A. VOSS, DALL'ACQUA et D. SINTZOV, loc. cit.

(2) Cfr. A. VOSS, DALL'ACQUA et D. SINTZOV, loc. cit.

Torsion géodésique:

$$T - \frac{d\tilde{\omega}}{ds} = \gamma_{2,1}^3 (u^1)^2 + (\gamma_{2,2}^3 - \gamma_{1,1}^3) u^1 u^2 - \gamma_{1,2}^3 (u^2)^2.$$

Celle de la courbure normale est évidemment retrouvée.

Avec un choix particulier de $\vec{\Lambda}_1, \vec{\Lambda}_2$, pris tangents aux lignes de courbure de 1^{ère} espèce, on aura:

$$\begin{cases} \frac{\cos \tilde{\omega}}{R} = N_1 \cos^2 \alpha + N_2 \sin^2 \alpha \\ T - \frac{d\tilde{\omega}}{ds} = (N_1 - N_2) \sin \alpha \cos \alpha - \frac{w_{1,2}^3}{2} \quad (1) \end{cases}$$

(α = angle de la tangente à la courbe intégrale avec la 1^{ère} direction principale), la 2^{ème} de ces formules généralisant celle d'Ossian Bonnet (de la théorie des surfaces) et permettant de retrouver les *torsions des lignes asymptotiques* ⁽²⁾ (dont le plan osculateur est tangent à la V_3^2 : $\tilde{\omega} = \frac{\pi}{2}$, $\frac{\cos \tilde{\omega}}{R} = 0$):

$$T^2 + w_{1,2}^3 T + K = 0.$$

$T_1 T_2 = K$ (généralisation de la formule d'Enneper); $T_1 + T_2 = -w_{1,2}^3$.

Par M, passent deux courbes intégrales situées dans le plan tangent, elles sont tangentes aux lignes asymptotiques; si R désigne le rayon de courbure d'une de celles-ci, R₀ celui de la courbe intégrale plane précédente qui lui est tangente:

$$R_0 = \frac{2}{3} R \left[1 - \frac{w_{1,2}^3}{w_{1,2}^3 + \sqrt{-N_1 N_2}} \right]$$

(généralisation de la *formule de Beltrami*).

La torsion géodésique s'annule le long des lignes de courbure de 2^{ème} espèce ⁽²⁾, et les *géodésiques* s'obtiennent comme lignes de courbure géodésique nulle.

L'expression de la courbure géodésique donnée ci dessus et conduisant aussitôt à:

$$\frac{\sin \tilde{\omega}}{R} - \frac{d\varphi}{ds} = \vec{\Lambda}_1 d\vec{\Lambda}_2$$

permet de retrouver vectoriellement le THÉORÈME D'OSSIAN BONNET relatif à l'intégrale de la courbure géodésique prise le long d'une courbe fermée

(1) Cfr. R. INZINGER, loc. cit., p. 225.

(2) Cfr. DALL'ACQUA, loc. cit.

Γ d'une surface S , courbe que l'on puisse réduire à un point de S par déformation continue de Γ sur S :

$$\int_{\Gamma} \frac{\sin \tilde{\omega}}{R} ds = 2\pi - \iint_A \frac{d\Sigma}{R_1 R_2}$$

(A) étant l'aire limitée sur S par le contour Γ et Σ l'élément d'aire de S au point M où les rayons de courbure principaux sont R_1 et R_2 ; en permettant simultanément de l'étendre au cas de la V_3^2 .

Partons en effet d'une courbe intégrale fermée C de la V_3^2 ; l'intégrale curviligne

$$\int_C \frac{\sin \tilde{\omega}}{R} - d\varphi = \int_C \vec{\Lambda}_1 d\vec{\Lambda}_2 = \int_C \sum_i \vec{\Lambda}_1 \frac{\partial \vec{\Lambda}_2}{\partial x^i} dx^i$$

transformée, à l'aide de la formule de Green-Riemann, en une intégrale double prise sur une portion de surface S passant par C et limitée à C , devient:

$$\begin{aligned} \iint_S \sum_{i,j} \left\{ \frac{\partial \vec{\Lambda}_1}{\partial x^i} \frac{\partial \vec{\Lambda}_2}{\partial x^j} - \frac{\partial \vec{\Lambda}_1}{\partial x^j} \frac{\partial \vec{\Lambda}_2}{\partial x^i} \right\} dx^i dx^j = \\ = - \iint_S (\gamma_{1,2}^3 \gamma_{2,1}^3 - \gamma_{1,1}^3 \gamma_{2,2}^3) ds^1 ds^2 \end{aligned}$$

d'où:

$$\boxed{\int_C \frac{\sin \tilde{\omega}}{R} - d\varphi = - \iint_S K ds^1 ds^2}.$$

Dans le cas d'holonomie, en prenant pour surface S la surface elle-même et en remarquant que $ds^1 ds^2$ devient l'élément d'aire sur la surface, on retrouve bien la formule d'Ossian Bonnet puisqu'alors courbure totale et courbure de Gauss sont confondues.

Dans le cas de non-holonomie, cette formule se trouve ainsi généralisée: considérant une courbe intégrale fermée C d'une V_3^2 et une portion de surface quelconque S passant par C et limitée à elle, K ne représente pas la courbure gaussienne de S en un de ses points M , mais la courbure gaussienne de la V_3^2 calculée en M ; $ds^1 ds^2$ ne représente pas davantage l'élément superficiel de S , mais le produit des éléments d'arc sur la V_3^2 .

SECONDE INDICATRICE DE LA V_3^2 (1).

La développable circonscrite à la V_3^2 le long d'une courbe intégrale C , a pour génératrice la droite MP vérifiant:

$$\vec{\Lambda}_3 \cdot \vec{MP} = 0, \quad \frac{d\vec{\Lambda}_3}{ds} \cdot \vec{MP} = 0$$

par suite normale au vecteur $\frac{d\vec{\Lambda}_3}{ds}$ dans le plan tangent à la variété. Son indicatrice se compose donc des deux parallèles à cette direction passant par les points I et I' de la tangente MT à C tels que

$$\overline{MI}^2 = \overline{MI'}^2 = \left| \frac{R}{\cos \tilde{\omega}} \right| = \frac{1}{N}$$

(en vertu du théorème de Meusnier appliqué à la développable).

L'angle β des directions \vec{t} et $\frac{d\vec{\Lambda}_3}{ds}$ se calcule aisément:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{T}{N}$$

ainsi que la distance de M aux deux droites constituant l'indicatrice de la développable:

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \cos \beta = \sqrt{\frac{N}{N^2 + T^2}}.$$

En supposant la variété V_3^2 , rapportée à ses lignes de courbure de 1^{ère} espèce, l'équation cartésienne des 2 droites mises sous forme normale, sera:

$$v^1 y_1 + v^2 y_2 = \pm w$$

avec:

$$\frac{v^1}{-N_1 u^1 + \gamma_{1,2}^1 u^2} = \frac{v^2}{-\gamma_{1,2}^2 u^1 - N_2 u^2} = \frac{w}{\sqrt{N}}.$$

Lorsque MT tourne autour de M dans le plan tangent à la V_3^2 , l'indicatrice de la développable associée enveloppe une courbe d'équation tangentielle:

$$\frac{(v^1)^2}{N_1} + \frac{(v^2)^2}{N_2} = \frac{K}{D_1} w^2.$$

(1) Cfr. R. INZINGER, loc. cit., p. 225.

C'est la conique $N_1(y_1)^2 + N_2(y_2)^2 = \frac{D_1}{K}$ homothétique par rapport à M (rapport $\frac{D_1}{K}$) à la 1^{ère} indicatrice de la V_3^2 ; elle constitue la 2^{ème} indicatrice de la V_3^2 . Toutes deux ne se confondent que dans le cas d'holonomie.

Leur ensemble détermine le voisinage du 2^{ème} ordre (Pfaffsche Kappe)⁽¹⁾ de la variété non holonome; c'est d'ailleurs aussi celui de la « variété adjointe » (n'en différant au point M que par le signe de l'invariant $w_{1,2}^3$).

GÉNÉRALISATIONS AU CAS DES V_n^m :

Avant de passer au cas des V_n^{n-1} , remarquons qu'un certain nombre de notions relatives à la théorie des surfaces se généralise au cas des variétés les plus générales V_n^m plongées dans un espace de Riemann.

Ce qui concerne la courbure normale d'une courbe intégrale de la V_n^m relativement à une normale $\vec{\Lambda}_{b'}$:

$$N_{b'} = \frac{d\vec{t}}{ds} \cdot \vec{\Lambda}_{b'} = - \sum_{b,k} v_{b,k}^{b'} u^b u^k$$

$$\left(v_{b,b}^{b'} = \gamma_{b,b}^{b'} \quad , \quad v_{b,k}^{b'} = \gamma_{b,k}^{b'} + \gamma_{k,b}^{b'} \quad , \quad u^b = \frac{ds^b}{ds} \right),$$

l'existence de $(n-m)$ secondes formes fondamentales et par suite celle de $(n-m)$ indicatrices de première espèce; l'invariance de la courbure normale moyenne (relativement à une normale $\vec{\Lambda}_{b'}$) de m courbes orthogonales quelconques de la V_n^m se trouvent déjà envisagées dans ma note précédemment citée.

La définition des courbes asymptotiques (dont le plan osculateur est tangent à la variété), des courbes géodésiques (dont le plan osculateur est normal à la variété) s'étend immédiatement aux V_n^m ⁽²⁾.

On peut encore généraliser la notion de courbure de Gauss de la façon suivante: on nommera COURBURE DE GAUSS D'UNE FACETTE de la V_n^m , définie par deux déplacements $d\vec{M} = \sum_b ds^b \vec{\Lambda}_b$, $\delta\vec{M} = \sum_b \delta s^b \vec{\Lambda}_b$, RELATIVEMENT À UNE NORMALE $\vec{\Lambda}_{b'}$, le rapport des éléments superficiels des parallélogrammes construits sur les déplacements de l'image sphérique $d\vec{\Lambda}_{b'}$, $\delta\vec{\Lambda}_{b'}$ d'une part, sur $d\vec{M}$, $\delta\vec{M}$ d'autre part.

(1) Cfr. R. INZINGER, loc. cit., p. 225.

(2) Cfr. G. VRANCEANU, *Les Espaces non holonomes*. « Mém. des Sc. Math. », 76, p. 24, 1936.

Cette courbure gaussienne $K_{h,k}^{h'}$ est donnée par son carré :

$$(K_{h,k}^{h'})^2 = \frac{\sum_{k,h,a,b} (\gamma_{ab}^{h'} \gamma_{bk}^{h'} - \gamma_{ak}^{h'} \gamma_{bh}^{h'})^2 (ds^h \delta s^k - ds^k \delta s^h)^2}{\sum_{h,k} (ds^h \delta s^k - ds^k \delta s^h)^2}.$$

ce qui redonne bien, dans le cas de la V_3^2 , le carré de la courbure de Gauss $K = \gamma_{1,1}^3 \gamma_{2,2}^3 - \gamma_{1,2}^3 \gamma_{2,1}^3$.

M. E. Cartan avait déjà, à propos de l'étude des variétés holonomes à m dimensions plongées dans un espace de Riemann, proposé une définition géométrique de la courbure gaussienne bivectorielle d'une facette de la variété par un procédé généralisant celui de Gauss (1).

CAS DES V_n^{n-1} .

Courbure normale d'une courbe intégrale :

$$\frac{\cos \tilde{\omega}}{R} = N = - \sum_{h,k} v_{h,k}^n u^h u^k \quad (h, k = 1, 2, \dots, n-1).$$

Lignes de courbure de 1^{ère} espèce (réalisant maximi et minimi de N) :

$$\frac{\gamma_{1,1}^n ds^1 + \frac{1}{2} \sum_k v_{1,k}^n ds^k}{ds^1} = \dots = \frac{\gamma_{h,h}^n ds^h + \frac{1}{2} \sum_k v_{h,k}^n ds^k}{ds^h} = \dots$$

Si la V_n^{n-1} est rapportée à ses lignes de courbure de 1^{ère} espèce, on a :

$$\gamma_{h,h}^{n*} = -N_h, \quad v_{h,k}^{n*} = 0$$

1^{ère} indicatrice de la V_n^{n-1} , rapportée à ses lignes de courbure de 1^{ère} espèce :

$$N_1(y)^2 + \dots + N_h(y_n)^2 + \dots + N_{n-1}(y_{n-1})^2 = 1.$$

Lignes de courbure de 2^{ème} espèce, telles que le déplacement de l'image sphérique :

$$d\Lambda_n = \sum_{h,k} \gamma_{h,k}^n ds^k \Lambda_h$$

soit parallèle à celui du point

$$d\vec{M} = \sum_h ds^h \vec{\Lambda}_h :$$

$$\frac{\gamma_{1,1}^n ds^1 + \sum_k \gamma_{1,k}^n ds^k}{ds^1} = \dots = \frac{\gamma_{h,h}^n ds^h + \sum_k \gamma_{h,k}^n ds^k}{ds^h}.$$

(1) *La Géométrie des Espaces de Riemann.* « Mém. des Sc. Math. », 9, p. 51, 1925.

Torsion géodésique d'une courbe intégrale T ou projection du vecteur $\frac{d\vec{\Lambda}_n}{ds}$ sur le plan tangent à la V_n^{n-1} , normale à la tangente :

$$\frac{d\Lambda_n}{ds} = \sum_{h,k} \gamma_{h,k}^n u^k \vec{\Lambda}_h.$$

Le carré de la longueur de ce vecteur est :

$$N^2 + T^2 = \sum_h \left(\sum_k \gamma_{h,k}^n u^k \right)^2$$

d'où l'expression de

$$T^2 = \sum_h \left(\sum_k \gamma_{h,k}^n u^k \right)^2 - \left(\sum_{h,k} v_{h,k}^n u^h u^k \right)^2.$$

Courbure géodésique ou projection du vecteur $\frac{d\vec{t}}{ds}$ sur le plan tangent

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{t}}{ds} &= \sum_h \frac{d\vec{\Lambda}_h}{ds} u^h + \sum_h \vec{\Lambda}_h \frac{du^h}{ds} \\ &= - \sum_{h,k} v_{h,k}^n u^h u^k \vec{\Lambda}_n + \sum_a \left(\frac{du^a}{ds} - \sum_{h,k} v_{h,k}^a u^h u^k \right) \vec{\Lambda}_a. \end{aligned}$$

Le carré de cette courbure géodésique est donc :

$$\sum_a \left(\frac{du^a}{ds} - \sum_{h,k} v_{h,k}^a u^h u^k \right)^2 \quad (a, h, k = 1, 2, \dots, n-1).$$

Son annulation fournit les équations des géodésiques.

SECONDE INDICATRICE DE LA V_n^{n-1} :

La développable circonscrite à la V_n^{n-1} le long d'une courbe intégrale C, ou enveloppe des plans tangents à la V_n^{n-1} le long de C, est donnée par les équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\Lambda}_n \cdot \vec{MP} = 0 \\ \frac{d\vec{\Lambda}_n}{ds} \cdot \vec{MP} = 0. \end{array} \right.$$

C'est donc le lieu de l'hyperplan à $(n-2)$ dimensions passant par M et normal à la direction $\frac{d\vec{\Lambda}_n}{ds}$, dans le plan tangent; lorsque M décrit C.

L'indicatrice de cette développable se compose donc des 2 hyperplans à $(n - 2)$ dimensions, normaux à $\frac{d\vec{\Lambda}_n}{ds}$ dans le plan tangent, et passant par les points I et I' de la tangente MT à C, tels que $\overline{MI}^2 = \overline{MI'}^2 = \frac{1}{N}$.

L'angle β des directions t et $\frac{d\vec{\Lambda}_n}{ds}$ est encore donné par:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{T}{N}$$

et la distance de M aux 2 hyperplans constituant l'indicatrice de la développable est encore

$$\sqrt{\frac{N}{N^2 + T^2}}.$$

En supposant la variété V_n^{n-1} rapportée à ses lignes de courbure de 1^{ère} espèce, l'équation cartésienne des 2 hyperplans, mise sous forme normale est:

$$\sum_b v^b y_b = \pm w$$

où

$$\frac{v^1}{\sum_k \gamma_{1,k}^{n*} u^k} = \dots = \frac{v^b}{\sum_k \gamma_{b,k}^{n*} u^k} = \dots = \frac{w}{\sqrt{N}}$$

$$\gamma_{b,b}^{n*} = -N_b, \quad \gamma_{b,k}^{n*} = \frac{1}{2} w_{b,k}^n.$$

Lorsque MT tourne autour de M dans le plan tangent à la V_n^{n-1} , l'indicatrice de la développable associée enveloppe une hyperquadrique à $(n - 2)$ dimensions du plan tangent, dont l'équation tangentielle est obtenue par éliminations des u^b entre les rapports précédents et la relations $\sum_b (u^b)^2 = 1$. Elle constitue la seconde indicatrice de la V_n^{n-1} . Elle ne se confondrait avec la première que dans le cas d'holonomie, son équation faisant en effet intervenir — outre les n courbures principales —, les $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ coefficients de non holonomie $w_{b,k}^n$.

L'ensemble de ces deux indicatrices détermine le voisinage du 2 ordre de la variété $V_n^{n-1(1)}$.

(1) Je tiens à remercier ici bien vivement MM. E. Bompiani et E. Bortolotti qui ont bien voulu relire ce travail et me fournir, avec de précieux conseils, les renseignements bibliographiques.

Matematica. — *Images d'ensembles ordonnés. Polygones. Courbes.* Nota di M.me CHR. PAUC, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Cette Note doit être considérée comme une introduction à une étude des fonctionnelles introduites par M. M. Bouligand et Menger en Calcul des Variations en remplacement des intégrales qui font l'objet des théories classiques. Il s'agit de préciser un certain nombre de notions indispensables à une étude géométrique de recherche d'extrémantes, notions dont les principales ont été considérées pour la première fois par M. Fréchet dans sa thèse ⁽²⁾.

GÉNÉRALITÉS SUR LES ENSEMBLES ORDONNÉS. — \mathcal{S} étant un ensemble ordonné, u et v deux de ses éléments avec $u \leq v$, l'intervalle fermé $[uv]$, l'intervalle ouvert (uv) et les intervalles mixtes $(uv]$ et $[uv)$ se définissent respectivement ainsi

$$\begin{aligned} x \in [uv] &\sim u \leq x \leq v & , & & x \in (uv) &\sim u < x < v \\ x \in (uv] &\sim u < x \leq v & , & & x \in [uv) &\sim u \leq x < v. \end{aligned}$$

Soit t un élément quelconque de \mathcal{S} , nous désignons par t_g tout élément de \mathcal{S} précédant t : $t_g < t$, par t_d tout élément de \mathcal{S} suivant t : $t_d > t$.

Nous organisons \mathcal{S} en espace topologique en prenant comme voisinages de t les ensembles

$$\begin{aligned} (t_g t_d) &\text{ lorsque } t \text{ admet des } t_g \text{ et des } t_d \\ (t_g t) &\text{ lorsque } t \text{ admet des } t_g \text{ mais non des } t_d \\ [t t_d) &\text{ lorsque } t \text{ admet des } t_d \text{ mais non des } t_g \\ [t t) &\text{ lorsque } t \text{ n'admet ni } t_g \text{ ni } t_d \end{aligned}$$

\mathcal{S} est alors un espace de Hausdorff ⁽³⁾.

\mathcal{S}' étant un autre ensemble ordonné, par *similitude au sens large* entre \mathcal{S} et \mathcal{S}' nous entendons une relation S appliquant \mathcal{S} et \mathcal{S}' l'un sur l'autre et telle que pour deux couples quelconques de \mathcal{S} (x, x') (y, y')

$$x \leq y \rightarrow x' \leq y' \quad , \quad x \geq y \rightarrow x' \geq y'.$$

(1) Nella seduta del 20 febbraio 1938.

(2) « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », to. 22, 1906.

(3) FRÉCHET, *Les espaces abstraits*, Paris, 1928, p. 186.

A tout élément de \mathcal{S} (de \mathcal{S}') correspond par une telle relation un ensemble d'éléments de \mathcal{S}' (de \mathcal{S}) constituant un intervalle. \mathcal{S} est dite une similitude sans plus lorsqu'elle est biunivoque.

IMAGES D'ENSEMBLES ORDONNÉS DANS UN ENSEMBLE. — Considérons un ensemble de points H , L en désignant le sous-ensemble vide, et attribuons à tout élément x de \mathcal{S} un point $p(x)$ de H . L'image \mathcal{T} de \mathcal{S} ne peut plus, si la correspondance entre x et $p(x)$ n'est pas biunivoque être considérée comme un ensemble ordonné: c'est un *ensemble doué d'une loi de parcours* dont p est une représentation paramétrique; nous exprimons la dépendance entre p , \mathcal{S} et \mathcal{T} par la notation $\mathcal{T}:p(\mathcal{S})$. Si \mathcal{S} possède un élément initial, son image par p est appelée origine de \mathcal{T} ; si \mathcal{S} possède un élément final, son image par p est appelée extrémité de \mathcal{T} ; \mathcal{T} est dite fermée lorsqu'elle admet une origine et une extrémité confondues. a étant un point de H nous désignons par $[p(x) = a]$ l'Urbildmenge de a , c'est-à-dire l'ensemble des éléments x de \mathcal{S} tels que $p(x) = a$; a est un point de \mathcal{T} lorsque cet ensemble est non vide. Nous désignons l'ensemble des points de \mathcal{T} ou *support* de \mathcal{T} par $|\mathcal{T}|$; quand aucune confusion n'est possible au lieu de $a \in |\mathcal{T}|$, nous écrivons plus brièvement $a \in \mathcal{T}$. La *représentation* p de \mathcal{T} est dite *propre* lorsque, quelque soit $a \in \mathcal{T}$, $[p(x) = a]$ ne contient aucun intervalle fermé $[x_1, x_2]$ avec $x_1 < x_2$.

Définition de l'égalité $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$. Notion de « point sur \mathcal{T} ». — Soient p et p' deux correspondances appliquant respectivement les ensembles ordonnés \mathcal{S} et \mathcal{S}' dans H ; nous posons que $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$ lorsqu'il existe entre \mathcal{S} et \mathcal{S}' une similitude au sens large S telle que

pour tout couple (x, x') de \mathcal{S} : $p(x) = p'(x')$ (Relation d'application)

p et p' sont alors deux représentations paramétriques du même élément géométrique $\mathcal{T}^{(1)}$. Lorsque p et p' sont des représentations propres, une relation S réalisant cette condition est nécessairement une similitude.

A cette définition se relie la notion suivante: $p(\mathcal{S})$ étant une représentation paramétrique quelconque de \mathcal{T} et x un élément de \mathcal{S} , nous convenons de considérer à côté du point $p(x)$ de H un nouveau point \tilde{p} dit

(1) Désormais la notion d'image d'un ensemble ordonné a un sens précis. Nous n'en donnons pas de définition formelle, mais les conventions introduites suffisent à assurer son maniement, ce qui du point de vue mathématique, seul présente de l'intérêt. Une définition formelle consisterait, par exemple, à appeler image \mathcal{T} d'un ensemble ordonné \mathcal{S} par p , la classe de toutes les représentations paramétriques p' équivalentes à p en vertu de la convention qui vient d'être posée; c'est ainsi que M. M. MORSE dans son article du « Bull. of the Am. Math. Soc. », december 1936, p. 920 définit une courbe comme une classe (dans son cas, il s'agit d'ailleurs d'un ensemble) de représentations paramétriques équivalentes. La même remarque vaut pour la notion de « point sur \mathcal{T} » définie quelques lignes plus loin.

point sur \mathcal{C} dont nous exprimons la liaison avec p et x par la notation $\tilde{p}:p(x)$. Si $\tilde{p}(\mathcal{S})$, $\tilde{p}'(\mathcal{S}')$ sont deux représentations paramétriques de \mathcal{C} , x et y' deux éléments appartenant respectivement à \mathcal{S} et \mathcal{S}' et $\tilde{p}:p(x)$ $\tilde{p}':p'(y')$, nous posons que $\tilde{p} = \tilde{p}'$ lorsqu'il existe entre \mathcal{S} et \mathcal{S}' une similitude au sens large associant x et y' et satisfaisant à la relation d'application; par suite alors $p(x) = p'(y')$; le point $p = p(x)$ de H correspondant au point \tilde{p} sur \mathcal{C} est appelé le support de \tilde{p} et nous écrivons $p = |\tilde{p}|$. L'ensemble $\tilde{\mathcal{C}}$ de ces points \tilde{p} s'organise en ensemble ordonné par la convention suivante: $\tilde{p} < \tilde{p}'$ ou $\tilde{p}' > \tilde{p}$ lorsque S désignant une similitude au sens large entre \mathcal{S} et \mathcal{S}' satisfaisant à la relation d'application, tout élément x' de \mathcal{S}' adjoint à x par S précède y' . Ces définitions se simplifient lorsqu'on compare des \tilde{p} définis à l'aide de la même représentation paramétrique; soit $\tilde{p}_1:p(x_1)$ $\tilde{p}_2:p(x_2)$, x_1 et x_2 étant deux éléments de \mathcal{S} , il est aisé de vérifier que

$$(\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2) \sim ((x)(x \varepsilon [x_1 x_2]) \rightarrow (p(x) = p(x_1) = p(x_2)))$$

$$(\tilde{p}_1 \geq \tilde{p}_2) \sim (x_1 \geq x_2)$$

$$(\tilde{p}_1 > \tilde{p}_2) \sim (x_1 > x_2) \& (\overline{\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2})$$

Enfin si p est une représentation propre $(\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2) \sim (x_1 = x_2)$, $(\tilde{p}_1 > \tilde{p}_2) \sim (x_1 > x_2)$; cette similitude entre le domaine de définition d'une représentation propre de \mathcal{C} et l'ensemble $\tilde{\mathcal{C}}$ s'explique si l'on remarque que la correspondance $p = |\tilde{p}|$ est une représentation propre de \mathcal{C} . Nous venons donc d'indiquer un moyen d'obtenir pour toute image \mathcal{C} une représentation propre.

Relations d'inclusion entre les \mathcal{C} . Confinalité. — Reprenant la notations introduites au début de l'alinéa précédent, nous posons que

$\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ ou $\mathcal{C} \supseteq \mathcal{C}'$ lorsque \mathcal{S} admet un sous-ensemble \mathcal{S}^* tel que $\mathcal{C}' = \mathcal{C}^*:p(\mathcal{S}^*)$

$\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ ou $\mathcal{C} \supset \mathcal{C}'$ lorsque l'on a $\mathcal{C} \supseteq \mathcal{C}'$ sans avoir $\mathcal{C}' \supseteq \mathcal{C}$.

Parmi les $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ citons les *segments* de \mathcal{C} images par p des intervalles fermés $[uv]$ de \mathcal{S} ; deux points sur \mathcal{C} : \tilde{p} et \tilde{p}' ($\tilde{p}' \leq \tilde{p}$) définissent sans ambiguïté un segment de \mathcal{S} , à savoir l'image dans la correspondance $p = |\tilde{p}|$ de l'intervalle fermé $[\tilde{p}' \tilde{p}]$ de $\tilde{\mathcal{C}}$; nous désignons ce segment par $\mathcal{C}_{\tilde{p}' \tilde{p}}$.

\mathcal{C} et \mathcal{C}' sont dits *confinaux* lorsqu'ils admettent tous deux une origine et une extrémité coïncidant respectivement.

Opérations sur les \mathcal{C} . — \mathcal{S} étant un ensemble ordonné, nous désignons par $-\mathcal{S}$ l'ensemble ordonné qu'on obtient en renversant l'ordre des éléments de \mathcal{S} ; si $\mathcal{C}:p(\mathcal{S})$ nous représentons par $-\mathcal{C}$ l'image de $-\mathcal{S}$ par p — $\mathcal{C}:p(-\mathcal{S})$.

Pour définir la somme $\mathcal{C}'' = \mathcal{C} + \mathcal{C}'$ où $\mathcal{C}':p'(\mathcal{S}')$ nous commençons par choisir pour \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux représentations paramétriques q et q' $\mathcal{C}:q(\mathcal{S}_0)$

$\mathcal{C}' : q'(\mathcal{S}'_0)$ telles que \mathcal{S}_0 et \mathcal{S}'_0 soient disjoints, puis nous posons $\mathcal{C}'' : q''(\mathcal{S}_0 + \mathcal{S}'_0)^{(1)}$ où $q''(t) = q(t)$ si $t \in \mathcal{S}_0$, $q''(t) = q'(t)$ si $t \in \mathcal{S}'_0$. La somme $\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 + \dots + \mathcal{C}_n$ de n images d'ensembles ordonnés se définit de proche en proche à partir de la gauche ce qui conduit à

$$\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 + \dots + \mathcal{C}_n = \underbrace{(\dots((\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2) + \mathcal{C}_3) + \dots)}_{(n-2)} + \mathcal{C}_n.$$

Si $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2 = \dots = \mathcal{C}_n$, nous écrivons en abrégé $n \cdot \mathcal{C}$ au lieu de $\mathcal{C} + \mathcal{C} + \dots + \mathcal{C}$.

Polygones. — Un polygone de H est l'image dans H d'un ensemble ordonné fini, soit $P : p(1, 2, \dots, m)$ et se représente habituellement par $P : (p_1, p_2, \dots, p_m)$. p est une représentation propre si $p_{i+1} \neq p_i$ pour $i = 1, 2, \dots, m-1$.

Courbes. — Une courbe de l'ensemble H au sens de M. Menger est l'image dans H d'un intervalle fermé de nombres, soit $\mathcal{C} : p([\alpha\beta])$ ou plus brièvement $\mathcal{C} : p[\alpha\beta]$. p est une représentation propre lorsque, quelque soit le point a de \mathcal{C} , l'Urbildmenge $[p(\xi) = a]$ est dépourvue de points intérieurs.

Un polygone $P \subseteq \mathcal{C}$ est dit un sous-polygone de \mathcal{C} ; un sous-polygone de $I = [\alpha\beta]$ considéré comme courbe est appelé une subdivision de I . Tout sous-polygone P de \mathcal{C} est l'image par p d'une subdivision de I $\Sigma : (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)$ $P : p(\Sigma)$; une telle subdivision définit en outre un sous-polygone de $\tilde{\mathcal{C}}$ $\tilde{P} : (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_m)$ où $\tilde{p}_i : p(\gamma_i)$ pour $i = 1, 2, \dots, m$; nous rappelons la liaison entre Σ et \tilde{P} par la notation $\tilde{P} : \tilde{p}(\Sigma)$.

IMAGES D'ENSEMBLES ORDONNÉS DANS UN ESPACE DISTANCIÉ. — Supposons que H soit le support d'un espace distancié H , $\delta(ab)$ désignant la distance de deux de ses points a et b . Nous pouvons définir une distance $\delta(\mathcal{C}\mathcal{C}')$ entre $\mathcal{C} : p(\mathcal{S})$ et $\mathcal{C}' : p'(\mathcal{S}')$ comme la borne inférieure des nombres δ tels que pour chacun d'eux, il existe une similitude au sens large S entre \mathcal{S} et \mathcal{S}' satisfaisant à

$$(x, x') \in S \rightarrow \delta(p(x)p'(x')) < \delta.$$

Cette distance $\delta(\mathcal{C}\mathcal{C}')$ jouit des propriétés de la distance de deux ensembles de H au sens de Hausdorff [Mengenlehre, p. 146]: elle est une fonction symétrique, non négative de \mathcal{C} et de \mathcal{C}' , nulle quand $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$ et vérifiant l'inégalité triangulaire, mais $\delta(\mathcal{C}\mathcal{C}') = 0$ n'entraîne pas en général $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$.

(1) La somme $\mathcal{S}_0 + \mathcal{S}'_0$ se trouve définie p. 44 de la *Mengenlehre* de HAUSDORFF.

$I = [\alpha\beta]$ étant un intervalle fermé de nombres, une suite $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n, \dots$ de subdivisions de I est dite distinguée ⁽¹⁾ lorsque $\lim \delta(\Sigma_n I) = 0$.

Une suite $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ de sous-polygones de la courbe \mathcal{C} de H est appelée distinguée lorsque p étant une représentation propre pour \mathcal{C} , $\mathcal{C} : p[\alpha\beta]$, il existe une suite distinguée de subdivisions de $[\alpha\beta]$ $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n, \dots$ telle que $P_n : p(\Sigma_n)$. De la même façon, une suite $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \dots, \tilde{P}_n, \dots$ de sous-polygones de $\tilde{\mathcal{C}}$ est appelée distinguée lorsque, p étant une représentation propre pour \mathcal{C} , $\mathcal{C} : p[\alpha\beta]$, il existe une suite distinguée de subdivisions de $[\alpha\beta]$, $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n, \dots$ telle que $\tilde{P}_n : \tilde{p}(\Sigma_n)$. Ces deux définitions sont indépendantes de la représentation propre p choisie pour \mathcal{C} ; il n'en serait plus de même si l'on n'assujettissait pas p à être propre.

IMAGES CONTINUES D'ENSEMBLES ORDONNÉS DANS UN ESPACE DISTANCIÉ. — Soit $\tau : p(\mathcal{S})$ l'image de \mathcal{S} par la fonction continue p : quelque soit $a \in H$, $[p(x) = a]$ est fermé et la correspondance $R(a) = [p(x) = a]$ est telle que $(n = 0, 1, 2, \dots) (a_n \in H) \& (\lim a_n = a_0) \rightarrow R(a) \supseteq \limsup R(a_n)$.

Supposons désormais \mathcal{S} compact ⁽¹⁾: R est semi-continue supérieurement ⁽²⁾; appelons \mathcal{F} la famille des Urbildmengen des points de τ et représentons pour $x \in \mathcal{S}$ par $F(x)$ l'ensemble de \mathcal{F} contenant x ; F est semi-continue supérieurement ou encore: \mathcal{F} est un oberhalb stetiges Zerlegungssystem de \mathcal{S} ⁽²⁾.

Organisons \mathcal{F} en espace voisinage \mathcal{F}) par la convention

$$\Delta \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } F_0 \in \mathcal{F}, \text{ les voisinages } \mathcal{U}(F_0) \text{ de } F_0 \text{ dans } \mathcal{F} \text{ s'obtiennent en prenant un} \\ \text{voisinage quelconque } U(F_0) \text{ de } F_0 \text{ dans } \mathcal{S} \text{ et en posant} \\ \mathcal{U}(F_0) = \text{famille des } F' \in \mathcal{F} \text{ tels que } F' \cdot U(F_0) \supset L \end{array} \right.$$

alors: La correspondance entre a et son Urbildmenge considérée comme élément de \mathcal{F}) est une homéomorphie; par conséquent la connaissance de la famille \mathcal{F} suffit, par utilisation de Δ , pour étudier les propriétés topologiques de τ .

THÉORÈME I. — La condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille \mathcal{F} de sous-ensembles d'un intervalle de nombres $I = [\alpha\beta]$ soit la famille des Urbildmengen d'une image continue de I dans un espace distancié est que \mathcal{F} soit un oberhalb stetiges Zerlegungssystem de I ⁽³⁾.

Courbes. — Nous entendons avec M. Menger (loc. cit.) par courbe de l'espace H), l'image continue $\mathcal{C} : p[\alpha\beta]$ d'un intervalle fermé de nombres.

(1) Par subdivision de I , M. Menger (« C. R. Paris », to. 202, p. 1008, 1936) entend une subdivision finale de I $\Sigma : (\alpha = \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{m+1} = \beta)$ et par norme $v(\Sigma)$ le $\max \cdot (\gamma_i + 1 - \gamma_i)$ pour $i = 0, 1, \dots, m$. Une suite $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n, \dots$ de subdivisions finales de I est dite distinguée à son sens quand $\lim v(\Sigma_n) = 0$; notre définition sur ce point est équivalente à la sienne.

(2) Exemple: \mathcal{S} est l'ensemble des nombres transfinis de première classe.

(3) Voir: HAHN, *Reelle Funktionen*. Leipzig, 1932, p. 148 et suivantes.

THÉOREME II. — Parmi les diverses représentations continues d'une courbe de H) à partir d'un intervalle fermé de nombres, il en existe toujours qui sont propres; citons parmi celles-ci les représentations intrinsèques de Fréchet et de Morse⁽¹⁾.

La distance $\delta(\mathcal{C}\mathcal{C}')$ de deux courbes $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ de H) satisfait à tous les axiomes de la distance

$$\delta(\mathcal{C}\mathcal{C}') = 0 \rightarrow \mathcal{C} = \mathcal{C}'.$$

THÉOREME III. — \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 étant deux courbes de H), δ un nombre $\geq \delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$, il existe toujours deux représentations de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 à partir d'un même intervalle, soit $\mathcal{C}_1 : p_1[\alpha\beta]$ et $\mathcal{C}_2 : p_2[\alpha\beta]$ telles que $\delta(p_1(\sigma) p_2(\sigma)) \leq \sigma$ pour $\alpha \leq \sigma \leq \beta$.

Si $\delta > \delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$, p_1 et p_2 peuvent toujours être choisies propres.

Dans ce dernier cas, la correspondance entre $p_1(\sigma)$ et $p_2(\sigma)$ lorsque σ parcourt $[\alpha\beta]$ est une homéomorphie appliquant \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 l'une sur l'autre, on en déduit que $\delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ est bien la distance de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 au sens de M. Fréchet lequel s'est limité, dans sa définition, à la considération de représentations propres⁽²⁾.

THÉOREME IV. — $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n, \dots$ étant une suite de courbes convergeant vers une courbe \mathcal{C}_0 , il existe pour chacune d'elles une représentation à partir d'un même intervalle $[\alpha\beta]$ avec $\alpha < \beta$ $\mathcal{C}_n : p_n[\alpha\beta]$ $\mathcal{C}_0 : p_0[\alpha\beta]$ telle que :

1) Si \mathcal{C}_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$) n'est pas réduite à un point, p_i en soit une représentation propre;

2) $\lim p_n = p_0$.

Sous-courbes d'une courbe. — Soit \mathcal{C} la courbe de H) image de $I = [\alpha\beta]$ par la correspondance continue p ; \mathcal{S}^* étant un sous-ensemble de I , $p(\mathcal{S}^*)$ peut dans certains cas être aussi une courbe de H), par exemple si \mathcal{S}^* est un sous-intervalle $[\gamma' \gamma'']$ de I ; $p(\mathcal{S}^*)$ est alors un segment de \mathcal{C} ; il en est de même si \mathcal{S}^* est une somme de sous-intervalles $[\gamma'_i \gamma''_i]$ de I $\mathcal{S}^* = [\gamma'_1 \gamma''_1] + [\gamma'_2 \gamma''_2] + \dots + [\gamma'_m \gamma''_m]$ tels que $\gamma'_1 \leq \gamma''_1 \leq \gamma'_2 \leq \dots \leq \gamma'_m \leq \gamma''_m$ et $p(\gamma''_i) = p(\gamma'_{i+1})$ pour $i = 1, 2, \dots, m-1$. $p(\mathcal{S}^*)$ est dite dans ce cas une sous-courbe élémentaire de \mathcal{C} , elle résulte de la juxtaposition de segments $S_1 : p[\gamma'_1 \gamma''_1]$, $S_2 : p[\gamma'_2 \gamma''_2]$, \dots , $S_m : p[\gamma'_m \gamma''_m]$ qui jouissent de la propriété que l'extrémité de S_i ($i = 1, 2, \dots, m-1$) est l'origine de S_{i+1} .

Nous appelons d'une façon générale sous-courbe de \mathcal{C} une courbe $\mathcal{C}^* \subseteq \mathcal{C}$; une représentation paramétrique commode de ces courbes s'obtient ainsi: soit $\mathcal{S}^* \subseteq I$ tel que $\mathcal{C}^* : p(\mathcal{S}^*)$; formons $I - \mathcal{S}^*$ et décomposons-le en ses composants $I - \mathcal{S}^* = \Sigma \Gamma$; chaque Γ est un intervalle et on démontre que

(1) FRÉCHET, « Journal de Math. p. et app. », to. IV, p. 281, 1925; MORSE, loc. cit., p. 915.

(2) Cfr. JOSEFA v. SCHWARZ, « Math. Ann. », to. 115, pp. 275-277, 1938.

si γ' et γ'' sont ses bornes $p(\gamma') = p(\gamma'')$. Définissons alors sur I la fonction p^* de la manière suivante

$$\text{si } \tau \in \mathcal{S}^* \quad p^*(\tau) = p(\tau) \quad \text{si } \tau \text{ non } \in \mathcal{S}^* \quad p^*(\tau) = p(\gamma') = p(\gamma'')$$

γ' et γ'' représentant les bornes de l'intervalle Γ contenant τ . Désormais $\mathcal{C}^*: p^*[\alpha\beta]$. Si nous remarquons que les fonctions p^* correspondant aux diverses sous-courbes de \mathcal{C} sont également continues, par application d'une proposition d'Ascoli-Arzelà⁽¹⁾ nous parvenons au

THÉOREME V. — *La famille \mathcal{C}^* des sous-courbes d'une courbe \mathcal{C} est compacte en soi.*

Un segment fermé $p[\alpha'\beta']$ d'une courbe $\mathcal{C}: p[\alpha\beta]$ non réduit à un point est dit une bouche: $p(\alpha') = p(\beta')$. Réduire cette boucle, c'est substituer à \mathcal{C} la sous courbe confinale $\mathcal{C}' + \mathcal{C}''$ où $\mathcal{C}': p[\alpha\alpha']$ $\mathcal{C}'': p[\beta'\beta]$. La sous-courbe élémentaire de \mathcal{C} la plus générale s'obtient par réduction d'un nombre fini de boucles à partir d'un segment quelconque de \mathcal{C} .

THÉOREME VI. — *Toute sous-courbe d'une courbe \mathcal{C} est limite d'une suite de sous-courbes élémentaires de \mathcal{C} .*

Arcs. — L'arc défini en topologie comme l'image d'un segment par homéomorphie se caractérise pour nous comme une courbe jouissant de l'une ou l'autre des deux propriétés équivalentes suivantes:

- 1) Elle n'admet pas de boucles;
- 2) Elle n'admet pas de sous-courbe confinale distincte d'elle même.

THÉOREME VII. — *Toute courbe \mathcal{C} admet comme sous-courbe un arc confinal⁽²⁾.*

Corollaire: Toute courbe \mathcal{C} admet comme sous-courbe un arc ayant comme origine et extrémité deux quelconques de ses points.

THÉOREME VIII. (du à A. Wald). — *Toute courbe \mathcal{C} est limite d'une suite de ses sous-courbes confiniales dont chacune est somme d'un nombre fini d'arcs.*

SUITES DISTINGUÉES DE SOUS-POLYGONES D'UNE COURBE DE H). — Nous avons déjà introduit la notion de suite distinguée de sous-polygones d'une courbe d'un ensemble; la même définition s'applique pour une courbe d'un espace distancié, mais nous pouvons lui substituer la suivante qui ne fait pas intervenir de représentation particulière de la courbe: une suite $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ de sous-polygones d'une courbe \mathcal{C} de H) est dite distinguée lorsque $\lim \delta(P_n \mathcal{C}) = 0$. Cette notion a un caractère topologique.

(1) Proposition énoncée par Arzelà dans le cas de courbes d'un espace euclidien mais généralisable immédiatement à un espace distancié. Voir FRÉCHET, « Journal de Math. p. et app. », to. IV, p. 289, 1925.

(2) Cfr.: Théorème de Kaluszay, KEREKJARTO, *Vorl. üb. Topologie*, p. 103, 1923.

Matematica. — *Sulle superficie razionali a sezioni iperpiane canoniche e su un paradosso relativo alle loro singolarità.* Nota I di S. FAEDO, presentata dal Socio F. ENRIQUES.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulle superficie razionali a sezioni iperpiane canoniche e su un paradosso relativo alle loro singolarità.* Nota II di S. FAEDO, presentata dal Socio F. ENRIQUES.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Il secondo principio di reciprocità e le sue applicazioni al calcolo delle deformazioni permanenti.* Nota II di G. COLONNETTI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio G. FUBINI.

Riprendiamo in considerazione l'arco reticolare di cui ci siamo già occupati nella Nota IV « Su l'equilibrio elastico dei sistemi in cui si verificano anche deformazioni non elastiche » ⁽²⁾.

E manteniamo ferma l'ipotesi, già fatta in quell'occasione, che le deformazioni plastiche si siano verificate precisamente (ed esclusivamente) nelle due aste sovrabbondanti; il che naturalmente non vuol poi dir altro se non che noi abbiamo assunte come sovrabbondanti proprio quelle due aste in cui prevedevamo che si sarebbero verificate le deformazioni plastiche.

Immaginiamo ora che sull'arco si venga ad annullare la sollecitazione esterna.

Le deformazioni plastiche naturalmente permangono. Ne consegue uno stato di coazione, vale a dire una distribuzione di sforzi nelle singole aste, che si può immediatamente calcolare, sia per differenza tra gli sforzi indicati nelle figg. 3 e 2 della Nota citata, sia risolvendo a nuovo le equazioni (3') della stessa Nota nella ipotesi che tutte le S_p sian nulle e che le \bar{s} abbiano i valori ormai noti.

Da questa distribuzione di sforzi, in equilibrio per forze esterne tutte nulle, si passa con tutta facilità al calcolo di quelle che, nel linguaggio corrente fra i tecnici, si chiaman le deformazioni permanenti dell'arco.

(1) Nella seduta del 6 febbraio 1938.

(2) G. COLONNETTI, *Su l'equilibrio elastico dei sistemi in cui si verificano anche deformazioni non elastiche.* Nota IV. « Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei », ser. 6^a, vol. XXV (1° sem. 1937).

Il calcolo è rappresentato in fig. 1.

Sullo schema della travatura, riprodotto in alto, si vedono indicati i valori delle deformazioni sia plastiche che elastiche delle singole aste,

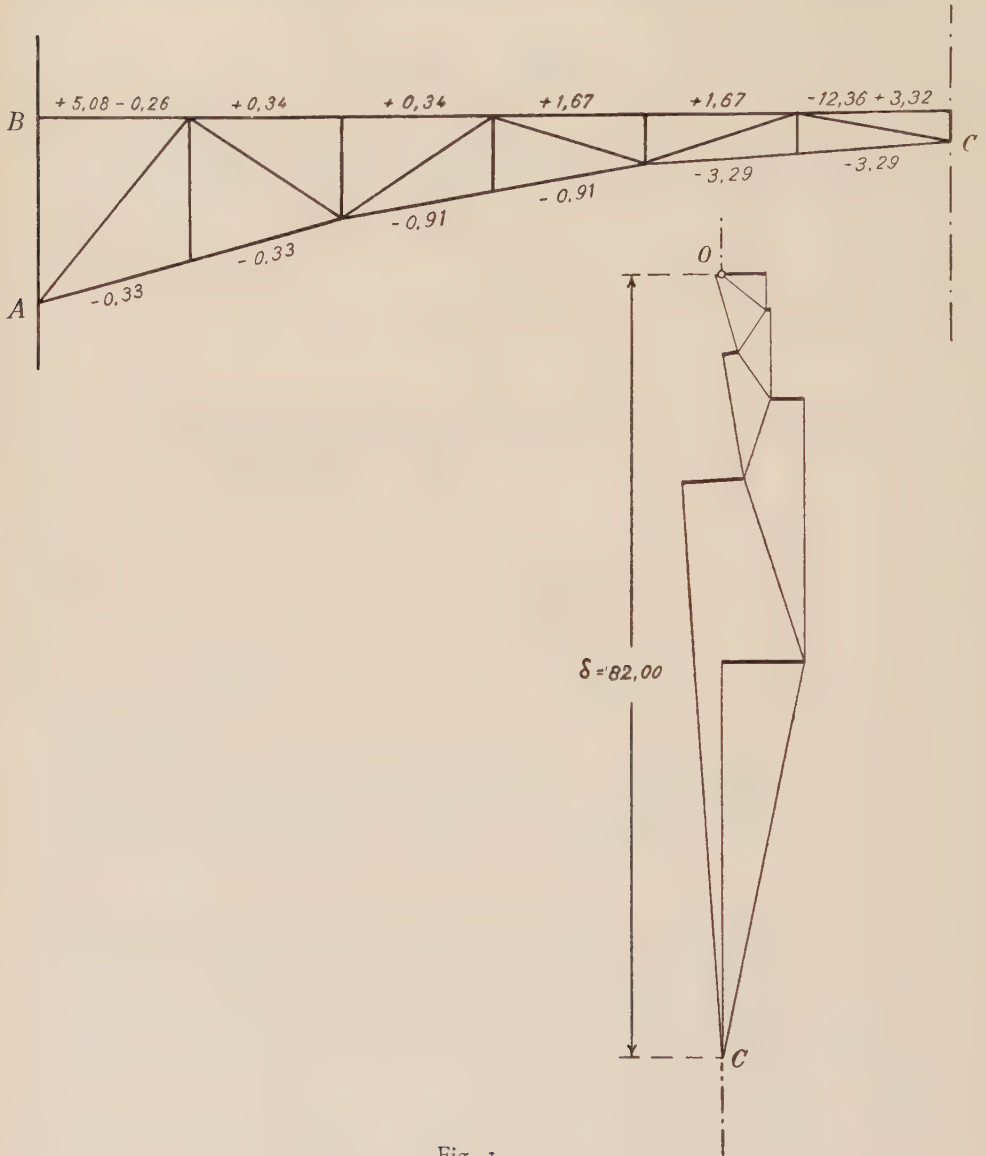


Fig. 1.

calcolati assumendo come unità di misura delle deformazioni il valore di $\frac{l}{EA}$ relativo ad una (qualunque) asta del corrente superiore.

In base a queste deformazioni è stato poi tracciato il diagramma di Williot che si vede riprodotto, in basso, nella stessa figura; su di esso si

possono leggere gli spostamenti dei singoli nodi; e fra gli altri, particolarmente interessante, lo spostamento (verticale) del nodo in mezzeria, o, come si dice comunemente, la « freccia permanente » dell'arco.

Ora al calcolo di questa « freccia permanente » si può anche giungere applicando il secondo principio di reciprocità.

Nel caso particolare delle travature reticolari, questo principio si traduce infatti nella forma seguente:

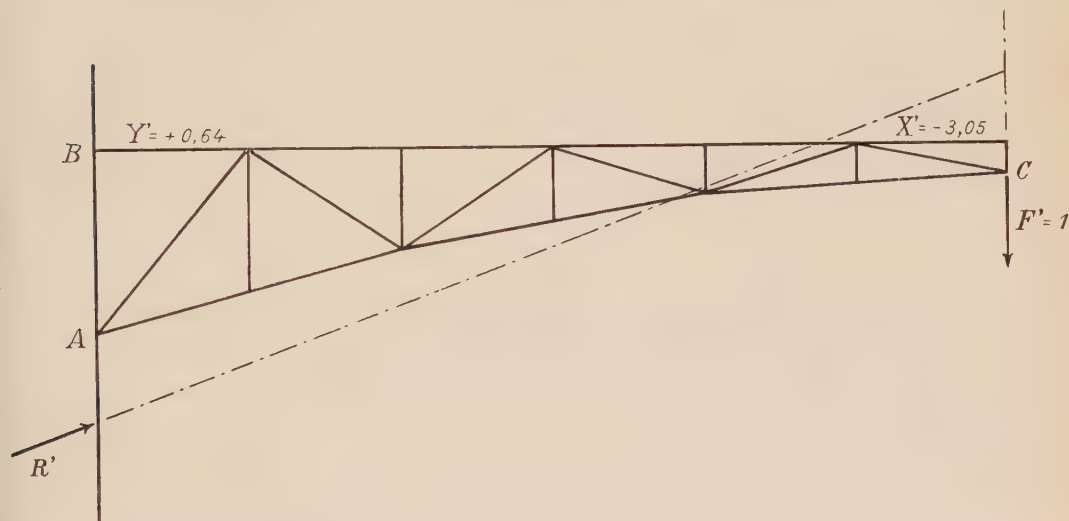


Fig. 2.

« Lo spostamento che un nodo di una travatura reticolare subisce in una data direzione, per effetto di un dato sistema di deformazioni plastiche \bar{s} delle sue aste, è misurato da

$$\delta = \Sigma \bar{s} \cdot S'$$

dove con S' si sono indicati gli sforzi che, nelle stesse aste, verrebbero determinati da una forza

$$F' = 1$$

supposta applicata in quel nodo e secondo quella direzione ».

In questa formola la sommatoria deve naturalmente intendersi estesa a tutte le aste; però in realtà essa si comporrà poi dei soli termini relativi alle aste sovrabbondanti, i soli in cui le \bar{s} siano diverse da zero.

Ne segue che degli sforzi S' basterà in pratica calcolare quelli relativi alle stesse aste; cioè a dire le incognite iperstatiche X' ed Y' (fig. 2), in funzione delle quali lo spostamento cercato si potrà senz'altro esprimere sotto la forma

$$\delta = 2 (\bar{s}_x \cdot X' + \bar{s}_y \cdot Y')$$

Nel caso concreto — vale a dire per i valori delle incognite iperstatiche indicati in fig. 2, e per quelli delle deformazioni plastiche indicati nella fig. 3 della Nota citata — si trova così per la freccia permanente il valore

$$\delta = 82,00 \frac{l}{EA}$$

che concorda perfettamente con quello rilevato dal diagramma di Williot.

Meccanica. — *Il secondo principio di reciprocità e le sue applicazioni al calcolo delle deformazioni permanenti.* Nota III di G. COLONNETTI, presentata dal Socio G. FUBINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sulla generalizzazione di una formula di Cisotti e sua applicazione allo studio dei movimenti lenti di un fluido comprimibile.* Nota di CAIUS JACOB, presentata⁽¹⁾ dal Corresp. U. CISOTTI.

1. Si deve a Cisotti una formula relativa al coefficiente di contrazione di getto liquido che permette di fare lo studio qualitativo di questo elemento⁽²⁾. Reputiamo che non sarà privo di interesse indicare una formula analoga per un fluido comprimibile e di dedurne alcune conseguenze.

Supponiamo di riferirci al movimento permanente e irrotazionale di una massa gassosa che fluisce da un recipiente (ω) attraverso un orifizio (Ω), di area eguale a Ω ; supponiamo inoltre che a una distanza sufficientemente lontana dall'orifizio, a monte, il recipiente presenti una sezione trasversale (Ω_1) di area Ω_1 , attraversata da tutte le particelle fluide con una stessa velocità \vec{V}_1 normale alla sezione; ammetteremo che a una certa distanza dall'orifizio (Ω) il getto uscente presenti una sezione contratta (Ω_2), parallela a (Ω), la quale sia attraversata da tutte le particelle fluide colla medesima velocità \vec{V}_2 normale alla sezione. Sia Ω_2 l'area di (Ω_2); designeremo con (λ) la superficie laterale che limita il getto fluido uscente dal recipiente e compreso tra le sezioni (Ω) e (Ω_2), con V la grandezza del vettore velocità \vec{V} , con V_1 e V_2 le grandezze dei vettori \vec{V}_1 e \vec{V}_2 e infine

(1) Nella seduta del 20 febbraio 1938.

(2) U. CISOTTI, *Idromeccanica piana*, parte seconda, p. 272, Milano, 1922.

con p e ρ la pressione e la densità della massa fluida in un punto dato. La legge caratteristica adottata sarà della forma $p = p(\rho)$.

Per ottenere l'espressione del coefficiente di contrazione $\frac{\Omega_0}{\Omega}$, partiremo dalla formula di Green ⁽¹⁾

$$(1) \quad \int_{(T)} \text{grad } u \times \text{grad } v d\tau = - \int_{(\Sigma)} u \frac{dv}{dn_i} d\sigma - \int_{(T)} u \Delta v \cdot d\tau,$$

dove (T) designa il volume occupato dalla massa fluida tra le sezioni (Ω_1) e (Ω_2) e (Σ) la superficie che lo limita, e porremo

$$u = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \varphi(x, y, z),$$

$\varphi(x, y, z)$ essendo il potenziale di velocità. Se si tiene conto dell'equazione di continuità

$$(2) \quad \rho \Delta \varphi + \text{grad } \rho \times \text{grad } \varphi = 0,$$

(1) darà, con trasformazioni immediate, la formula seguente

$$(3) \quad \frac{1}{2} \int_{(\Sigma)} \rho V^2 \alpha d\sigma + \frac{1}{2} \int_{(T)} V^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} d\tau = \int_{(\Sigma)} \rho \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial n_i} d\sigma,$$

α essendo il coseno dell'angolo che fa la normale interna a (Σ) con l'asse Ox . Ora la relazione precedente non è altro che la proiezione sull'asse arbitrario Ox della formula vettoriale

$$(4) \quad \frac{1}{2} \int_{(\Sigma)} \rho V^2 \vec{n}_i d\sigma + \frac{1}{2} \int_{(T)} V^2 \text{grad } \rho d\tau = \int_{(\Sigma)} \rho \vec{V} (\vec{V} \times \vec{n}_i) d\sigma,$$

che risulta così stabilita. L'integrale di volume che figura in questa formula può essere ancora trasformato in un integrale di superficie se si tiene conto della nota relazione

$$\text{grad } \rho = - \frac{1}{2} \frac{\rho}{c^2} \text{grad } V^2,$$

ove c è la velocità di propagazione del suono. Si ottiene in definitiva la identità ⁽²⁾

$$(5) \quad \boxed{\frac{1}{2} \int_{(\Sigma)} K (V^2) \vec{n}_i d\sigma = \int_{(\Sigma)} \rho \vec{V} (\vec{V} \times \vec{n}_i) d\sigma}$$

(1) Il simbolo \times designa il prodotto scalare.

(2) Questa formula generalizza un'altra di LEVI-CIVITA. (« Atti del R. Ist. Veneto », to. LXIV, p. 1466, 1905).

ponendo

$$K(V^2) = \rho V^2 + \frac{1}{2} \int_0^{V^2} \rho \frac{V^2}{c^2} dV^2 = \int_0^{V^2} \rho dV^2.$$

Una volta stabilita questa formula, non vi è più che da tenere conto delle condizioni ai limiti che verifica il vettore velocità sopra $(\vec{\omega})$, $(\vec{V} \times \vec{n}_i = 0)$, e sopra (λ) , $(V = V_2)$ per dedurne, ρ_1 e ρ_2 essendo le densità del fluido nelle sezioni (Ω_1) e (Ω_2) ,

$$[2\rho_2 V_2^2 \Omega_2 - K(V_2^2) \Omega] \vec{h} - [2\rho_1 V_1^2 - K(V_1^2)] \Omega_1 \vec{k} + \int_{(\vec{\omega})} K(V^2) \vec{n}_i d\sigma = 0;$$

se si moltiplica scalarmente questa relazione per \vec{h} e si tiene conto dell'egualianza $\rho_1 V_1 \Omega_1 = \rho_2 V_2 \Omega_2$, si otterrà risolvendo rispetto a $\frac{\Omega_2}{\Omega}$,

$$(6) \quad \frac{\Omega_2}{\Omega} = \frac{1}{\rho_2 V_2^2} \cdot \frac{K(V_2^2) - \frac{1}{\Omega} \int_{(\vec{\omega})} K(V^2) \vec{n}_i \times \vec{h} \cdot d\sigma}{2 - \vec{h} \times \vec{k} \cdot \frac{V_1}{V_2} \left(2 - \frac{K(V_1^2)}{\rho_1 V_1^2} \right)}$$

In ciò che precede \vec{h} e \vec{k} designano i vettori unitari normali a (Ω_2) e a (Ω_1) e diretti nel verso dell'efflusso; la formula (6) costituisce la generalizzazione annunciata della formula di Cisotti, che si ritroverebbe facendo nella (6) $K(V^2) = \rho_0 V^2$. Attribuendo l'indice zero agli elementi analoghi corrispondenti a un getto liquido, si avrebbe

$$(7) \quad \frac{\Omega_2^{(0)}}{\Omega^{(0)}} = \frac{1 - \frac{1}{\Omega^{(0)}} \int_{(\vec{\omega}^{(0)})} \left[\frac{V^{(0)}}{V_2^{(0)}} \right]^2 \vec{n}_i^{(0)} \times \vec{h}^{(0)} \cdot d\sigma^{(0)}}{2 - \vec{h}^{(0)} \times \vec{k}^{(0)} \cdot \frac{V_1^{(0)}}{V_2^{(0)}}}.$$

2. Come la formula (7) di Cisotti, la formula (6) si presta a una discussione qualitativa del coefficiente di contrazione. Non inizieremo questo studio, il nostro scopo essendo quello di dare una applicazione della formula indicata al caso dei movimenti lenti, come sono stati definiti da S. A. Tchaplguine e B. Demtchenko⁽¹⁾.

(1) S. A. TCHAPLIGUINE, « Annales scientifiques de Moscou », pp. 1-121, 1904; B. DEMTCHENKO, « Comptes rendus », to. 194, pp. 1218 e 1720; « Publications mathématiques de l'Université de Belgrade », to. 11, pp. 85-105, 1933.

Supponiamo che il getto considerato sia a due dimensioni e che la velocità delle particelle fluide sieno abbastanza piccole rispetto alla velocità locale del suono. In queste condizioni, è legittimo di sostituire alla legge caratteristica adiabatica alla quale obbedisce il gas una legge approssimata che conduce ad attribuire alla densità la seguente espressione in funzione della velocità

$$(8) \quad \rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 + \frac{V^2}{c_0^2}}},$$

dove ρ_0 è la densità corrispondente al punto di velocità nulla e c_0 la velocità di propagazione del suono nel medesimo punto. Ne risulta una corrispondenza semplice tra il movimento gassoso considerato e il movimento permanente e irrotazionale di un liquido di densità ρ_0 , tale che in punti omologhi i potenziali complessi sono i medesimi come pure gli angoli che fanno i vettori velocità con un asse arbitrario Ox . Si potrà di più scegliere il movimento liquido associato in modo che in due punti omologhi, prefissati, si abbia la medesima velocità per il liquido e per il gas. La relazione tra le velocità in punti corrispondenti sarà della forma ⁽¹⁾

$$(9) \quad \frac{1}{V} = \frac{C_1}{V^{(0)}} + C_2 V^{(0)},$$

la densità del gas esprimendosi

$$(10) \quad \frac{1}{V} \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{C_1}{V^{(0)}} - C_2 V^{(0)}.$$

In ciò che precede, $V^{(0)}$ designa la grandezza della velocità di una particella liquida; C_1 e C_2 sono delle costanti.

Supponiamo di scegliere il getto liquido associato in modo che la velocità $V_2^{(0)}$ nella sezione contratta ($\Omega_2^{(0)}$) sia eguale a quella del gas nella sezione contratta (Ω_2). Le velocità sulle linee libere ($\lambda^{(0)}$) e (λ), che si corrispondono in conseguenza dell'eguaglianza dei potenziali complessi, saranno dunque eguali a V_2 . Si potrà allora prendere i valori seguenti per C_1 e C_2

$$(11) \quad C_1 = \frac{\rho_0 + \rho_2}{2 \rho_2}, \quad C_2 = \frac{\rho_2 - \rho_0}{2 V_2^2 \rho_2}.$$

Ci proponiamo di dare una relazione semplice tra i coefficienti di contrazione dei getti liquido e gassoso così associati. Osserviamo anzitutto che le formule (6) e (7) restano valide purchè si sostituiscano agli elementi di

(1) Cfr. B. DEMTCHENKO, loc. cit.

aree degli elementi di archi e le aree $\Omega_1, \Omega, \Omega_2$ dalle larghezze L_1, L e L_2 delle sezioni. Parimenti sieno $L_1^{(0)}, L^{(0)}$ e $L_2^{(0)}$ le larghezze delle sezioni corrispondenti dei getti liquidi. Per ottenere la relazione cercata, bisognerà trovare una espressione più semplice dell'integrale che figura in (6). Abbiamo

$$K(V^2) = \int_0^{V^2} \rho dV^2 = \int_0^{V^2} \frac{\rho_0 dV^2}{\sqrt{1 + \frac{V^2}{c_0^2}}} = 2\rho_0 c_0^2 \left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right);$$

d'altra parte si ha tra gli elementi d'arco delle linee di corrente corrispondenti

$$V ds = V^{(0)} ds^{(0)},$$

da cui si ottiene, tenendo pure conto di (9), (10), (11) e della eguaglianza

$$2\rho_0 c_0^2 = -\frac{\rho_0}{2C_1 C_2},$$

$$\begin{aligned} \int_{(\tilde{\omega})} K(V^2) \vec{n}_i \times \vec{h} ds &= -\frac{\rho_0}{2C_1 C_2} \int_{(\tilde{\omega}^{(0)})} \left(\frac{\rho_0}{\rho V} - \frac{1}{V} \right) V^{(0)} \vec{n}_i^{(0)} \times \vec{h} ds^{(0)} = \\ &= \frac{\rho_0}{C_1} \int_{(\tilde{\omega}^{(0)})} [V^{(0)}]^2 \vec{n}_i^{(0)} \times \vec{h} ds^{(0)}, \end{aligned}$$

poichè $\vec{n}_i = \vec{n}_i^{(0)}$, $\vec{h} = \vec{h}^{(0)}$, $\vec{k} = \vec{k}^{(0)}$ nei punti omologhi. Le formule (6) e (7) contenendo lo stesso integrale incognito $\int_{(\tilde{\omega}^{(0)})} [V^{(0)}]^2 \vec{n}_i^{(0)} \times \vec{h} ds^{(0)}$,

si otterrà con un calcolo di eliminazione la relazione cercata tra i due coefficienti di contrazione. Si avrà facendo questo calcolo

$$L = L^{(0)} + 2 \left(\frac{C_1 \rho_2}{\rho_0} L_2 - L_2^{(0)} \right) + A \vec{h} \times \vec{k},$$

con

$$A = -\frac{C_1 \rho_2}{\rho_0} \cdot \frac{V_1}{V_2} L_2 \left[2 - \frac{K(V_1^2)}{\rho_1 V_1^2} \right] + \frac{V_1^{(0)}}{V_2} L_2^{(0)};$$

ora, se si designa con $q > 0$ la differenza dei valori che prende la funzione di corrente sulle due linee del getto (λ) , o sopra $(\lambda^{(0)})$, si ha

$$L_1 = \frac{q \rho_0}{V_2 \rho_2}, \quad L_2^{(0)} = \frac{q}{V_2},$$

di modo che

$$\frac{C_1 \rho_2}{\rho_0} L_2 - L_2^{(0)} = -q C_2 V_2.$$

In quanto al coefficiente A di $\vec{h} \times \vec{k}$, è facile provare che è nullo. Infatti, si ha tenendo conto di (9) e di (10)

$$\begin{aligned} A &= \frac{q}{V_2^2} \left\{ C_1 \left[\frac{2 \rho_0 c_0^2}{\rho_1 V_1} \left(\frac{\rho_0}{\rho_1} - 1 \right) - 2 V_1 \right] + V_1^{(0)} \right\} = \\ &= \frac{q V_1^{(0)}}{V_2^2} \left[\frac{C_1 - C_2 V_1^{(0)^2}}{C_1 + C_2 V_1^{(0)^2}} - \frac{2 C_1}{C_1 + C_2 V_1^{(0)^2} + 1} \right] = 0. \end{aligned}$$

Rimane dunque

$$L = L^{(0)} - 2 q C_2 V_2,$$

da cui

$$\frac{L_2}{L} = \frac{\frac{q \rho_0}{V_2 \rho_2}}{L^{(0)} - 2 q C_2 V_2} = \frac{1}{\frac{L^{(0)}}{L_2} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_0} - 2 \frac{\rho_2}{\rho_0} V_2^2 C_2},$$

ovvero infine, ponendo $\frac{L_2}{L} = l$, $\frac{L_2^{(0)}}{L^{(0)}} = l^{(0)}$ e sostituendo a C_2 il suo valore

$$(12) \quad l = \frac{1}{1 + \frac{\rho_2}{\rho_0} \left(\frac{1}{l^{(0)}} - 1 \right)}.$$

È la relazione semplice che esiste tra i due coefficienti di contrazione l e $l^{(0)}$. Rammentiamo che per stabilirla noi abbiamo fatto un certo numero di ipotesi sull'esistenza delle sezioni L_1 , L , L_2 e $L_1^{(0)}$, $L^{(0)}$ e $L_2^{(0)}$. Queste circostanze sono realizzate se il movimento gassoso, e per conseguenza quello associato, possiede un asse di simmetria.

Un caso particolare in cui la formula (12) si applica è stato già indicato da A. Busemann⁽¹⁾, mediante un calcolo diretto, supponendo che il canale sia limitato da due pareti rettilinee, parallele alla direzione della corrente a monte, e da una parete normale a questa direzione presentante una apertura, ammettendo la configurazione un asse di simmetria. Noi stessi abbiamo utilizzato la formula (12) in occasione del calcolo numerico del coefficiente di contrazione in un altro caso particolare, precisamente quello in cui le pareti solide sono formate da due lamine infinite che fanno tra loro un angolo eguale a 2μ , ($0 < \mu < \pi$)⁽²⁾.

(1) A. BUSEMANN, « Zeitschrift für angew. Math. Mech. », 17, pp. 73-79, 1937.

(2) C. JACOB, « Comptes rendus », to. 205, p. 1365, 1937.

Meccanica. — *Sopra alcune configurazioni rigide di filamenti vorticosi perpendicolari a un piano.* Nota II di L. SONA, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

3. CONFIGURAZIONI RIGIDE DI QUATTRO VORTICI. — Per $n = 4$, il sistema (5) assume la forma

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_3 [123] + m_4 [124] = 0, \\ m_2 [132] + m_4 [134] = 0, \\ m_2 [142] + m_3 [143] = 0, \\ m_1 [231] + m_4 [234] = 0, \\ m_1 [241] + m_3 [243] = 0, \\ m_1 [341] + m_2 [342] = 0, \end{array} \right.$$

avendo posto per semplicità:

$$[hjr] = (hjr) \left(\frac{1}{\rho_{hr}} - \frac{1}{\rho_{jr}} \right).$$

L'eliminazione delle m_h dà luogo alla relazione

$$(8) \quad [123][134][142] + [124][132][143] = 0,$$

fra le ρ_{hj} , e a quelle che si ottengono da questa per rotazione degli indici. In forma esplicita la (8) si scrive (dopo qualche semplificazione):

$$(9) \quad (\rho_{12} - \rho_{42})(\rho_{13} - \rho_{23})(\rho_{14} - \rho_{34}) - (\rho_{12} - \rho_{32})(\rho_{13} - \rho_{43})(\rho_{14} - \rho_{24}) = 0.$$

Le tre relazioni che si ottengono da questa per rotazione degli indici, coincidono con questa, come è facile verificare. (Basta del resto pensare che nella (9) si eliminano i termini

$$\rho_{12} \rho_{13} \rho_{14} \quad , \quad \rho_{42} \rho_{23} \rho_{34} ,$$

che per rotazione degli indici non si riproducono, mentre si riproducono tutti gli altri).

La conseguenza a cui si giunge è la seguente: i quadrilateri che avendo nei vertici opportune masse (determinate dalle (7)), si muovono rigidamente, sono quelli caratterizzati dalla relazione (9).

(1) Nella seduta del 20 febbraio 1938.

Aggiungendo alla (9) la relazione di Carnot fra le sei ρ_{hj} di un quadrangolo qualunque, e cioè:

$$(10) \quad 4 \rho_{12} \rho_{13} \rho_{14} - (\rho_{12} + \rho_{13} - \rho_{23})^2 \rho_{14} - (\rho_{12} + \rho_{14} - \rho_{24})^2 \rho_{13} - \\ - (\rho_{13} + \rho_{14} - \rho_{34})^2 \rho_{12} + (\rho_{12} + \rho_{13} - \rho_{23})(\rho_{12} + \rho_{14} - \rho_{24})(\rho_{13} + \rho_{14} - \rho_{34}) = 0,$$

si ottengono due relazioni omogenee di terzo grado nelle ρ_{kj} .

Prefissate quindi ad arbitrio quattro delle sei distanze (lati e diagonali) fra i vertici di un quadrilatero, le (9) e (10) determineranno in linea generale le altre due, e le (7) ci forniranno quattro numeri a cui devono essere proporzionali le intensità dei vortici da porsi nei vertici affinché la configurazione si mantenga rigida.

4. CASI PARTICOLARI NOTEVOLI. — Dall'esame della (9) discendono i seguenti casi particolari:

a) *Quadrato*. — Se $\rho_{12} = \rho_{23} = \rho_{34} = \rho_{41}$ e $\rho_{13} = \rho_{24}$, i quattro vortici occupano i vertici di un quadrato. La (9) è soddisfatta e le (7) danno subito $m_1 = m_2 = m_3 = m_4$. Si rientra nel caso dei poligoni regolari con vortici di uguale intensità. La configurazione è stabile come è ben noto⁽¹⁾.

b) *Rombo*. — Se $\rho_{12} = \rho_{23} = \rho_{34} = \rho_{41}$, i quattro vortici sono situati nei vertici di un rombo; la (9) è soddisfatta, le (7) forniscono innanzi tutto $m_3 = m_1$, $m_4 = m_2$ (i vortici situati agli estremi di una stessa diagonale hanno uguale intensità), e poi $m_1 : m_2 = \rho_{13}(\rho_{24} - \rho_{12}) : \rho_{24}(\rho_{13} - \rho_{12})$ ⁽²⁾.

c) *Quadrilatero simmetrico rispetto a una sua diagonale*. — Se $\rho_{12} = \rho_{23}$ e $\rho_{34} = \rho_{41}$ il quadrilatero $P_1 P_2 P_3 P_4$ è formato da due triangoli isosceli aventi per base comune la diagonale $P_1 P_3$ ed è quindi simmetrico rispetto alla diagonale $P_2 P_4$. La (9) è soddisfatta e le (7) forniscono innanzi tutto

$$(11) \quad m_1 = m_3;$$

(sono dunque sempre uguali le masse situate negli estremi della diagonale trasversa), indicando poi con α, β, γ i tre angoli $P_1 (P_4) P_2$, $P_1 (P_2) P_4$, $P_2 (P_1) P_4$ rispettivamente (è quindi $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$), otteniamo dalle (7) stesse, dopo alcune trasformazioni:

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{m_4}{m_2} = \frac{\sin \beta \cos 3 \beta (\sin^2 \gamma - \sin^2 \alpha)}{\sin \alpha \cos 3 \alpha (\sin^2 \gamma - \sin^2 \beta)}, \\ \frac{m_1}{m_2} = - \frac{2 \sin \beta (\sin^2 \gamma - \sin^2 \alpha)}{\sin \gamma \cos 3 \alpha}. \end{cases}$$

(1) J. J. THOMSON, *Treatise on Vortex Rings*, 1883, p. 99.

(2) I risultati esposti coincidono con quelli dati dal MORTON (cfr. la Nota: *On the Stability* ecc., citata nell'introduzione).

Per $\alpha = \beta$ si riottiene il caso del rombo precedentemente considerato.

d) *Parallelogrammo con angolo di 60° .* — Ricerchiamo se si può soddisfare alla relazione (9) con un parallelogrammo. Poniamo cioè:

$$\rho_{12} = \rho_{34} = l^2, \quad \rho_{14} = \rho_{23} = \delta^2 l^2;$$

l e δl saranno le lunghezze dei lati $P_1 P_2$ e $P_1 P_4$. Indicando poi con α l'angolo col vertice in P_1 , i quadrati delle diagonali saranno dati da:

$$\rho_{13} = l^2 (1 + \delta^2 + 2 \delta \cos \alpha) \quad ; \quad \rho_{24} = l^2 (1 + \delta^2 - 2 \delta \cos \alpha).$$

La (9) si scrive allora:

$$(2 \delta \cos \alpha - \delta^2) (1 + 2 \delta \cos \alpha) (\delta^2 - 1) - \\ - (1 - \delta^2) (\delta^2 + 2 \delta \cos \alpha) (2 \delta \cos \alpha - 1) = 0,$$

e fornisce, oltre alla soluzione $\delta = 1$ che ci riporterebbe al caso del rombo già trattato,

$$(13) \quad \cos \alpha = \pm \frac{1}{2}, \quad \alpha = 60^\circ \quad \text{oppure} \quad \alpha = 120^\circ.$$

Con un parallelogrammo avente un angolo di 60° si soddisfa dunque alla relazione (9) qualunque sia il rapporto δ delle due dimensioni.

Le (7) ci forniscono subito

$$(14) \quad m_3 = -m_1, \quad m_4 = -m_2, \quad m_1 : m_2 = (1 - \delta^3) : (1 + \delta^3).$$

Concludiamo quindi che i due vortici situati agli estremi di una medesima diagonale hanno intensità uguale e senso opposto. Hanno ugual senso i vortici situati agli estremi della maggiore delle due dimensioni del parallelogrammo, e senso contrario quelli situati agli estremi della dimensione minore.

Nel caso del rombo con angolo di 60° , pur essendo soddisfatta la (9) non si ha una effettiva configurazione rigida di quattro vortici perchè almeno due delle m_r sono nulle. Analoga osservazione va fatta per tutti i casi in cui tre dei quattro vortici formano un triangolo equilatero e per il caso in cui tre dei vortici hanno la stessa distanza del quarto. Fa eccezione solo la configurazione in cui tre vortici occupano i vertici di un triangolo equilatero nel cui centro è situato il quarto vortice (triangolo equilatero centrato). In questo caso, che rientra nel tipo *c*), le masse dei vortici situati nei vertici sono uguali, ed è arbitraria la massa del vortice centrale.

Fisiologia. — *Ricerche su un ciclo di modificazioni istologiche della tiroide di ratto albino maschio*⁽¹⁾. Nota di T. PERRI, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

È noto, ormai da tempo, che la struttura istologica del follicolo tiroideo non è costante neppure nell'ambito di una stessa specie animale.

Dal quadro dell'iperfunzione (epitelio a cellule cilindriche e colloide scarsa o assente) si passa gradualmente a quello della ipofunzione (epitelio a cellule in vario grado appiattite e abbondante colloide).

Una delle questioni fondamentali dell'istofisiologia della tiroide è il sapere se questi diversi quadri strutturali siano fasi di uno stesso ciclo secretorio, oppure se rappresentino variazioni individuali.

In alcune condizioni fisiologiche, come ad esempio la gravidanza, si è concluso che trattasi effettivamente di stadi di uno stesso ciclo secretorio, in quanto si è visto che detti quadri corrispondono a momenti diversi e ben precisati (almeno in alcuni animali) dello stato gravidico.

Debbo qui ricordare che Kuschinsky⁽³⁾ ha studiato l'attività tiroidea nei ratti esposti al freddo o al caldo. Ricordo inoltre che Fasella⁽⁴⁾ ha esaminato le tiroidi di alcune cavie maschi, ed ha notato in ciascuna ghiandola follicoli ai diversi stadi del ciclo secretorio.

Mi è sembrato opportuno rendere noti i risultati da me raggiunti in ratto maschio, perchè — a prescindere da particolari condizioni sperimentali — non si aveva (ch'io sappia) alcun dato al riguardo.

Queste ricerche — di cui dò qui un brevissimo sunto — inducono ad ammettere, che nei ratti maschi esiste un ciclo delle modificazioni istologiche della tiroide; il definire la durata e i particolari di esso, sarà oggetto di successive indagini.

Prima di esporre i risultati raggiunti, è indispensabile ch'io ricordi alcune osservazioni fatte nel corso di mie precedenti ricerche⁽⁵⁾, in cui ho dimostrato, che nelle cavie femmine esiste un ciclo nelle modificazioni istologiche della tiroide, della stessa durata e coincidente con il ciclo dell'estro.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia ed Embriologia comparate e nell'Istituto di Chimica biologica della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 6 febbraio 1938.

(3) « Arch. f. exper. Path. u. Pharm. », vol. 179, 1935 (ved. recensione in l'« Année Biol. », 1936, p. 733).

(4) « Ricerche di Morfologia », 1934.

(5) Questi « Rendiconti », vol. 25, 1937, pagg. 742-746.

Le suddette esperienze sono state compiute su 17 cavie tutte vergini e di circa 4 mesi d'età. Per la determinazione del ciclo dell'estro osservavo l'apertura dell'ostio vaginale⁽¹⁾. Ho avuto occasione di notare che dal 25 al 28 giugno, cioè nell'ambito di 4 giorni, ha ovulato la maggior parte di esse: e precisamente, 12 su 17, cioè il 70 %. Avendo riveduto i miei appunti, su cui è annotato il giorno di apertura dell'ostio vaginale di altri gruppi di cavie, ho riscontrato risultati del tutto simili. Ricordando ora la correlazione tra il ciclo dell'estro ed il ciclo secretorio della tiroide, si può concludere — e con sicurezza — almeno questo: *esistono gruppi di cavie, in cui la maggior parte di esse si trova contemporaneamente nello stesso stadio del ciclo dell'estro e del ciclo secretorio della tiroide.*

Nel corso di ricerche (che vado eseguendo per consiglio del prof. Aman-tea) sui rapporti tra alimentazione e struttura istologica della tiroide, ho notato che alcuni pochi ratti uccisi contemporaneamente (dicembre 1935) presentavano tutti il quadro istologico dell'iperfunzione: e altri pochi ratti anch'essi uccisi contemporaneamente (ottobre 1936) presentavano tutti quello dell'ipofunzione. E qui ricordo esser noto che quest'ultimo quadro, nel ratto maschio, anche adulto, lo si trova poco frequentemente.

Ciò mi ha fatto sospettare l'esistenza di lotti di ratti maschi, che nella loro maggioranza, e analogamente a quelli delle cavie femmine già ricordate, presentassero contemporaneamente lo stesso quadro istologico della tiroide.

Per verificare tale ipotesi ho sacrificato — dal 24 aprile al 2 maggio 1937 — 17 ratti albin maschi, tenuti a dieta mista costante. Il loro peso è oscillato da gr. 120 a 180; per lo più da 150 a 165 gr. L'età è stata sui 6 mesi.

Vediamo ora i risultati dell'esame istologico⁽²⁾.

Nei ratti n. 41 e n. 43 sacrificati il 24 aprile si ha netta prevalenza di follicoli con epitelio cubico-appiattito e con abbondante colloide. Esaminando i ratti sacrificati nei giorni successivi — cioè andando dal 24 aprile al 2 maggio — si assiste ad un aumento numerico dei follicoli a cellule alte e con minor quantità di colloide, si assiste cioè ad un progressivo innalzamento dell'epitelio follicolare. Sicchè verso il 30 aprile, 1° e 2 maggio, si incontrano i ratti con epitelio follicolare di notevolissima altezza, e con cellule turgide. Si osservi a questo riguardo la fig. 1, che è una microfotografia della tiroide del ratto albino n. 41, sacrificato il 24 aprile; e la si

(1) È noto che nella cavia il ciclo dell'estro oscilla da 15 a 16 1/2 giorni; e che l'apertura dell'ostio vaginale precede di poche ore l'ovulazione.

(2) I ratti sono stati sacrificati con cloroformio, e le tiroidi sono state fissate in Zenker formolico o acetico; o in Bouin acetico (soluzione acquosa saturata di ac. picrico, p. 75; formalina al 40 %, p. 25; ac. acetico, al momento dell'uso, p. 5). Colorazione delle sezioni, dello spessore di 6-8, con ematossilina Carazzi ed eosina.

confronti con la fig. 2, che appartiene al ratto albino n. 62, sacrificato il 2 maggio (le microfotografie sono ad uguale ingrandimento).

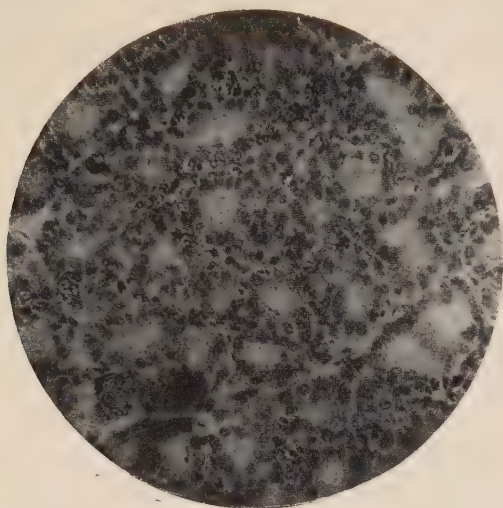


Fig. 1. — Sezione della tiroide del ratto albino maschio n. 41, sacrificato il 24 aprile 1937. Si noti che l'epitelio follicolare è cubico e un po' appiattito. (Microfotografia bb. 6, oc. 4 Koristka).

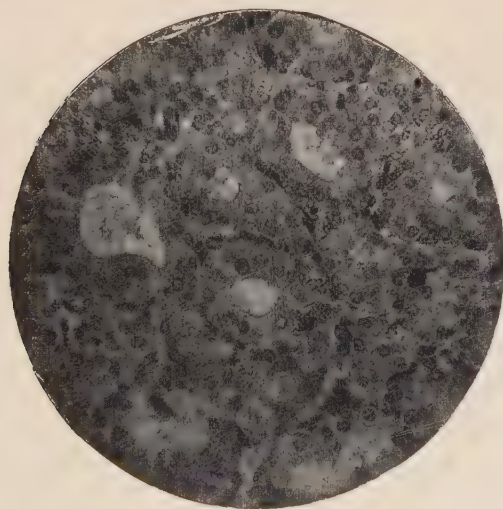


Fig. 2. — Sezione della tiroide del ratto albino maschio n. 62, sacrificato il 2 maggio 1937. Si noti l'altezza dell'epitelio follicolare. (Microfotografia obb. 6, oc. 4 Koristka. Uguale ingrandimento della fig. 1).

Dei 17 ratti, solo 2 fanno eccezione; il che non è certo da meravigliare.

Considerazioni. — Mi limito a far meglio risaltare alcuni punti del lavoro.

Abbiamo visto che, per quanto riguarda le cavie femmine, si possono trovare lotti di esse, in cui la tiroide si presenta nella stessa fase funzionale contemporaneamente in tutti gli individui del lotto stesso. Ciò è avvenuto in tutti i gruppi di cavie esaminati.

La stessa cosa si è verificata nel gruppo di ratti, di cui ho trattato in questo lavoro. Ciò è dimostrato dal fatto, che quelli sacrificati nella stessa giornata, o a un giorno di distanza l'uno dall'altro, presentano un quadro istologico pressochè uguale, poichè — come ho detto — le variazioni trovate sono graduali. Che non si tratti di un semplice caso è convalidato anche dai già accennati gruppetti di ratti, in cui avevo già trovato, che le tiroidi di quelli sacrificati contemporaneamente presentavano lo stesso quadro istologico.

Tutto ciò induce ad ammettere, che anche nei ratti maschi le modificazioni istologiche della tiroide sono fasi di uno stesso ciclo secretorio, cui partecipa tutta la ghiandola.

Riassumendo: Si è trovato che nei ratti albinì maschi la tiroide presenta un ciclo secretorio, cui tutta la ghiandola partecipa.

Fisiologia. — *Azione dei vaghi sul metabolismo dei glicidi.* — II. *Sul comportamento del glicogeno cardiaco, epatico e muscolare in seguito a somministrazione d'insulina nei colombi vagotonizzati.* Nota di V. ZAGAMI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 6 marzo 1938 - Anno XVI

Presidenza del prof. F. MILLOSEVICH

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Meccanica. — *I fattori della stabilità statico-cinetica nei motovelivoli.*
Nota del Socio G. A. CROCCO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geologia (Geochimica). — *Interpretazione geochimica delle formazioni quaternarie di Grotta Romanelli (Terra d'Otranto).*
I. — *Dati del problema e metodo di ricerca.* Nota ⁽¹⁾ del Socio G. A. BLANC.

Con la presente ricerca mi sono proposto di vedere se vi sia la possibilità di trarre dall'esame geochimico di certe formazioni quaternarie dei dati interessanti per la conoscenza del regime climatico e delle condizioni ecologiche sotto cui le formazioni stesse furono originate.

Sono noti gli studi effettuati, specie in questi ultimi anni, nel campo della pedologia, per stabilire delle relazioni fra la natura degli aggregati molecolari costituenti i vari tipi di suoli e le condizioni d'ambiente climatiche ed ecologiche.

I prodotti iniziali dell'alterazione di una roccia, come pure la serie delle successive trasformazioni che tali prodotti iniziali possono poi subire col l'andare del tempo, dipendono, come è noto, oltrechè dalla natura della roccia madre, da fattori climatici e ambientali fra i quali primeggiano la temperatura,

(1) Presentata nella seduta del 7 febbraio 1937.

l'umidità assoluta e relativa, il regime delle piogge, la proporzione di acqua non combinata presente nella roccia o nel suolo da essa derivato, la varia durata di permanenza nel suolo di tale acqua in fase liquida, solida o gassosa ecc. A tali fattori vengono ad aggiungersi quelli determinati dall'attività biologica, vegetale e animale, di cui il suolo è sede.

Ora nella generalità dei casi il pedologo studia le caratteristiche di un suolo che va considerato come il risultato di una serie continua di processi pedogenetici, i quali, partendo dal processo iniziale di alterazione della roccia madre, si sono succeduti da un'epoca più o meno remota sino ad oggi, attraverso alla corrispondente serie di variazioni del clima e delle condizioni ecologiche locali.

Il quesito che mi sono posto è stato invece quello di stabilire se, almeno in alcuni casi particolari, sia possibile trarre, in base a considerazioni di carattere geochimico e pedologico, deduzioni attendibili intorno alle condizioni climatiche ed ecologiche dell'epoca di formazione di determinati depositi pleistocenici, i quali presentino la particolarità di essere stati, dall'epoca della loro deposizione in speciali condizioni di giacitura, sottratti ad ogni ulteriore azione suscettibile di alterarne in modo sensibile i caratteri. E per venire ad un caso pratico, la domanda che mi sono posto è stata la seguente: possono i criteri geochimici e pedologici darci una indicazione del regime climatico e delle condizioni ecologiche dell'ambiente corrispondente ai vari stadi del periodo pleistocenico durante i quali si sono accumulati, in serie stratigrafica non più disturbata, i vari depositi di riempimento di un giacimento in grotta o in caverna, quale ad esempio quello di Grotta Romanelli, in Terra d'Otranto ⁽¹⁾? Depositi questi che per le speciali condizioni del giacimento sono stati, a quanto è lecito presumere per le ragioni che dirò, sottratti ad ogni sensibile processo di alterazione, per cause fisico-chimiche o biochimiche, dall'epoca del loro accumulo nella grotta sino ad oggi. Per cui essi possono considerarsi come una serie sovrapposta di veri e propri campioni di suoli fossili, o paleosuoli, costituente ciascuno un testimone del suolo della regione all'epoca in cui quel particolare deposito si andava formando.

Per poter rispondere a tale domanda, occorre anzitutto chiedersi fino a che punto si possa, nell'esame di simili paleosuoli, fare una discriminazione fra i caratteri ad essi impartiti dai processi geochimici e pedogenetici in atto nella regione al momento della loro sottrazione all'ambiente, e i caratteri da essi eventualmente già acquisiti nel corso dei periodi precedenti, sotto regimi climatici ed ecologici diversi.

Ora è chiaro, ad esempio, che se è difficile concepire che un suolo il quale, sotto determinate condizioni d'ambiente, abbia subito un processo

(1) G. A. BLANC, *Grotta Romanelli. I. Stratigrafia dei depositi e natura e origine di essi.* « Arch. p. l'Antr. e l'Etn. », vol. L, 1920, fasc. 1-4.

di laterizzazione con accumulazione dei sesquiossidi idrati di alluminio e di ferro e con asportazione della silice, possa poi perdere tale caratteristica di suolo lateritico, è nondimeno indubbio che il predetto suolo può per ulteriore effetto di particolari fattori climatici ed ecologici assumere caratteri fisico-chimici speciali, i quali, se adeguatamente interpretati, potranno costituire in definitiva degli indizi sufficienti a caratterizzare il regime climatico ed ambientale che per ultimo ha esercitato la sua influenza geochimica o pedogenetica su di esso. Così ad esempio, il predetto suolo, supposto giunto allo stadio lateritico sotto un determinato regime climatico, potrà in periodi successivi e sotto regimi climatici ed ecologici diversi, senza perdere il suo carattere lateritico, acquistare successivamente le caratteristiche di un suolo rubefatto e privo o povero di humus, proprie di un regime desertico o di steppa tropicale o sub-tropicale, oppure quelle di un suolo non rubefatto, ma anch'esso privo o povero di humus, e caratteristico di un deserto o di una steppa fredda, oppure ancora quelle di una terra ricca di materiale unico, corrispondente ad un regime di prateria o di boschi ecc.

Riservandomi di ritornare più estesamente su questo argomento e su altri del genere allorquando mi toccherà trarre le conclusioni d'insieme dalle ricerche che mi accingo a descrivere, passerò ora a dire anzitutto, riferendomi alla stratigrafia che ne ho già data⁽¹⁾, come si presentino le formazioni pleistoceniche di Grotta Romanelli che sono state oggetto del presente studio.

La grotta aprentesi sul fianco della costiera salentina orientale, nei pressi di Castro (Lecce), consiste in un'ampia cavità del calcare ippuritico (urgoniano), della larghezza media di m. 16, dell'altezza di circa m. 10 nella parte sinora esplorata, e della lunghezza di m. 35. Il piano roccioso di base è solcato da cunicoli e da marmitte di giganti formatisi durante un periodo di trasgressione marina di cui sono altresì vestigia un'antica cornice marina a circa m. 8 sul livello marino attuale, ed una fascia di fori di litodomi che si osservano sulle pareti della grotta, e ciò specie lungo la parete Nord-Est.

La grotta, all'inizio delle ricerche da me intrapresevi nel 1914, era, nella sua parte interna, colma, sino a pochi decimetri dalla volta, di depositi dei quali ho già avuto campo di discutere la natura e l'origine nel già citato lavoro.

Ricordo qui soltanto che detto deposito di riempimento è, nella parte interna della grotta, costituito da tre formazioni principali, ben distinte, e cioè:

1) una formazione superiore, dello spessore di circa m. 3,50 costituita prevalentemente da un materiale terroso di colore bruno cosperso più o meno abbondantemente, a seconda dei livelli, da frammenti di calcare, in genere minuti, provenienti dal disgregamento della soprastante volta e contenente elementi di una sabbia quarzosa minuta a granelli arrotondati;

(1) G. A. BLANC, loc. cit.

2) una formazione sottostante dello spessore di circa m. 1,00 costituita in prevalenza da un materiale terroso rosso analogo nell'aspetto a quello che costituisce il suolo attuale della regione, e contenente anch'essa, come la sovrastante terra bruna, della sabbia quarzosa minuta a granelli arrotondati;

3) una formazione inferiore, costituita in prevalenza da un cumulo di pietrisco calcareo a spigoli di frattura vivi, i cui interstizi contengono un materiale argilloso-calcareo di colore variante dal grigio-giallastro chiaro al bruno e presentante i caratteri di un prodotto di decalcificazione del calcare locale;

Questa formazione inferiore poggia, a seconda dei punti, o sulla roccia viva, o su letti di ciottolame calcareo ad elementi fluitati, che altro non sono se non lembi della spiaggia ghiaiosa formatasi durante il periodo immediatamente precedente la emersione della grotta.

La formazione 2 è separata dalla sottostante formazione 3 da una crosta stalagmitica spessa circa m. 0,25, costituita in certi punti da masse di calcite compatta e in altri dai frammenti del calcare della sottostante formazione 3 cementati dalla calcite stalagmitica stessa.

Tra la superficie della formazione 2 a terra rossa e la base della formazione 1 a terra bruna compaiono, ma soltanto in alcuni punti, delle concrezioni costituite da calcite la quale o cementa la superficie della terra rossa o forma alle volte dei veli sottili o delle masse mamillonari di calcite pura; ma ciò, ripeto, solo alla estrema superficie della formazione a terra rossa e senza che simili vestigia di una infiltrazione idrica lieve, sporadica e momentanea, attraverso ai sovrastanti banchi di calcare, possano in alcun modo essere paragonati, per importanza, alla potente ed estesa crosta stalagmitica che ricopre la sottostante formazione 3.

La natura e la origine dei materiali costituenti i tre suddetti livelli principali del deposito di riempimento di Grotta Romanelli, come pure i modi di formazione delle varie parti del deposito stesso, sono stati da me discussi nel lavoro già citato. Tutto induceva a ritenere, e la presente ricerca, come vedremo, lo conferma, che le formazioni a terra bruna e a terra rossa fossero precipuamente di origine eolica, costituendo esse, per quel che riguarda la parte terrosa e sabbiosa, due dune d'arresto che si sovrappongono una all'altra e che sono dovute all'accumulazione nella grotta, aprendosi nella parte rocciosa, di materiali polverulento l'uno e sabbioso l'altro, che i venti, durante un periodo di regressione marina, asportarono dalla estesa pianura costiera che la carta batimetrica ci mostra essere esistita dinanzi alla parete rocciosa oggi bagnata dall'Adriatico. Qualunque siano i criteri prudenziali con i quali si voglia fissare i limiti del movimento regressivo che precedette la fase trasgressiva a cui si deve la spiaggia ghiaiosa di base del nostro giacimento, tali carte batimetriche mostrano che la pianura costiera, oggi sommersa, dovette, nel periodo regressivo suddetto, emergere per una larghezza di qualche diecina di chilometri: ed è da codesta

pianura che, sotto regimi climatici a ciò favorevoli, vennero indubbiamente asportati dai venti i materiali terrosi e sabbiosi che poi trovarono nell'anfratto di Grotta Romanelli un punto di definitivo arresto, costituendovi le due dune sovrapposte che oggi vi si osservano.

Nel caso dunque di tali formazioni 1 e 2 non si può in alcun modo parlare di *profilo* nel senso pedologico di questa parola, non essendo i materiali che le costituiscono derivati direttamente dal disgregamento fisico o dall'alterazione chimica di una sottostante roccia madre e non presentando nè l'una nè l'altra di esse, dall'alto al basso, alcuno dei caratteri di differenziazione che caratterizzano un profilo. Per contro, dall'esame petrografico e chimico di detti materiali si può, secondo me, tentare di trarre qualche interessante indicazione concernente le condizioni climatiche ed ecologiche vigenti all'epoca in cui essi vennero, nel modo anzidetto, sottratti ad ogni ulteriore azione geochimica e pedogenetica sensibile, costituendo da allora in poi dei veri e propri suoli fossili.

In quanto alla formazione 3, posso sin da ora dire che essa è per contro costituita in prevalenza, come ho già accennato, da un accumulo di detriti della roccia calcarea locale e di prodotti di decalcificazione della roccia stessa, accumulatisi *in situ*. È interessante infatti a questo proposito notare che mentre i frammenti di roccia calcarea della formazione 3 sono più o meno profondamente alterati in superficie dal suddetto processo di decalcificazione, i frammenti della stessa roccia calcarea frammisti alle formazioni 1 e 2 non presentano traccia alcuna di un processo di alterazione del genere. Dal che precisamente si deduce che, mentre durante il periodo di accumulo della formazione 3 fu attivo il processo di decalcificazione per effetto di acque cadenti dalla volta che vi si infiltravano formando poi in superficie una potente crosta stalagmitica, per contro durante il periodo di accumulo delle formazioni superiori, le infiltrazioni o furono del tutto assenti o furono talmente limitate e localizzate da non esercitare una sensibile azione decalcificante sui frammenti di roccia calcarea ivi contenuti.

Tutto ciò premesso procederò ora a descrivere i metodi seguiti nel mio lavoro.

Per quel che concerne anzitutto la raccolta dei campioni ai vari livelli di ciascuna formazione, essa viene naturalmente fatta con le cure atte ad evitare ogni inquinamento. I campioni stessi sono conservati in vasi di vetro a tappo smerigliato da cui si prelevano poi volta per volta quei quantitativi che occorrono per le singole prove da effettuare. La conservazione del campione, sin dal momento della raccolta, entro un recipiente di vetro, ripieno, con chiusura a tappo smerigliato, assicura, per quanto possibile, la permanenza del materiale stesso nello stato in cui esso si trovava in seno alla formazione al momento del prelievo, il che permette di effettuare nelle migliori condizioni le prove comparative sulla umidità, sul contenuto in materia

organica, sulla concentrazione idrogenionica, sul contenuto in sali solubili in acqua ecc.

Effettuati tali saggi preliminari, la preparazione dei campioni da esaminare viene condotta come segue:

La prima operazione consiste nell'eliminare le parti più grossolane. A tale scopo una porzione del materiale viene spappolata in acqua e, agitando dolcemente, viene passata attraverso ad uno staccio da mm. 2, venendosi in tal modo ad eliminare, senza triturazione alcuna, le parti di dimensioni superiori, eventualmente presenti, che, nel caso nostro, sono costituite prevalentemente da frammenti del calcare locale provenienti dal disgregamento delle pareti o della volta della grotta.

La parte passata attraverso lo staccio da mm. 2 viene ulteriormente suddivisa in due porzioni, che vengono trattate in modo diverso onde ottenere i campioni dei due tipi di materiale che designo rispettivamente sotto i nomi di *complesso detritico* e *complesso colloidale*.

La diversità dei metodi operatorî da me adottati per la preparazione dei campioni dei predetti due tipi di materiale è resa necessaria, per i fini da me perseguiti, dal fatto che, mentre nel caso del campione di materia colloidale si può — e conviene a scopo comparativo — seguire uno dei metodi ormai classici in uso nella pedologia per l'analisi meccanica dei suoli, appare per contro indispensabile, nella preparazione del campione di materiale da me designato sotto il nome di complesso detritico, di adottare un criterio del tutto diverso.

Infatti nel primo caso si tratta di costituire un campione che corrisponda alla composizione media della totalità della materia inorganica allo stato colloidale esistente nel suolo in esame, qualunque sia il grado di dispersione o di coalescenza e compattezza in cui detta materia colloidale si trova nel suolo stesso. Per ottenere ciò bisognerà dunque, adottando il metodo di separazione per sospensione idrica, provocare anzitutto la dispersione della totalità o della quasi totalità della materia colloidale presente, cioè anche di quella esistente allo stato di coaguli o di aggregati più o meno compatti e resistenti. Il che, come è noto, si ottiene sottoponendo anzitutto il materiale a digestioni con acidi più o meno diluiti e poi a violente e prolungate agitazioni in apparecchi a rovesciamento o a scosse, con un liquido disperdente.

Ora tali trattamenti, oltre che disgregare i grumi, gli aggregati e le patine costituite dalle sostanze colloidalî che si trovano nel suolo allo stato non disperso, determinano anche la disgregazione o la dissoluzione di altri materiali, come ad esempio, nel caso nostro, dei frammenti del calcare locale, il cui stato superficiale, vario a seconda della formazione in cui sono rimasti sepolti, può, come vedremo, fornire utili indicazioni; oppure delle concrezioni e delle patine di vario genere, talvolta discernibili soltanto al microscopio, che possono ricoprire i granelli di sabbia presenti nel suolo,

ma che l'azione di una soluzione anche lievemente acida basta spesso a far sparire.

Ciò detto, ecco quali sono i due metodi da me rispettivamente adottati per la separazione del complesso detritico e del complesso colloidale inorganico.

Preparazione del campione del complesso detritico: Adottando, per la discriminazione fra materiale detritico e colloide disperso il criterio di Atterberg⁽¹⁾, fondato sull'applicazione della formula di Stokes, ho assunto come limite convenzionale per la separazione di essi un diametro di particella di mm. 0,002, corrispondente ad una velocità di caduta di cm. 0,021 al minuto primo, ossia di cm. 10 in 8 ore, nell'acqua a 20°C. Si può infatti ritenere che nella fase dispersa così definita, non esistano in quantità apprezzabili particelle delle rocce o dei singoli minerali dalla cui alterazione il suolo è originariamente derivato, o materiali non colloidali di altra provenienza⁽²⁾.

Tenendo presente quanto detto dianzi, risulta che lo scopo precipuo in questo caso dev'essere quello di eliminare la porzione di colloide allo stato di dispersione che, coprendo le particelle dei minerali costituenti il complesso detritico stesso, renderebbe difficile, se non impossibile, l'osservazione di queste al microscopio. Ora, per effettuare ciò più agevolmente, conviene anzitutto separare dal campione di suolo, insieme alla parte colloidale già dispersa, la porzione più fina del materiale detritico, ad esempio quella di diametro compreso fra mm. 0,002 e mm. 0,02, per poi procedere in un secondo tempo alla eliminazione da questa del materiale colloidale disperso.

Ciò posto, si procede nel modo seguente: una determinata quantità, ad esempio gr. 50, del materiale già passato, come detto sopra, attraverso allo staccio da mm. 2, viene addizionata di 500 cm³ di una soluzione acquosa di NaOH centesimo-normale, e viene sottoposta ad una forte, ma breve, agitazione. Dopo di che il tutto viene introdotto in un apparecchio a levigazione alimentato da una soluzione di NaOH centesimo-normale, ed in cui la velocità del liquido ascendente è regolata in modo da asportare il materiale avente diametro inferiore a mm. 0,02, il che si ottiene dando al liquido una velocità d'ascesa di cm. 2 al minuto primo. Il materiale che si raccoglie in questo primo apparecchio di levigazione costituisce la porzione del complesso detritico le cui particelle hanno dimensioni comprese approssimativamente fra il diametro di mm. 2 e il diametro di mm. 0,02.

Il liquido che esce dal predetto primo apparecchio, asportando in sospensione il materiale colloidale e non colloidale di diametro medio inferiore a mm. 0,02, viene direttamente immesso in un secondo apparecchio di levigazione il cui diametro è scelto in modo che in esso il liquido, procedente dal basso all'alto, si muova con la velocità di cm. 1,33 all'ora, occorrente ad asportare il materiale avente un diametro di particella inferiore a 0,002.

(1) ATTERBERG, «Internat. Mitteil. f. Bodenkunde», vol. II, 1912, p. 312.

(2) S. B. HENDRICKS e W. H. FRY, *The Result of X-Ray and mineralogical examination of soil colloids.* («Soil Science», XXIX, 1930, p. 173).

Allorquando il liquido uscente dal secondo apparecchio è limpido, si raccoglie il materiale rimasto in ciascuno dei due apparecchi, lo si essicca a 100°C . e lo si pesa. Si ha così la totalità di quello che ho chiamato *complesso detritico*, divisa in due porzioni, costituite da materiali aventi i diametri delle particelle compresi rispettivamente fra mm. 2 e mm. 0,02 e fra mm. 0,02 e mm. 0,002.

Preparazione del campione del complesso colloidale inorganico: come ho detto dianzi, le osservazioni e le relative deduzioni a cui può dar luogo l'esame, fatto coi metodi della pedologia sulla porzione del suolo costituita da materia inorganica allo stato colloidale, richiedono la preparazione di campioni che corrispondano alla composizione media della totalità di tale porzione colloidale inorganica del suolo stesso. Il che spiega perchè non sia possibile valersi all'uopo soltanto della parte preesistente nel suolo allo stato disperso, che viene separata nella preparazione del complesso detritico come dianzi descritto.

Per la preparazione dei campioni dei complessi colloidali dunque procedo secondo il metodo seguente che è, salvo lievi varianti, quello preconizzato per l'analisi meccanica dei suoli dall'Imperial Bureau of Soil Science ⁽¹⁾:

1) gr. 50 del materiale seccato all'aria e passato attraverso allo staccio da mm. 2, vengono trattati con 250 cm^3 di soluzione di H_2O_2 al 6 %, a caldo, allo scopo di eliminare le sostanze organiche eventualmente presenti. Occorrendo l'operazione si ripete.

2) Il tutto viene passato su di uno staccio da 0,2 mm. e ciò che resta sullo staccio viene essiccato a 100°C . e poi pesato onde avere per differenza il peso del materiale passato col liquido attraverso lo staccio.

3) Al liquido stesso viene aggiunta gradualmente tanta soluzione di HCl.N quanta occorre per attaccare completamente il calcare presente e per avere finalmente una soluzione di HCl , 0,2 N nella quale si lascia digerire il materiale per un'ora, agitando frequentemente.

4) Si passa il tutto su di un filtro a vuoto: il materiale solido viene lavato e seccato a 100°C .; il liquido, dopo aggiunta di qualche goccia di HNO_3 , per ossidare i sali di ferro eventualmente presenti, viene concentrato a bagno maria, dopo di che, mediante aggiunta di NH_4OH le piccole quantità di ferro e di alluminio passate in soluzione vengono precipitate. I sesquiossidi così formati vengono raccolti e aggiunti al materiale solido separato precedentemente.

5) La totalità del materiale solido così ottenuto viene immessa, con cm^3 500 di soluzione di NaOH , 0.01 N entro la boccia di un agitatore in cui viene sottoposta per un paio d'ore ad una violenta agitazione.

(1) « Imperial Bureau of Soil Science. Techn. Com. N. 27 »: *The dispersion of Soils in mechanical analysis*. London, 1933.

6) Il tutto viene versato in un cilindro, entro cui, dopo un buon rimescolamento, si lascia riposare alla temperatura di 20°C. circa, per 8 ore, dopo di che viene prelevata, mediante sifonamento, la porzione superiore della colonna liquida per un'altezza di cm. 10.

Il materiale in sospensione in tale porzione superiore della colonna liquida è, in base alla scala di Atterberg, costituito esclusivamente da particelle di diametro inferiore a mm. 0,002, e rappresenta perciò un campione di ciò che ho definito come complesso colloidale inorganico del suolo in esame.

È su tali campioni corrispondenti ai vari livelli del giacimento che sono state eseguite le analisi chimiche centesimali, nonchè le estrazioni, sia con acido cloridrico concentrato che con la miscela dei tre acidi: solforico, cloridrico e nitrico, i cui risultati, insieme a quelli dell'esame petrografico dei vari complessi detritici, vengono riportati e discussi in una Nota che fa seguito alla presente.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle superficie razionali a sezioni iperpiane canoniche e su un paradosso relativo alle loro singolarità.* Nota I di S. FAEDO, presentata ⁽¹⁾ dal Socio F. ENRIQUES.

I. In questa Nota studio le superficie razionali di ordine $2p - 2$ dello spazio S_p le cui sezioni iperpiane sono curve canoniche. Esse vengono rappresentate sul piano da sistemi lineari ∞^p di curve C_n di un certo ordine n , di grado $2p - 2$, la cui serie caratteristica è la serie canonica g_{2p-2}^{p-1} . Per un gruppo di tale serie passa dunque una curva aggiunta C_{n-3} che non ha intersezioni variabili con le curve C_n del fascio da esso determinato. Risulta quindi che al fascio stesso appartiene una curva spezzata nella C_{n-3} (o in una parte di essa) e in una residua curva Γ fondamentale per il sistema C_n . Questa Γ sarà una cubica ellittica se il sistema aggiunto a C_n non ha parti fondamentali fisse, e ci si può ridurre generalmente a questo caso ⁽²⁾ con trasformazioni cremoniane del piano.

Ciò posto, alla cubica fondamentale Γ corrisponde sulla superficie un punto multiplo che, abbassando di uno il genere della superficie, dà ragione della sua razionalità.

Nel presente studio determino la superficie razionale di ordine $2p - 2$ di S_p a sezioni iperpiane canoniche, costruendo, mediante considerazioni di

(1) Nella seduta del 20 febbraio 1938.

(2) ENRIQUES-CONFORTO, *Le superficie razionali*. L. I, cap. VIII, § 47. Zanichelli, Bologna, 1938.

analisi indeterminata, i sistemi lineari di curve, birazionalmente distinti di genere p e che hanno una cubica fondamentale.

Si trovano superficie F_{2p-2} aventi un punto multiplo P di ordine $r = 2, 3, \dots, p$, le quali rispondono a sistemi lineari con

$$s = 11, 12, \dots, p + 9$$

punti base. Ma oltre a questi si trovano anche sistemi con 10 punti base che rappresentano superficie con un punto doppio, cui è infinitamente vicino un tacnodo. Fra queste ultime superficie sono particolarmente degne di nota le F_{2p-2} cui danno origine sistemi lineari di curve di ordine $n = 3p$, aventi otto punti base p -pli, uno $(p-1)$ -plo e uno semplice sopra una cubica fondamentale: $C_n(A_1^p, \dots, A_8^p, A_9^{p-1}, A_{10})$. Qui accade che staccando da C_n la cubica si ottiene un sistema aggiunto C_{n-3} che ha un nuovo punto fisso sopra la cubica e perciò possiede ancora questa cubica come fondamentale. Questa famiglia di superficie generalizza l'ultimo tipo di superficie razionale del quarto ordine scoperto da Noether ⁽¹⁾, cioè $C_9(A_1^3, \dots, A_8^3, A_9^2, A_{10})$, ed è stata incidentalmente incontrata dal Fano ⁽²⁾. Il fatto che la cubica sia fondamentale per tutti i successivi aggiunti, significa che proiettando la F_{2p-2} da P in un S_{p-1} si ottiene la F_{2p-4} della stessa famiglia e che con successive proiezioni si arriva alla superficie di Noether.

Ora, a chi voglia definire la *singularità* di esse si presenta naturalmente l'idea che essa consista in una *serie di $p-1$ punti doppi infinitamente vicini, l'ultimo dei quali è un tacnodo*. Ma d'altra parte è facile dimostrare che ove s'imponga ad una superficie qualunque di possedere una serie di punti doppi successivi l'ultimo dei quali sia un tacnodo, questa singularità si scarica in guisa che *il tacnodo non può andare in ogni caso oltre al primo punto infinitamente vicino al punto singolare dato*. La circostanza di questo scaricamento mi si è presentata in uno studio che vado facendo sui punti doppi delle superficie ed è stata pure avvertita da L. Gussenhoven ⁽³⁾.

Si affaccia dunque un *paradosso* che domanda di essere spiegato. La spiegazione è che la superficie F_{2p-2} dell' S_p di cui si discorre contiene la retta che unisce il punto doppio P al punto doppio infinitamente vicino P_1 e perciò gli spazi lineari passanti per P e P_1 (avendo a comune una linea) non sono atti ad esplorare la singularità di cui si tratta.

Convieni perciò ricorrere a quadriche passanti per P e P_1 e non contenenti la retta PP_1 . Si verificherà allora che effettivamente il punto P_1 è un tacnodo.

(1) M. NOETHER, *Ueber die rationalen Flächen vierter Ordnung*. «Math. Ann.», 1889, XXXIII, p. 546.

(2) G. FANO, *Osservazioni intorno al sistema aggiunto puro...* «Rend. del Circ. Mat. di Palermo», to. XL, p. 29, 1915.

(3) L. GUSSENHOVEN, *Sur les points doubles infiniment voisins d'une surface algébrique*. «Mathesis», to. XLIX, p. 288, 1935.

Per comprendere come per proiezione dal punto doppio P questa F_{2p-2} si proietti in una F_{2p-4} di S_{p-1} dotata ancora di un punto doppio cui è infinitamente vicino un tacnodo, richiamo brevemente il concetto di corde improprie di una curva algebrica L di $S_2 (r \geq 3)$, dovuto a B. Levi⁽¹⁾.

Sia Q un punto s -plo ($s > 1$) di L e M_1, M_2 due punti mobili sopra L. Se M_1 e M_2 si avvicinano a Q sopra uno stesso ramo, la corda $M_1 M_2$ tende alla tangente in Q a quel ramo; se invece si fanno tendere M_1 e M_2 a Q su rami differenti non si può assegnare una posizione limite determinata alla retta M_1, M_2 nella stella di centro Q ed esiste una semplice infinità algebrica di rette per Q che possono pensarsi come posizioni limite di corde $M_1 M_2$ quando M_1 e M_2 tendono a Q con una legge conveniente. Queste rette, che appartengono alla varietà delle corde di L e che non congiungono in generale punti distinti di L, furono chiamate da B. Levi *corde improprie di L relative al punto Q*. È immediato come la nozione di corde improprie si estenda alle superficie.

Ritorniamo ora alla nostra superficie F_{2p-2} . A causa di una certa degenerazione il tacnodo P_1 sembra perdersi quando si proietta la superficie da P: invero il punto P_1 si proietta in un punto doppio P' e la retta doppia infinitesima t , infinitamente vicina a questo punto, si proietta in un punto doppio P'. Ma vicino a P' risorge una retta doppia infinitesima che nasce da una serie di corde improprie della superficie F_{2p-2} relative ai punti di t e passanti per P.

Tutte queste affermazioni verranno più precisamente giustificate nel seguito di questa Nota.

2. Si è visto che una superficie razionale F_{2p-2} di S_p a sezioni iper-piane canoniche si può rappresentare sul piano con un sistema Σ di curve C_n di genere p , che possiede una cubica Γ_3 fondamentale e in cui la serie caratteristica è la serie canonica.

Aggiungiamo ora che Σ non può avere punti base fuori di Γ_3 . Infatti siano i_1, i_2, \dots, i_s le molteplicità della generica C_n nei punti base e quindi

$$(1) \quad 2p - 2 = n^2 - \sum_{r=1}^s i_r^2$$

il grado di Σ ; essendo

$$(2) \quad 2p - 2 = n^2 - 3n - \sum_{r=1}^s i_r (i_r - 1),$$

(1) B. LEVI, *Sulla varietà delle corde di una curva algebrica*. « Mem. R. Accad. Scienze di Torino », ser. II, to. XLVIII, 1899.

Le corde improprie di L, che la incontrano una sola volta, si possono anche definire come le rette che passano per un sol punto di L e sono tali che se si proietta L da un S_{r-3} appoggiato ad una di esse l'abbassamento del genere relativo alla proiezione del punto di L per cui essa passa è maggiore di quello relativo al punto analogo nella proiezione da un S_{r-3} generico.

ne segue

$$(3) \quad \sum_{r=1}^s i_r = 3n,$$

e poichè Γ_3 è fondamentale essa deve contenere tutti i punti base.

Viceversa un sistema Σ completo di curve C_n di genere $p \geq 3$ i cui punti base stiano sopra una cubica Γ_3 fondamentale è immagine di una superficie F_{2p-2} di S_p a sezioni iperpiane canoniche.

Infatti dalla (3), che sussiste in queste ipotesi, segue (tenuto conto della (2)) che il grado di Σ è $2p-2$. Perciò la sua serie caratteristica è la serie canonica ⁽¹⁾ e la sua dimensione p .

Che Σ sia ∞^p si vede anche osservando che i punti base sopra Γ_3 non possono essere presi tutti ad arbitrio; invero se si fissano $3n-1$ intersezioni delle C_n con Γ_3 , la residua intersezione non può variare sulla cubica ellittica e viene determinata dalle precedenti: Σ ha sovrabbondanza 1 e perciò la sua dimensione è

$$n \frac{n+3}{2} - \sum_{r=1}^s \frac{i_r(i_r+1)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2} - 3n - 1 - \sum_{r=1}^s \frac{i_r(i_r-1)}{2} = p.$$

Sia dato ora su un piano π un tale sistema Σ . Alla cubica fondamentale Γ_3 corrisponde sulla superficie F_{2p-2} un punto P ; per determinarne la molteplicità, cerchiamo il numero dei punti comuni alla Γ_3 e a una C_{n-3} aggiunta a una generica C_n e fuori dei punti base di Σ .

La C_{n-3} passa con molteplicità $i-1$ per un punto i -plo delle C_n e quindi, per la (3), la somma delle molteplicità di C_{n-3} nei punti base di Σ è $3n-s$. Pertanto i punti richiesti sono

$$(4) \quad 3(n-3) - (3n-s) = s-9.$$

Questo numero $s-9$ ci dà in generale, e cioè per $s > 10$, la molteplicità di P . Infatti, se $s > 10$, le C_{n-3} incontrano Γ_3 in $s-9$ punti variabili e c'è quindi una corrispondenza non degenera fra i punti di Γ_3 e l'intorno di P sopra F_{2p-2} ⁽²⁾; poichè alle sezioni iperpiane per P corrisponde su π il sistema lineare delle aggiunte C_{n-3} , ne segue immediatamente l'affermazione fatta.

Per $s = 12, 13, \dots, p+9$ si hanno così *superficie razionali* di S_p a *sezioni iperpiane canoniche* e di ordine $2p-2$ aventi un punto triplo, quadriplo, \dots , p -plo.

Per $s = 11$ si ha su F_{2p-2} un punto doppio che è un *tacnodo*.

(1) ENRIQUES-CHISINI, *Teoria geometrica delle equazioni*. L. V, cap. II, § 22, vol. III, p. 192.

(2) ENRIQUES-CAMPEDELLI, *Lezioni sulla teoria geometrica delle superficie algebriche*. Parte I, p. 141.

Infatti le aggiunte C_{n-3} segano ora su Γ_3 una g_2^1 la cui immagine proiettiva (nella corrispondenza fra π e F_{2p-2}) è una retta doppia infinitesima nell'intorno del punto doppio P.

A questo tipo appartiene la superficie del quarto ordine con tacnode di S_3 , rappresentata sul piano da un sistema di $C_6(A_1^2, \dots, A_7^2, B_1, \dots, B_4)$, in cui $A_1, \dots, A_7, B_1, \dots, B_4$ stanno sopra una cubica.

Il caso di $s = 10$ sarà trattato più avanti.

Vediamo ora che deve essere

$$p + 9 \geq s > 9.$$

Infatti se p_1 indica il genere delle aggiunte di ordine $n - 3$ alla generica curva di Σ , si ha

$$\begin{aligned} 2p_1 &= (n-4)(n-5) - \sum_{r=1}^s (i_r - 1)(i_r - 2) = \\ &= (n-4)(n-5) - \sum_{r=1}^s i_r^2 + 3 \sum_{r=1}^s i_r - 2s \end{aligned}$$

e per le (1), (3)

$$(5) \quad s = p - p_1 + 9,$$

da cui

$$s \leq p + 9.$$

Si ha pure dalla (1)

$$\begin{aligned} 2p - 2 &= n^2 - (i_1 + i_2 + \dots + i_s)^2 + 2 \sum i_h i_k \\ &\quad (h = 1, 2, \dots, s; \quad k = 1, 2, \dots, s; \quad h \neq k) \end{aligned}$$

e per la (3)

$$p = 1 + \sum i_h i_k - 4n^2.$$

Se fosse $s \leq 9$ si avrebbe $\sum i_h i_k \leq 4n^2$ ($\sum i_h i_k$ è massima per $i_h = i_k$) e quindi $p \leq 1$, contro l'ipotesi che p sia ≥ 3 .

L'analisi indeterminata dei sistemi Σ ci permette così di classificare e studiare le varie famiglie di superficie F_{2p-2} razionali di S_p a sezioni iperpiane canoniche.

3. Nel caso di $s = 10$ e per $p = 3$, M. Noether⁽¹⁾ ha dato due tipi di sistemi lineari:

$$(I) \quad C_7(A_1^3, B_1^2, \dots, B_9^2)$$

$$(II) \quad C_9(A_1^3, \dots, A_8^3, B_1^2, B_2),$$

in cui al solito i punti $A_1, \dots, B_9, A_1, \dots, B_2$ stanno sopra una cubica fondamentale.

(1) Loc. cit. in (1) a p. 198.

Questi rappresentano ciascuno una superficie razionale del quarto ordine di S_3 , che possiede un punto doppio P al quale è infinitamente vicino un tacnodo. Nella superficie rappresentata dal sistema (I), il tacnodo è infinitamente vicino a P in una posizione generica, mentre invece nella seconda la retta che congiunge il punto P al tacnodo è incidente alla retta doppia infinitesima che sta nell'intorno di questo punto e quindi appartiene alla superficie.

Supponiamo ora di avere un sistema lineare di genere $p > 3$ con 10 punti base sopra una Γ_3 fondamentale. Poichè, per la (4) le aggiunte incontrano Γ_3 in un solo punto che non può variare sulla cubica ellittica, Γ_3 è fondamentale anche per il sistema aggiunto Σ_1 e la corrispondenza fra l'intorno di P e i punti di Γ_3 è degenere. Se fra i punti base di Σ nessuno è semplice, il sistema Σ_1 ha 11 punti base sopra Γ_3 e quindi le aggiunte d'ordine $n - 6$ segano sopra Γ_3 una g_2^1 .

A Σ_1 , che per la (5) è di genere $p - 1$, corrispondono le sezioni iperpiane per un punto P doppio di F_{2p-2} e al sistema Σ_2 delle aggiunte di ordine $n - 6$ corrispondono le sezioni di F_{2p-2} per P e per un tacnodo P_1 infinitamente vicino a P . La corrispondenza, che è degenere fra i punti di Γ_3 e l'intorno di P , si ha ora fra i punti di Γ_3 e l'intorno di P_1 ⁽¹⁾.

Si è così dimostrato che se il sistema rappresentativo ha 10 punti base, di cui nessuno sia semplice, la superficie corrispondente ha qualunque sia p una singolarità che, esaminata più da vicino, è quella della superficie (I) di Noether.

(1) ENRIQUES-CAMPEDELLI, loc. cit. in (2) a p. 200.

Matematica. — *Famiglie di ipersuperficie isoparametriche negli spazi euclidei ad un qualunque numero di dimensioni* (da una lettera diretta al prof. LEVI-CIVITA). Nota di B. SEGRE, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

... La lettura della Sua recente Nota lineea, *Famiglie di superficie isoparametriche nell'ordinario spazio euclideo* ⁽²⁾, mi ha indotto a ricercare come il risultato in essa conseguito possa venir esteso agli spazi euclidei ad un qualsiasi numero $n + 1 \geq 2$ di dimensioni. Ed ora posso dimostrarLe che in S_{n+1} esistono solo i seguenti $n + 1$ tipi di famiglie di ipersuperficie isoparametriche (tali cioè da risultare di livello costante per una funzione e , in pari tempo, per il suo 1° e per il suo 2° parametro differenziale): a) *iperpiani paralleli*; b) *ipersfere concentriche*; c) *ipersuperficie cilindriche coassiali*, deducibili da una famiglia di ipersfere concentriche di un S_{r+1} subordinato di S_{n+1} ($r = 1, 2, \dots, n - 1$) mediante le ∞^{n-r} traslazioni di S_{n+1} ortogonali ad S_{r+1} [per $n = 1$, ossia nel caso del piano, si hanno naturalmente solo i tipi a), b)].

Prima, però, mi permetto di segnalarLe la circostanza — manifestamente sfuggitaLe — che il Suo risultato (a cui si riduce il precedente enunciato per $n = 2$) trovasi già sostanzialmente nella Nota del prof. SOMIGLIANA, *Sulle relazioni fra il principio di Huygens e l'ottica geometrica* [« Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », to. 54 (1919), p. 974, oppure « Memorie scelte », p. 439], ov'è stabilito che: « Una famiglia di superficie parallele dell'ordinario spazio euclideo, tale che ogni funzione che sia costante sulle superficie della famiglia abbia il Δ_2 che goda della stessa proprietà, « è necessariamente un sistema di piani paralleli, o di sfere concentriche, oppure di cilindri circolari coassiali ». Per dedurre da qui il Suo teorema, basta invero osservare che, se $f = \text{cost.}$ è una famiglia di superficie parallele — tale cioè che $\Delta_1 f$ risulti costante su ciascuna di esse — e si suppone che di questa proprietà goda anche $\Delta_2 f$, una qualunque funzione $F(f)$ che si mantenga costante su quelle superficie ha il Δ_2 che ancora gode della suddetta proprietà, essendo notoriamente

$$(1) \quad \Delta_2 F^2 = \frac{d^2 F}{df^2} \Delta_1 f + \frac{dF}{df} \Delta_2 f.$$

Ed un'osservazione perfettamente analoga può farsi in S_{n+1} , con $n \geq 1$ qualsiasi.

(1) Nella seduta del 6 marzo 1938.

(2) Questi « Rendiconti » serie VI, to. 26 (1937)₂, pp. 355-362.

Aggiungo che — in uno dei miei primi lavori, intitolato: *Una proprietà caratteristica di tre sistemi ∞^1 di superficie* [« Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino », to. 59 (1924), p. 666] — ho ottenuto una proposizione apparentemente più ampia di quella del SOMIGLIANA, il cui enunciato può dedursi dal precedente sopprimendovi la parola *parallele*. La mia dimostrazione corre completamente autonoma, rispetto a quella anteriore del SOMIGLIANA: ma i due risultati in fondo si equivalgono (del che non mi accorsi redigendo la Nota citata), poichè dalla (1) segue che se F è funzione non lineare di f , e $\Delta_2 f, \Delta_2 F$ dipendono solo da f , anche $\Delta_1 f$ risulta una funzione di f .

E vengo all'annunciata estensione all' S_{n+1} . Nessuna delle dimostrazioni dei tre lavori citati può venir senz'altro generalizzata, dato che per $n > 2$ — a differenza di quanto accade per $n = 1, 2$ — un'ipersuperficie generale di S_{n+1} non appartiene ad alcun sistema $(n+1)$ -plo ortogonale [cfr. p. es. L. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, 3^a ediz. (1923), to. II, pp. 463 e 471]. Qui riesco ad evitare la non lieve difficoltà che ne consegue, servendomi di argomentazioni geometriche, le quali — per $n = 2$ — appaiono fors'anche più semplici degli sviluppi (prevalentemente analitici) contenuti nei suddetti lavori.

Incomincio coll'osservare che le considerazioni preliminari della Sua Nota conservano la loro validità in S_{n+1} , onde il quadrato dell'elemento lineare di S_{n+1} può porsi sotto la forma (geodetica)

$$ds^2 = ds_1^2 + 2v ds_2^2 + v^2 ds_3^2 + dv^2,$$

dove le $v = \text{cost.}$ rappresentano una qualsivoglia famiglia di superficie parallele (aventi per normali le linee su cui varia la sola v), e

$$ds_1^2 = \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n a_{hk} du_h du_k, \quad ds_2^2 = \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n b_{hk} du_h du_k,$$

$$ds_3^2 = \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n c_{hk} du_h du_k$$

denotano ordinatamente la 1^a, la 2^a e la 3^a forma quadratica fondamentale della ipersuperficie F di equazione $v = 0$, sulla quale u_1, u_2, \dots, u_n sono coordinate curvilinee, talchè le a, b, c possono dipendere dalle u , ma non da v .

Posto per abbreviare

$$\omega_{hk}(u_1, u_2, \dots, u_n; v) = a_{hk} + 2v b_{hk} + v^2 c_{hk},$$

$$\Omega(u_1, u_2, \dots, u_n; v) = |\omega_{hk}|,$$

si può dunque scrivere

$$ds^2 = \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n \omega_{hk} du_h du_k + dv^2,$$

onde risulta [ved. L. BIANCHI, op. cit., to. I, p. 85, form. (23)]:

$$\Delta_2 v = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \log \Omega.$$

Pertanto, affinchè le $v = \text{cost.}$ siano ipersuperficie isoparametriche e cioè tali che $\Delta_2 v$ si riduca ad una funzione della sola v , che può assumersi uguale ad $\frac{1}{2} \frac{d}{dv} \varphi(v)$, dev'essere

$$\Omega(u_1, u_2, \dots, u_n; v) = \varphi(v) e^{\Phi(u_1, u_2, \dots, u_n)},$$

indicando con Φ una funzione delle sole u . Ne consegue che l'equazione

$$(2) \quad \Omega(u_1, u_2, \dots, u_n; v) = 0,$$

la quale risulta un'equazione algebrica nella v (di grado $2n$ al più), ammette soltanto radici $v = \text{cost.}$ (indipendenti dalle u).

D'altro canto, riferendo S_{n+1} ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali x_0, x_1, \dots, x_n e denotando con (X_0, X_1, \dots, X_n) i coseni direttori della normale p orientata in un generico punto $P(x_0, x_1, \dots, x_n)$ di F , si ha che uno qualunque ρ degli n raggi principali di curvatura di F in P è tale che

$$(3) \quad dx_i = \rho dX_i \quad (\text{per } i = 0, 1, \dots, n)$$

o, sotto forma equivalente,

$$\sum_{h=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial u_h} du_h = \rho \sum_{h=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial u_h} du_h,$$

dove i differenziali vanno presi lungo una linea di curvatura di F uscente da P [cfr. L. BIANCHI, op. cit., to. II, p. 556]. Moltiplicando ambo i membri dell'ultima uguaglianza per $\frac{\partial x_i}{\partial u_k} - \rho \frac{\partial X_i}{\partial u_k}$ e sommando le $n+1$ equazioni che così si hanno per $i = 0, 1, \dots, n$, si ottiene

$$\sum_{i=0}^n \sum_{h=1}^n \left[\frac{\partial x_i}{\partial u_h} \frac{\partial x_i}{\partial u_k} - \rho \left(\frac{\partial x_i}{\partial u_h} \frac{\partial X_i}{\partial u_k} + \frac{\partial x_i}{\partial u_k} \frac{\partial X_i}{\partial u_h} \right) + \rho^2 \frac{\partial X_i}{\partial u_h} \frac{\partial X_i}{\partial u_k} \right] du_h = 0,$$

ossia, in virtù di note relazioni [ved. L. BIANCHI, op. cit., to. II, p. 561],

$$\sum_{h=1}^n (a_{hk} - 2\rho b_{hk} + \rho^2 c_{hk}) du_h = 0 \quad (\text{per } k = 1, 2, \dots, n).$$

Dalla coesistenza di queste per valori non tutti nulli delle du_h segue l'annullarsi del relativo determinante dei coefficienti, ciò che significa che, in ogni caso, $v = -\rho$ è una radice della (2).

Dunque, nell'ipotesi ammessa, *tutti i raggi principali di curvatura della ipersuperficie F sono costanti*; e, per lo scopo prefissomi, basterà che dimostri non esservi in S_{n+1} altre ipersuperficie godenti di tale proprietà, all'infuori di quelle considerate in a), b), c).

Premetto tre osservazioni, che possono presentare interesse anche a prescindere dall'applicazione che poi ne farò.

I. Suppongasi che l'equazione secolare

$$(4) \quad |a_{hk} - \rho b_{hk}| = 0,$$

che tosto si desume dalle (3) per gli n raggi principali di curvatura della F , ammetta una radice $\rho = \text{cost.}$ (finita, certo non nulla essendo $|a_{hk}| \neq 0$), multipla secondo $r (\geq 1)$. Per tale valore di ρ il determinante a primo membro della (4) dovrà conseguentemente assumere la caratteristica $n - r$, e le (3) si ridurranno su F ad un sistema pfaffiano di $n - r$ equazioni indipendenti; dico che tale sistema risulta completamente integrabile, e precisamente ammette come varietà integrali ∞^{n-r} ipersfere ad r dimensioni (o, brevemente, r -sfere) di raggio $|\rho|$.

Basta invero rilevare che, quando il punto $P(x_0, x_1, \dots, x_n)$ si muove su F lungo una curva integrale del sistema (3), rimane fisso il punto O di coordinate $x_i - \rho X_i$ (situato sulla normale p in P ad F): dunque l'ipersfera Σ di centro O e raggio $|\rho|$ tocca F lungo quella curva. La varietà V_r luogo di ∞^{r-1} curve integrali uscenti da un punto di F genericamente fissato, in direzioni indipendenti fra loro, è perciò varietà di contatto di F con una determinata ipersfera Σ ; onde una qualunque linea tracciata su essa è una curva integrale del sistema (3), in quanto le normali ad F nei suoi punti concorrono nel centro O di Σ .

In corrispondenza alle $\infty^{n-r} V_r$ integrali si hanno così ∞^{n-r} ipersfere Σ , tutte di raggio $|\rho|$, e sia V_{n-r} la varietà luogo dei loro centri. Se, supposto $r \leq n - 1$, O varia arbitrariamente su questa, mantenendosi sempre P sulla relativa V_r , il segmento OP conserva lunghezza $|\rho|$ costante; dunque lo spostamento del punto O deve - come quello del punto P - risultare sempre normale ad OP [infatti da $(P - O)^2 = \text{cost.}$, $dP \times (P - O) = 0$ si trae subito $dO \times (P - O) = 0$]. Ne consegue che, fissato O , ognuna delle ∞^r rette OP sta necessariamente nell' S_{r+1} per O totalmente ortogonale all' S_{n-r} tangente in O alla V_{n-r} , epperanto V_r si riduce all' r -sfera di raggio $|\rho|$ segata su Σ da tale suo S_{r+1} diametrale.

II. Considerazioni perfettamente analoghe alle precedenti mostrano che, se $\rho = \infty$ è radice s -pla della (4), e cioè se questa equazione algebrica nella ρ si riduce al grado $n - s$ (con $s \geq 1$), esistono ∞^{n-s} iperpiani, ciascuno dei quali tocca F lungo una V_s .

Per $s \leq n - 1$ si ha inoltre dalla teoria degli involucri che quelle V_s , essendo varietà caratteristiche del suddetto sistema ∞^{n-s} di iperpiani, debbono ridursi a spazi lineari.

III. La (4) non può mai ammettere due diverse radici costanti (entrambe finite).

Siano invero, se possibile, ρ, ρ' due radici siffatte ed r, r' le rispettive molteplicità. Si considerino sulla normale p ad F nel generico punto P i punti O, O' tali che risulti (tenuto anche conto dei segni) $OP = \rho, O'P = \rho'$, eppertanto $OO' = \rho - \rho'$: in base ad I, il punto O varierà su di una V_{n-r} ed O' descriverà una $V_{n-r'}$.

Fissato O su V_{n-r} , resta determinata su F la r -sfera V_r di contatto coll'ipersfera di centro O e raggio $|\rho|$; ed è ovvio che la r -sfera V_r^* di raggio $|\rho - \rho'|$, concentrica e cospaziale a V_r , risulta luogo di punti O' . Ma ciò è assurdo, dato che le $\infty^{n-r} V_r^*$ che si ottengono al variare di O su V_{n-r} costituiscono una varietà W che ha dimensione n (e non $n - r'$, come al più dovrebbe essere!): si vede infatti che lo spazio lineare che tocca W in un suo punto generico ha precisamente la dimensione n , supponendo — com'è lecito, trattandosi di questione infinitesimale del 1° ordine — V_{n-r} ridotta ad uno spazio lineare, nel qual caso W risulta addirittura simile alla F .

La proprietà III implica che, se tutte le radici dell'equazione (4) si riducono a costanti, non possono che presentarsi i casi seguenti.

a) La (4) ammette la sola radice $\rho = \infty$, necessariamente n -pla, ossia il suo primo membro non dipende da ρ ; allora, in base a II, F è un'iperpiano.

b) La (4) ammette una radice n -pla $\rho = \text{cost.}$ (finita); allora, in virtù di I, F è un'ipersfera di raggio $|\rho|$.

c) La (4) ammette la radice r -pla $\rho = \text{cost.}$ (finita) e la radice $(n - r)$ -pla $\rho = \infty$ (ove si suppone $n > 1$ ed r può assumere uno qualsiasi dei valori $1, 2, \dots, n - 1$). Allora, in forza delle I, II, su F vi sono ∞^{n-r} r -sfere di raggio $|\rho|$ ed $\infty^r S_{n-r}$, costituenti nel loro complesso le varietà integrali delle equazioni delle linee di curvatura. Per ogni punto P di F passano un' r -sfera ed un S_{n-r} , i quali — a norma di una proprietà generale delle linee di curvatura [ved. L. BIANCHI, op. cit., to. II, pp. 461-462] — risultano fra loro totalmente ortogonali in P : la F è dunque un ipercilindro, e può dedursi da una di quelle r -sfere associandola in S_{n+1} alle ∞^{n-r} traslazioni ortogonali al suo spazio di appartenenza.

La proposizione enunciata in principio è con ciò completamente dimostrata, essendo subito manifesta l'isoparametricità delle famiglie a), b), c) ivi considerate.

Matematica. — *Sui sistemi di equazioni a derivate parziali d'ordine qualunque, con una sola funzione incognita, lineari ed a coefficienti costanti.* Nota di B. SEGRE, presentata ⁽¹⁾ dal Socio F. SEVERI.

Gli operatori differenziali lineari omogenei a coefficienti costanti, applicabili ad una funzione (convenientemente derivabile) di date variabili x_1, x_2, \dots, x_r , costituiscono manifestamente un anello commutativo, se si definiscono nel modo consueto la somma ed il prodotto fra essi. Tale anello risulta riferito in un isomorfismo oloedrico a quello dei polinomi nelle stesse variabili, qualora si convenga di associare il polinomio

$$A = \sum c_{i_1 i_2 \dots i_r} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_r^{i_r} \quad (\text{colle } c \text{ costanti})$$

all'operatore

$$\mathcal{A} = \sum c_{i_1 i_2 \dots i_r} \frac{\partial^{i_1 + i_2 + \dots + i_r}}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \dots \partial x_r^{i_r}}.$$

Questa osservazione, certo non nuova, permette — come mostrerò qui ed altrove — di ottenere rapidamente, lumeggiandoli nella loro essenza algebrica, vari risultati sui sistemi di equazioni a derivate parziali lineari ed a coefficienti costanti, con una sola funzione incognita $f(x_1, x_2, \dots, x_r)$, della forma cioè

$$(I) \quad \mathcal{A}_1 f = u_1, \mathcal{A}_2 f = u_2, \dots, \mathcal{A}_n f = u_n,$$

dove $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$ sono operatori di ordini qualunque del tipo dianzi considerato e le u_1, u_2, \dots, u_n sono funzioni note delle x_1, x_2, \dots, x_r .

A tale proposito non riuscirà forse inopportuno rilevare che l'integrazione di una sola equazione differenziale

$$\mathcal{A}f = u,$$

quale è stata esposta dal D'ARCAIS ⁽²⁾, consiste sostanzialmente nell'inversione dell'operatore \mathcal{A} , dedotta — seguendo il PINCHERLE — da opportuni sviluppi in serie della funzione A^{-1} . Le formule del D'ARCAIS sono complicate, valide in un piccolo intorno ed applicabili soltanto nel campo ana-

(1) Nella seduta del 6 marzo 1938.

(2) F. D'ARCAIS, *Sulla integrazione delle equazioni lineari a derivate parziali d'ordine qualunque*. «Atti del R. Istit. Veneto», to. 67, pp. 191-209 (1907-8).

litico; e lo stesso può dirsi delle formule di tutt'altro tipo recentemente ottenute dal FANTAPPIÈ (1).

1. Supponiamo che gli operatori \mathcal{A}_h siano degli ordini m_h (per $h = 1, 2, \dots, n$), e che le funzioni u_h siano definite in un certo campo Γ dello spazio delle variabili x_1, x_2, \dots, x_r , nel quale ammettano derivate fino all'ordine $p_h = m_1 m_2 \dots m_n - m_h + 1 (\geq m_k$ per $k \neq h$). Per la compatibilità delle (1) debbono ovviamente sussistere le

$$(2) \quad \mathcal{A}_h u_k = \mathcal{A}_k u_h \quad (\text{per } h, k = 1, 2, \dots, n),$$

che tosto conseguono dalla commutatività degli operatori \mathcal{A} . Ci proponiamo di dimostrare che

Se valgono le (2), e se le n ipersuperficie

$$(3) \quad \begin{cases} A_1(x_1, x_2, \dots, x_r) = 0, \\ A_2(x_1, x_2, \dots, x_r) = 0, \dots, A_n(x_1, x_2, \dots, x_r) = 0 \end{cases}$$

associate agli operatori $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$ sono prive di punti propri comuni (ciò che in generale implica la limitazione $n \geq r + 1$), il sistema (1) ammette in Γ una ed una sola soluzione, la quale può venir calcolata operando sulle u con sole derivazioni.

Quanto si è supposto relativamente alle (3) equivale infatti all'esistenza di n polinomi P_1, P_2, \dots, P_n nelle x_1, x_2, \dots, x_r , coi gradi ordinatamente inferiori a p_1, p_2, \dots, p_n , tali che risulti identicamente

$$(4) \quad \sum_{h=1}^n P_h A_h = 1^{(2)}.$$

Denotando con \mathcal{B}_h l'operatore lineare associato a P_h e con \mathcal{I} l'operatore identico, si avrà dunque:

$$(5) \quad \sum_{h=1}^n \mathcal{B}_h \mathcal{A}_h = \mathcal{I};$$

onde una funzione f che soddisfaccia al sistema (1) non può essere che

$$(6) \quad f = \sum_{h=1}^n \mathcal{B}_h u_h.$$

(1) L. FANTAPPIÈ, *Integrazione in termini finiti di ogni sistema od equazione a derivate parziali, lineare e a coefficienti costanti, d'ordine qualunque*. « Mem. della R. Acc. d'Italia », to. 8, pp. 613-653 (1937).

(2) Ciò segue subito da una nota proprietà del risultante, per la quale cfr. R. PERLIN, *Sur la relation qui existe entre p fonctions entières de $p - 1$ variables*. « Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences de Paris », to. 106, pp. 1789-91 (1888).

Si constata poi subito, tenendo conto delle (2) e della (5), che questa funzione verifica effettivamente le (1), avendosi:

$$\mathcal{A}_k f = \sum_{h=1}^n \mathcal{B}_h \mathcal{A}_k u_h = \sum_{h=1}^n \mathcal{B}_h \mathcal{A}_h u_k = u_k \quad (\text{per } k = 1, 2, \dots, n).$$

2. Poggiando su argomentazioni perfettamente analoghe alle precedenti si prova che:

Se le ipersuperficie (3) hanno in comune una varietà (pura od impura) ad $s (\geq 0)$ dimensioni, ogni soluzione f del sistema (1) soddisfa ad un'equazione a derivate parziali, lineare ed a coefficienti costanti, nella quale compaiono solo le derivate parziali della f rispetto ad $s + 1$ — comunque prefissate — delle variabili x_1, x_2, \dots, x_r .

Tale equazione a derivate parziali, determinabile in ogni caso con soli calcoli algebrici ed operazioni di derivazione, può venire utilmente adoperata per lo studio e per il calcolo effettivo delle soluzioni del sistema (1). È da notare che, per $s = 0$, la suddetta equazione si riduce sostanzialmente ad un'equazione (lineare ed a coefficienti costanti) alle derivate ordinarie, la cui integrazione completa si effettua elementarmente.

La particolarità dianzi segnalata si presenta sempre per $n = r = 2$, tranne un caso irrilevante. Vedremo in altro lavoro come allora possa condursi in fondo l'integrazione del sistema, con un metodo più semplice di quelli conosciuti, che di più fornisce indicazioni precise sul numero delle costanti arbitrarie da cui dipende l'integrale generale.

3. Dei sistemi di 3 equazioni differenziali in una funzione incognita di 2 variabili si è recentemente occupato il BOGGIO⁽¹⁾. Questi — seguendo un procedimento estremamente lungo e faticoso (estensibile però al caso in cui la funzione incognita dipenda da un qualunque numero di variabili), fondato sulla ripetuta applicazione delle citate formule di D'ARCAIS — è giunto ad un risultato assai meno espressivo di quello che si desume per $n = 3$, $r = 2$ dal teorema qui stabilito nel n. 1. Detto risultato afferma infatti solo che esiste qualche soluzione per un sistema (1) (con $n = 3$, $r = 2$), sotto condizioni — assai più restrittive di quelle qui ammesse nel n. 1 — implicanti, oltre alle (2), l'analiticità dei secondi membri delle (1) ed escludenti certe particolarità delle curve (3) rispetto all'asse delle x_1 ; così, p. es., il sistema

(1) T. BOGGIO, *Sulle soluzioni comuni a tre equazioni lineari con derivate parziali*. «Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino», to. 73, pp. 58-78 (1937).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} - \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial f}{\partial x_1} - 2 \frac{\partial f}{\partial x_2} - f = x_1 x_2 + 2 x_1 + 2 x_2 - 1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial f}{\partial x_1} - 2 \frac{\partial f}{\partial x_2} - f = x_1 x_2 + 2 x_1 - 2 x_2 - 1 \end{array} \right.$$

(avente la soluzione $f = 1 - x_1 x_2$) non rientra fra quelli considerati dall'A. citato, pur potendosi ad esso applicare il teorema del n. 1.

È curioso che il BOGGIO (a p. 60 del lavoro indicato in nota) affermi che — quando non sono soddisfatte le sue ipotesi — il sistema non può ammettere soluzioni. Quest'asserzione è inesatta, come già mostra l'esempio precedente e come si poteva presumere *a priori*, in base all'asimmetria delle suddette ipotesi rispetto alle variabili; essa deve esser stata suggerita al BOGGIO dal fatto che, se tali ipotesi non sono verificate, il suo metodo di integrazione non può venir impiegato.

Possiamo raffrontare questo metodo col processo estremamente semplice e generale del n. 1, riferendoci al sistema:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = u_1(x_1, x_2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial f}{\partial x_1} = u_2(x_1, x_2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + 2f = u_3(x_1, x_2), \end{array} \right.$$

l'integrazione di un caso particolare del quale è compiuta in tre pagine dell'ultimo lavoro citato (nn. 8, 9). Essendo ora

$$n = 3, r = 2; \quad A_1 = x_1 x_2 - x_2^2, \quad A_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_1, \quad A_3 = x_1^2 + 2,$$

si soddisfa alla (4) assumendo

$$P_1 = \frac{1}{18} (x_1^2 - x_1 x_2 - x_1 + 2 x_2 - 2),$$

$$P_2 = \frac{1}{18} (2 x_1^2 - x_1 x_2 - 3 x_1 + 2 x_2 - 2),$$

$$P_3 = \frac{1}{18} (-2 x_1^2 + x_1 + 9).$$

Dunque il sistema (7), nell'ipotesi che per esso valgano le condizioni (2) d'integrabilità, ammette una ed una sola soluzione f , data — a norma della (6) — da:

$$\begin{aligned}
 18 \, f(x_1, x_2) = & \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + 2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - 2 u_1 \right) + \\
 & + \left(2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} - 3 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + 2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - 2 u_2 \right) \\
 & + \left(-2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + 9 u_3 \right).
 \end{aligned}$$

In particolare, supposto col BOGGIO $u_1 = u_2 = 0$, onde per l'integrabilità delle (7) dev'essere

$$u_3(x_1, x_2) = c_1 + c_2 x_2 + c_3 e^{-x_1} + c_4 e^{-\frac{1}{2}(x_1 + x_2)} \quad (\text{colle } c \text{ costanti}),$$

risulta senz'altro:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2} c_1 + \frac{1}{2} c_2 x_2 + \frac{1}{3} c_3 e^{-x_1} + \frac{4}{9} c_4 e^{-\frac{1}{2}(x_1 + x_2)}.$$

Matematica. — *Sul problema di Cauchy nel caso non analitico.* Nota di C. TOLOTTI, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. È noto come, a differenza di quanto accade per il teorema di Cauchy relativo alle equazioni differenziali ordinarie, il teorema fondamentale di esistenza ed unicità della soluzione per i sistemi normali di equazioni alle derivate parziali (teorema di Cauchy-Kowalewski) è valido con tutta generalità solo nel caso che sia le equazioni che i dati iniziali siano espressi da funzioni analitiche. Se questa ipotesi non è verificata, il teorema può anche non esser vero, come, ad es., per l'equazione $\Delta u = 0$ con dati iniziali non analitici⁽²⁾.

Si può osservare però che anche nel caso non analitico, esista o non esista la soluzione, può continuare a sussistere il procedimento di determinazione locale delle successive derivate delle funzioni incognite che Cauchy segue nel suo « Calcul des Limites ». Naturalmente, tale procedimento verrà ora arrestato ad un certo stadio o dalla non analiticità delle equazioni o da quella dei dati iniziali; e si potrà quindi costruire, nell'intorno di ogni singolo punto, uno sviluppo tayloriano (soluzione approssimata) che verificherà le equazioni e condizioni del problema solo a meno di termini di un certo ordine.

Noi vogliamo in questa Nota, adottando per il caso non analitico questo studio locale approssimato, pervenire a chiaramente stabilire come

(1) Nella seduta del 6 marzo 1938.

(2) Cfr. ad es., J. HADAMARD, *Problème de Cauchy*. Paris, Hermann, 1932, p. 30.

l'ordine, a meno del quale le equazioni del problema si possono verificare, sia collegato agli ordini di derivabilità delle funzioni note intervenienti nelle equazioni e nei dati iniziali.

2. Cominceremo col precisare notazioni e ipotesi.

Siano u_1, u_2, \dots, u_m m funzioni incognite delle variabili indipendenti t, x_1, \dots, x_n . Un generico sistema di equazioni alle derivate parziali nelle u , normale rispetto alla variabile t , è del tipo

$$(1) \quad \frac{\partial^{r_i} u_i}{\partial t^{r_i}} = F_i(t | x | v) \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

dove le v che compariscono nei secondi membri sono derivate parziali delle u rispetto alle variabili t, x di ordine (finito o nullo) qualsiasi, purchè rispetto a t di ordine minore di r_i per la corrispondente u_i .

Il problema di Cauchy relativo al detto sistema (1) e all'iperpiano $t = t_0$ consiste nel determinare una soluzione del sistema (1) tale che per $t = t_0$ le u_i e le loro derivate rispetto a t fino all'ordine $r_i - 1$ si riducano a funzioni assegnate

$$(2) \quad \left[\frac{\partial^s u_i}{\partial t^s} \right]_{t=t_0} = f_i^{(s)}(x) \quad \left(\begin{matrix} i = 1, 2, \dots, m \\ s = 0, 1, \dots, r_i - 1 \end{matrix} \right).$$

Come accennavamo al n. 1, noi, prescindendo dall'esistenza o meno di una soluzione rigorosa di tale problema, ci porremo da un punto di vista strettamente locale e, fissato un punto qualsiasi $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ dell'iperpiano $t = t_0$, cercheremo di soddisfare approssimativamente le (1), (2) nell'intorno di tale punto, mediante sviluppi tayloriani delle incognite u spinti il più avanti possibile compatibilmente colla non analiticità delle F_i ed $f_i^{(s)}$.

Nei riguardi delle F_i ed $f_i^{(s)}$ ammetteremo precisamente:

che le $f_i^{(s)}(x)$ siano dotate nell'intorno di $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ di derivate finite e continue fino all'ordine μ ;

che, indicati con \bar{v}_{0ij} i valori che le v_j assumono in virtù delle (2) per $t = t_0, x = \bar{x}$, le $F_i(t | x | v)$ nell'intorno di quei valori dei loro argomenti siano dotate di derivate finite e continue fino all'ordine ν .

Detto infine q l'ordine massimo di derivazione rispetto alle x che compare nelle v , denoteremo con p il minore dei due interi positivi $\nu, \mu - q$, supponendo che sia almeno $\mu > q$.

3. Passiamo ora ad esaminare come dipende da p e q l'ordine massimo delle derivate delle incognite u rispetto a t, x_1, \dots, x_n che nel punto fissato $t_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ si possono ricavare dalle (1), (2) con successive derivazioni. In altre parole, cerchiamo quand'è che nel calcolo di queste successive deri-

vate non intervengono derivazioni delle F_i ed $f_i^{(s)}$ di ordini rispettivamente superiori a ν e μ .

A tal scopo ci converrà dapprima formarci le derivate parziali delle u_i rispetto alla sola variabile t . Esse, fino all'ordine $r_i - 1$, sono date dalle (2); per l'ordine r_i ed ordini superiori si ottengono ponendo $t = t_0$ nella (1) e nelle relazioni dedottene con successive derivazioni rispetto a t

$$(3) \quad \frac{\partial^{r_i+1} u_i}{\partial t^{r_i+1}} = \frac{\partial F_i}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial F_i}{\partial v_j} \frac{\partial v_j}{\partial t},$$

$$(4) \quad \frac{\partial^{r_i+2} u_i}{\partial t^{r_i+2}} = \frac{\partial^2 F_i}{\partial t^2} + 2 \sum_j \frac{\partial^2 F_i}{\partial t \partial v_j} \frac{\partial v_j}{\partial t} + \sum_{j,l} \frac{\partial^2 F_i}{\partial v_j \partial v_l} \frac{\partial v_j}{\partial t} \frac{\partial v_l}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial F_i}{\partial v_j} \frac{\partial^2 v_j}{\partial t^2},$$

.....

Partendo da queste espressioni delle $\frac{\partial^s u_i}{\partial t^s}$ e stante le ipotesi fatte sui limiti di derivabilità delle F_i e $f_i^{(s)}$, si ricava che, di tutte le derivate delle u rispetto a t, x_1, \dots, x_n nel punto $t_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$:

quelle di ordine $s < r_i$ rispetto a t , si possono ottenere dalle (2) fino all'ordine complessivo $\mu + s$ rispetto a t, x_1, \dots, x_n ;

quelle di ordine r_i rispetto a t , che vanno calcolate dalla (1), si possono ottenere fino a un ordine complessivo dato dal minore dei due numeri $\nu + r_i$, $\mu - q + r_i$ e cioè, secondo la notazione introdotta al n. 2, da $p + r_i$;

quelle di ordine $r_i + 1$ rispetto a t , poichè a secondo membro della (3) tra le $\frac{\partial v_j}{\partial t}$ compaiono derivate delle u di ordine r_i rispetto a t , si possono ottenere fino all'ordine complessivo $p - q + r_i + 1$;

quelle di ordine $r_i + 2$ rispetto a t , poichè a secondo membro della (4) tra le $\frac{\partial^2 v_j}{\partial t^2}$ compaiono derivate delle u di ordine $r_i + 1$ rispetto a t , si possono ottenere fino all'ordine complessivo $p - 2q + r_i + 2$;

e così via, il procedimento venendo arrestato alle derivate che rispetto a t sono di ordine $r_i + h$, con h massimo intero per cui è ancora $p \geq hq$.

È facile verificare che per $k = 0, 1, \dots, h$ si ha sempre

$$p - kq + r_i + k \geq r_i + h.$$

Ne segue che, riassumendo in un unico enunciato i risultati ora stabiliti, si può affermare:

I limiti di derivabilità ammessi per le $f_i^{(s)}$ ed F_i consentono di calcolare le derivate delle u_i , nell'intorno fissato sull'iperpiano $t = t_0$, fino a un ordine complessivo che, detto s l'ordine parziale di derivazione rispetto a t , è dato da $\mu + s$ per $s < r_i$ ed è maggiore o uguale di $r_i + h$ per $s \geq r_i$.

4. Accertata così la possibilità di ricavare dalle (1), (2) nel punto $t_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ le derivate delle u_i rispetto a t, x_1, \dots, x_n fino agli ordini complessivi di derivazione ora stabiliti, assumiamo come espressioni delle u_i nell'intorno fissato le seguenti espressioni polinomiali, i cui coefficienti sono formati con quelle derivate,

$$(5) \quad u_i = \sum_0^{r_i+h} \frac{(t-t_0)^s}{s!} \sum_0^{k_s} \frac{1}{k!} \left[(x_1 - \bar{x}_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (x_n - \bar{x}_n) \frac{\partial}{\partial x_n} \right]^k \left(\frac{\partial^s u_i}{\partial t^s} \right)_{t=t_0, x=\bar{x}}$$

$$(i = 1, \dots, m),$$

essendo $k_s = \mu$ per $s < r_i$ e $k_s = r_i + h - s$ per $s \geq r_i$, e dove inoltre il prodotto dei simboli $\frac{\partial}{\partial x}$ va inteso nel senso che, ad es., il prodotto di $\frac{\partial}{\partial x_1}$ per $\frac{\partial^s u_i}{\partial t^s}$ è la derivata $\frac{\partial^{s+1} u_i}{\partial t^s \partial x_1}$.

Le espressioni (5) assunte per le u_i costituiscono una soluzione approssimata del problema di Cauchy (1), (2) nell'intorno del punto $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ fissato sull'iperpiano $t = t_0$ dei valori iniziali. E precisamente è di immediata verifica che le (5) soddisfano le condizioni (2) a meno di termini di ordine superiore a μ . Quanto poi alle equazioni (1), sostituendo in esse le (5) al posto delle u_i , si vengono ad eliminare dai due membri tutti i termini di ordine non superiore ad h e ciò pel modo stesso con cui attraverso le (1), (3), (4), \dots sono stati ricavati i coefficienti delle espressioni (5). Le equazioni (1) sono quindi soddisfatte a meno di termini di ordine superiore ad h .

Possiamo allora concludere:

Nell'intorno di ogni punto dell'iperpiano $t = t_0$ in cui le F_i ed $f_i^{(s)}$ soddisfano alle ipotesi di derivabilità fatte al n. 2, si può, prescindendo dall'esistenza o meno di una soluzione rigorosa del problema di Cauchy (1), (2), costruire una soluzione approssimata (5) che verifica le condizioni iniziali (2) e le equazioni (1) a meno di termini di ordini superiori rispettivamente a μ e h , h essendo il massimo intero per cui $hq \leq p$.

5. A titolo di esempio, facciamo qui in ultimo una breve applicazione dei risultati precedenti al caso (citato al n. 1) dell'equazione

$$(6) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

con i dati iniziali

$$(7) \quad [u]_{t=t_0} = f_1(x) \quad , \quad \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]_{t=t_0} = f_2(x),$$

f_1, f_2 essendo funzioni, analitiche o no, dotate nell'intorno di $x = \bar{x}$ di derivate finite e continue fino all'ordine 2λ .

Abbiamo ricordato al n. 1 che questo problema (6), (7) è risolubile rigorosamente soltanto se f_1, f_2 sono analitiche. Possiamo però, in ogni caso, determinare nell'intorno fissato una soluzione approssimata del problema. Precisamente, applicando le considerazioni generali svolte innanzi, possiamo senz'altro affermare la possibilità di costruire una soluzione che verifichi le (6) e (7) a meno di termini di ordini superiori rispettivamente a $\lambda - 1$ e 2λ rispetto alla coppia t, x . Difatti si ha in questo caso $\nu = \infty$, $\mu = 2\lambda$, $q = 2$, $p = 2(\lambda - 1)$, $h = \lambda - 1$.

Non vogliamo però mancare di osservare che, per la particolarità che presenta la (6) di non contenere derivate della u del prim'ordine rispetto a t , il procedimento di calcolo delle successive derivate della u in t_0, \bar{x} si può qui spingere oltre i limiti più ristretti che competono al caso generale, con conseguente maggior possibilità di approssimazione nella verifica della (6). Precisamente l'ordine minimo di derivazione complessiva a cui occorre arrestarsi è ora $r_i + 2h$ e la (6) può esser quindi soddisfatta a meno di termini di ordine superiore a $2h = 2(\lambda - 1)$.

La soluzione approssimata corrispondente è

$$u = \sum_0^{\lambda} (-1)^s \frac{(t - t_0)^{2s} {}^{2(\lambda-s)} (x - \bar{x})^k}{(2s)! k!} \frac{\partial^{2s+k} f_1}{\partial x^{2s+k}} +$$

$$+ \sum_0^{\lambda-1} (-1)^s \frac{(t - t_0)^{2s+1} {}^{2(\lambda-s)} (x - \bar{x})^k}{(2s+1)! k!} \frac{\partial^{2s+k} f_2}{\partial x^{2s+k}}.$$

Matematica. — *Sopra una classe di V_k situate sui coni di Veronese.* Nota di M. VILLA, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. E. BOMPIANI.

1. Sul cono di Veronese dell' S_{k+3} (cono che proietta una superficie di Veronese da un S_{k-3} , sghembo con l' S_5 della superficie) vi è un sistema ∞^{3k-4} di coniche ⁽²⁾; coniche che sono quasi-asintotiche $\gamma_{1,3}$, per il cono di Veronese V_k^4 ⁽³⁾. E in una Nota recente, pubblicata in questi stessi « Rendiconti » ⁽⁴⁾, ho dimostrato che: escluse le V_k dell' S_{k+2} , l'unica V_k che possieda ∞^{3k-3} E_2 di $\gamma_{1,3}$ è appunto il cono di Veronese dell' S_{k+3} ⁽⁵⁾.

(1) Nella seduta del 20 febbraio 1938.

(2) Infatti su ogni cono quadrico V_{k-1}^2 proiettante dall' S_{k-3} una conica della superficie di Veronese ve ne sono $\infty^{3(k-2)}$ [quanti sono i piani di un S_k] e perciò sul cono di Veronese ∞^{3k-4} .

(3) Com'è notissimo, una curva di una varietà V_k chiamasi, con Bompiani, quasi-asintotica $\gamma_{1,3}$ quando l' S_k tangente a V_k in un punto generico della curva e l' S_3 ivi osculatore alla curva stanno in un S_{k+1} .

Per « E_2 di $\gamma_{1,3}$ » intendiamo poi un elemento del 2° ordine E_2 (cioè punto, tangente e piano osculatore) appartenente a curve di V_k che abbiano almeno localmente nel punto considerato carattere di quasi-asintotica $\gamma_{1,3}$.

Se un sistema Σ di curve sopra un V_k è ∞^δ , per ogni punto generico di V_k passano $\infty^{\delta-(k-1)}$ curve di Σ se $\delta \geq k-1$; per un punto e per una tangente ve ne sono $\infty^{\delta-2(k-1)}$ se $\delta \geq 2(k-1)$. Se Σ è definito da proprietà differenziali del 3° ordine, come accade per le $\gamma_{1,3}$, la dimensione $\delta-2(k-1)$ è anche quella del sistema degli E_2 delle curve di Σ aventi in un punto una tangente assegnata. Se un sistema di E_2 appartenenti a curve di V_k è $\infty^{\delta+1}$ per un punto generico di V_k ve ne sono $\infty^{\delta-(k-1)}$ ($\delta \geq k-1$); per un punto e per una tangente ve ne sono $\infty^{\delta-2(k-1)}$ se $\delta \geq 2(k-1)$.

(4) VILLA, *Proprietà differenziale dei coni di Veronese*. Questi « Rendiconti », ser. 6^a, 1937, vol. 25, p. 691.

(5) Gli ∞^{3k-3} E_2 di $\gamma_{1,3}$ del cono di Veronese V_k^4 sono gli E_2 delle coniche della varietà stessa. Ma tali elementi E_2 (per $k > 2$) si possono ordinare in curve $\gamma_{1,3}$ anche in altri infiniti modi, come risulta da quanto segue:

Le $\gamma_{1,3}$ di V_k^4 sono tutte e sole le curve tracciate sopra i coni quadrici V_{k-1}^2 già considerati. Proiettiamo dall' S_{k-3} singolare la V_k^4 sopra un S_5 (sghembo con l' S_{k-3}): si ottiene una superficie di Veronese. Siccome una $\gamma_{1,3}$ di V_k^4 si proietta in una $\tilde{\gamma}_{1,3}$ di questa superficie, cioè in una conica di essa, $\gamma_{1,3}$ apparterrà ad un cono V_{k-1}^2 . E inversamente: ogni curva tracciata sopra V_{k-1}^2 è $\gamma_{1,3}$ di V_k^4 . Infatti lo S_k del cono V_{k-1}^2 (contenente l' S_3 osculatore di qualunque sua curva) e lo S_k tangente, in un punto di V_{k-1}^2 , a V_k^4 stanno in S_{k+1} avendo in comune lo S_{k-1} tangente a V_{k-1}^2 nel punto considerato.

La totalità delle curve $\gamma_{1,3}$ di V_k^4 dipende dunque da funzioni arbitrarie. Fatti analoghi si presentano per le Φ_k (per $k > 3$), per le V_k di Segre e per le V_k dell' S_{k+2} (per $k > 2$) considerate nel seguito.

Le V_k che posseggono un sistema di E_2 di $\gamma_{1,3}$ di dimensione $> 3k - 3$ sono le V_k dell' S_{k+1} , per le quali tutte le curve sono $\gamma_{1,3}$. Prescindendo quindi da questo caso banale, il cono di Veronese e le V_k dell' S_{k+2} (escluse quelle, costituite da $\infty^1 S_{k-1}$, sviluppabili ordinarie)⁽¹⁾ sono dunque le uniche V_k che posseggono un sistema di E_2 di $\gamma_{1,3}$ (ordinabili in curve $\gamma_{1,3}$) di dimensione massima.

Orbene, a tale proprietà del cono di Veronese si aggiunge la seguente:

a) Ogni V_k ($k > 2$) situata sopra il cono di Veronese V_{k+1}^4 dell' S_{k+4} — incontrata dagli S_{k-1} del cono in V_{k-2} (che non siano S_{k-2} passanti per uno stesso S_{k-3}) — possiede $\infty^{3k-4} E_2$ di $\gamma_{1,3}$ ordinabili in curve $\gamma_{1,3}$ ⁽²⁾.

Indicheremo queste V_k con Φ_k .

E la proprietà a) è caratteristica per i coni di Veronese perchè, se indichiamo con C^m un cono proiettante da un S_m una superficie, che non soddisfa ad equazioni di Laplace, si ha:

b) Se sopra un cono C^{k-2} giace una V_k (incontrata da tutti gli S_{k-1} del cono) che possiede $\infty^{3k-4} E_2$ di $\gamma_{1,3}$ ordinabili in curve $\gamma_{1,3}$, C^{k-2} è necessariamente il cono di Veronese dell' S_{k+4} ($k > 2$).

Ma l'interesse del teorema a) risiede principalmente nel fatto che le varietà Φ_k costituiscono una classe notevole e un primo esempio (prescindendo da casi banali) di V_k ($k > 2$), algebriche o no, che posseggono $\infty^{3k-4} E_2$ di $\gamma_{1,3}$ ordinabili in curve $\gamma_{1,3}$.

2. A tal proposito esporrò a che punto si trova la ricerca delle V_k che posseggono $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{1,3}$ (ordinabili in curve $\gamma_{1,3}$),

$$2k - 1 \leq \delta \leq 3k - 3,$$

da cui risulterà, sotto un nuovo aspetto, il notevolissimo interesse delle varietà Φ_k , almeno per $k = 4$.

Per δ massimo (cioè $\delta = 3k - 3$) il problema è risolto (n. 1). Per δ minimo ($\delta = 2k - 1$), nell'ipotesi che V_k non soddisfi ad equazioni di Laplace, la V_k integrale è unica ed è, per un bel risultato di Bompiani⁽³⁾, la $V_k^{2k} S_{3 \cdot 4 \cdots (k+2)} - 1$ rappresentante le quadriche di S_k (le cui coniche, immagini delle rette di S_k , sono le $\gamma_{1,3}$).

(1) Una V_k formata da $\infty^1 S_{k-1}$, con S_k tangente fisso lungo ogni S_{k-1} generatore, non può possedere una $\gamma_{1,3}$ (non contenuta in uno degli S_{k-1}) senza appartenere ad un S_{k+1} .

(2) Per $k = 3$, sussiste più precisamente il teorema: Ogni V_3 situata sopra il cono di Veronese V_4^4 dell' S_7 — incontrata dai piani del cono in curve (che non siano rette passanti per uno stesso punto) — possiede $\infty^4 \gamma_{1,3}$ (esattamente).

(3) BOMPIANI, *Proprietà differenziali caratteristiche di enti algebrici*. « Mem. dell'Accademia dei Lincei », 1922, vol. 13, ser. 5^a, p. 474.

V_k dotate di $\infty^{2k} E_2$ di $\gamma_{1,3}$ sono invece le V_k di Segre (varietà delle coppie di punti di due spazi $S_p, S_q; p, q > 0, p + q = k$). Sopra una tale V_k esiste infatti un sistema ∞^{2k-1} di coniche, provenienti dalle proiettività fra le coppie di rette dei due spazi, le quali sono $\gamma_{1,3}$ per la $V_k^{(1)}$.

Per i valori $3k-4, 2k$ di δ , cioè per i valori di δ che precedono e seguono immediatamente risp. il massimo e il minimo, il problema non è risolto (per $k \neq 4$); ma le Φ_k e le V_k di Segre⁽²⁾ costituiscono esempi notevoli di V_k con ∞^{3k-4} o risp. $\infty^{2k} E_2$ di $\gamma_{1,3}$.

Anzi, per $k=4$, caso in cui $2k=3k-4=8$, la Φ_4 e la V_4 di S_8 di Segre (rappresentante le coppie di punti di due piani) sono, fra i quattro tipi possibili di V_4 con $\infty^8 E_2$ di $\gamma_{1,3}$, i due più significativi⁽³⁾ (4).

3. Dimostriamo ora il teorema a) del n. 1: Sopra il cono C di Veronese dell' S_{k+4} si ha una varietà Φ_k appartenente ad S_{k+4} incontrata dagli S_{k-1} del cono in V_{k-2} ; si vuol dimostrare che su Φ_k vi sono $\infty^{3k-4} E_2$ di $\gamma_{1,3}$ ordinabili in curve $\gamma_{1,3}$.

(1) Gli E_2 di $\gamma_{1,3}$ della V_k di Segre sono gli E_2 delle coniche della varietà stessa. Per due punti P, Q di una tale V_k passa una quadrica ω dell' S_3 (immagine delle coppie di punti delle due rette di S_p, S_q individuate dalle coppie relative a P, Q). E un E_2 di curva tracciata sopra ω è sempre un E_2 di conica di ω . Segue (come del resto è evidente perchè ω sta in S_3) che ogni curva tracciata su ω è $\gamma_{1,3}$ per la V_k di Segre.

(2) S'intende parlare delle varietà di Segre, relative a spazi S_p, S_q , per cui $p, q > 1$ dato che una V_{q+1} di SEGRE, dove $p=1$, non offre nulla di nuovo. Essa appartiene infatti a $S_{2(q+1)-1}$ e una V_d dell' S_{2d-1} generica ($d=q+1$) possiede sempre $\infty^{2d} E_2$ di $\gamma_{1,3}$ ordinabili in curve $\gamma_{1,3}$.

(3) In una Memoria lincea, di prossima pubblicazione, sono pervenuto invero al risultato:

Le V_4 che posseggono $\infty^8 E_2$ di $\gamma_{1,3}$ (ordinabili in curve $\gamma_{1,3}$) sono le seguenti:

1° La Φ_4 ; 2° La V_4 di S_8 di Segre rappresentante le coppie di punti di due piani; 3° Tutte le V_4 dell' S_7 , escluse quelle i cui S_4 tangenti non riempiono l' S_7 ambiente; 4° I coni V_4 proiettanti da un punto O una V_3 che possiede $\infty^5 E_2$ di $\gamma_{1,3}$ ordinabili in curve $\gamma_{1,3}$ (O essendo fuori dello spazio ambiente di V_3).

Osserviamo inoltre che per $k=3$ si ha $2k-2=3k-5=4$ e che la Φ_3 possiede $\infty^4 \gamma_{1,3}$ (esattamente) come la V_3^8 di S_9 rappresentante la totalità delle quadriche dell' S_3 . E mentre quest'ultima è l'unica V_3 che possiede $\infty^4 \gamma_{1,3}$ e non soddisfa ad equazioni di Laplace (teor. di Bompiani), la Φ_3 soddisfa a due equazioni di Laplace.

(4) Per l'interesse che presentano in queste ricerche la superficie ed i coni di Veronese, ricorderò che caratterizzazioni della superficie di Veronese sono state trovate anche di recente. Si veda BOMPIANI e BORTOLOTTI, *Ricerche sulle superficie dello spazio a cinque dimensioni e nuove caratterizzazioni della superficie di Veronese*. « Mathematische Zeitschrift », 1937, vol. 42, p. 411. Riguardo poi ai coni di Veronese, e limitatamente al campo algebrico, ricorderò il teorema (che deducesi da un teorema di Del Pezzo sulla superficie di Veronese): ogni varietà algebrica V_{i+1} , d'ordine $d-i$, irriducibile, appartenente ad S_d ($i > 1$), quando sia $d-i > 2$ è una serie razionale ∞^1 di S_i , oppure se $i=d-4$, il cono di Veronese dell' S_d (vedi: BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*. Messina, Principato, 1923, 2ª ediz., p. 402).

Proviamo anzitutto che: *le $\gamma_{1,3}$ di Φ_k sono tutte e sole le $\gamma_{1,3}$ delle V_{k-1} intersezioni di Φ_k con i coni quadrici (di vertice S_{k-2}) contenuti in C .*

In un punto P di una $\gamma_{1,3}$ di Φ_k lo S_k tangente a Φ_k e lo S_3 osculatore a $\gamma_{1,3}$ stanno in uno S_{k+1} .

Consideriamo le $\infty^1 V_{k-2}$ per i punti di $\gamma_{1,3}^{(1)}$ e proiettiamo da S_{k-2} sopra un S_5 (indipendente da S_{k-2}): Φ_k si proietta nella V_2^4 di Veronese, la $\gamma_{1,3}$ per P in una $\gamma'_{1,3}$ per P' (proiezione di P) di V_2^4 , cioè in una sua conica, i cui punti sono le proiezioni delle $\infty^1 V_{k-2}$ nominate: cioè queste formano una V_{k-1} appartenente ad un cono quadrico e $\gamma_{1,3}$ sta su V_{k-1} .

Rimane da provare che la $\gamma_{1,3}$ di Φ_k è pure $\gamma_{1,3}$ su V_{k-1} , cioè che lo S_{k-1} tangente a V_{k-1} in P e lo S_3 osculatore a $\gamma_{1,3}$ stanno in un S_k . Se ciò non fosse S_{k-1} ed S_3 determinerebbero un S_{k+1} , necessariamente quello dello S_k tangente in P a Φ_k (che contiene lo S_{k-1}) e di S_3 . Ciò non può essere perchè lo S_{k+1} di S_k e dello S_3 osculatore si proietta nello S_3 contenente il piano tangente in P' a V_2^4 e il piano di $\gamma'_{1,3}$; mentre lo spazio di S_{k-1} e dello S_3 osculatore si proietta nel piano di $\gamma'_{1,3}$. È ovvio poi che ogni $\gamma_{1,3}$ di V_{k-1} è $\gamma_{1,3}$ su Φ_k .

E poichè su ciascuna V_{k-1} considerata vi sono $(2) \infty^{3(k-1)-3} E_2$ di $\gamma_{1,3}$ (ordinabili in curve $\gamma_{1,3}$) e vi sono $\infty^{2k-4} V_{k-1}$, Φ_k ha $\infty^{3k-4} E_2$ di $\gamma_{1,3}$ ordinabili in curve $\gamma_{1,3}^{(3)}$.

4. Dimostriamo infine il teorema *b)* del n. 1.

Sopra un cono C^{k-2} (cono proiettante da un S_{k-2} una superficie che non soddisfa ad equazioni di Laplace) esiste, per ipotesi, una V_k (incontrata da tutti gli S_{k-1} del cono) che possiede $\infty^{3k-4} E_2$ di $\gamma_{1,3}$ ordinabili in

(1) Ogni curva tracciata sopra una V_{k-2} ($k > 3$) è $\gamma_{1,3}$ per Φ_k ed è senz'altro $\gamma_{1,3}$ per ogni V_{k-1} a cui la V_{k-2} appartiene. Nel testo si suppone perciò che la $\gamma_{1,3}$ di Φ_k non appartenga ad una V_{k-2} .

(2) La V_{k-1} possiede $\infty^{3(k-1)-3} E_2$ di $\gamma_{1,3}$ (ordinabili in curve $\gamma_{1,3}$) perchè l'unico caso in cui una V_{k-1} dell' S_{k+1} non possiede un siffatto sistema si ha quando V_{k-1} è luogo di $\infty^1 S_{k-2}$ con S_{k-1} tangente fisso lungo ogni S_{k-2} generatore, ciò che non avviene nel nostro caso avendo escluso che gli S_{k-1} di C seghino Φ_k in S_{k-2} passanti per uno stesso S_{k-3} . Per $k = 3$, su ogni superficie V_2 dell' S_4 considerata vi sono $\infty^2 \gamma_{1,3}$ (esattamente) e quindi Φ_3 possiede $\infty^4 \gamma_{1,3}$ esattamente.

(3) Su Φ_k , come s'è visto, giacciono delle V_{k-1} dell' S_{k+1} (le V_{k-1} suddette) e per due punti P, Q di Φ_k ne passa una che indicheremo con ω . Sul cono di Veronese V_k dell' S_{k+3} esistono invece delle V_{k-1} dell' S_k (i coni quadrici che proiettano dall' S_{k-3} singolare del cono una conica della superficie di Veronese) e per due punti P, Q di V_k ne passa una che indicheremo ancora con ω . Infine, sulla V_k di Segre esistono quadriche dell' S_3 e per due punti P, Q di V_k ne passa una che indicheremo pure con ω . Orbene (supponendo P, Q infinitamente vicini): *per tutte tre queste varietà, gli E_2 di $\gamma_{1,3}$, aventi in comune il punto P e la tangente (P, Q) , sono gli E_2 di $\gamma_{1,3}$ (relativi a tale punto e tangente) di ω ; cioè, per il cono di Veronese e la V_k di Segre, i piani di tali E_2 sono tutti e soli i piani passanti per P, Q e appartenenti allo spazio ambiente di ω .*

curve $\gamma_{1,3}$: si vuol dimostrare che C^{k-2} è il cono di Veronese dell' S_{k+4} ($k > 2$)⁽¹⁾.

Infatti, se è S_l lo spazio ambiente di C^{k-2} , proiettiamo la V_k dall' S_{k-2} singolare di C^{k-2} sopra un S_{l-k+1} (sghembo con l' S_{k-2}): si ottiene una superficie perchè V_k possiede in ogni S_{k-1} di C^{k-2} almeno un punto (tale superficie è la sezione di C^{k-2} con S_{l-k+1}). Le $\gamma_{1,3}$ di V_k si proiettano in $\gamma_{1,3}$ della superficie e di quest'ultime ve n'è una per ogni punto e per ogni direzione (come su V_k), cioè ∞^2 . Siccome la superficie non soddisfa ad equazioni di Laplace, essa è, per un noto teorema di Bompiani⁽¹⁾, la superficie di Veronese. E C^{k-2} , essendo $l-k+1=5$, è quindi il cono di Veronese dell' S_{k+4} .

Meccanica. — *Il secondo principio di reciprocità e le sue applicazioni al calcolo delle deformazioni permanenti.* Nota III di G. COLONNETTI, presentata⁽²⁾ dal Socio G. FUBINI.

Passiamo ora a considerare una trave cilindrica o prismatica, nei confronti della quale siano (o si possano con sufficiente approssimazione ritenere) verificate le classiche ipotesi di De Saint-Venant.

Scelta sulla trave una sezione retta; assunti i suoi due assi principali centrali d'inerzia come assi coordinati delle x e delle y , e la normale come asse delle z ; supposto che tutto sia e si mantenga simmetrico rispetto al piano yz ; noi ci proponiamo di studiare gli stati di coazione determinati nella trave da distribuzioni di deformazioni plastiche ε_x affatto qualunque (purchè naturalmente esse pure simmetriche rispetto a quel piano).

Più precisamente ci proponiamo di caratterizzare la deformata dell'asse geometrico della trave calcolando lo spostamento δ che un suo punto qualunque subisce (secondo una direzione arbitrariamente scelta nel solito piano) nella variazione di configurazione determinata dal dato sistema di deformazioni plastiche.

Intanto, pel fatto che delle diverse componenti di queste è per ipotesi presente la sola ε_x , l'espressione dello spostamento δ si riduce alla forma

$$\delta = \int_{\gamma} \int_A \sigma'_x \bar{\varepsilon}_x dA dz$$

(1) BOMPIANI, *Proprietà differenziale caratteristica delle superficie che rappresentano la totalità delle curve piane algebriche di dato ordine.* Questi « Rendiconti », 1921, vol. 30, ser. 5^a, p. 249.

(2) Nella seduta del 20 febbraio 1938.

dove σ'_x è la tensione normale che, nel punto generico della sezione retta generica della trave, viene determinata da una forza

$$F' = 1$$

supposta applicata nel punto di cui si vuol calcolare lo spostamento e nella direzione secondo cui si vuole che lo spostamento riesca valutato.

Ora se si denotano con \mathfrak{N}' e con \mathfrak{N}' lo sforzo normale ed il momento flettente che la forza $F' = 1$ determina nella sezione considerata, e con A e con J l'area della sezione stessa ed il suo momento d'inerzia rispetto all'asse neutro (parallelo ad x) si ha, come tutti sanno,

$$\sigma'_x = \frac{\mathfrak{N}'}{A} + \frac{\mathfrak{M}' y}{J}.$$

Sostituendo si ottiene per δ l'espressione

$$\delta = \int_{\bar{x}} \left[\frac{\mathfrak{N}'}{A} \int_A \bar{\epsilon}_x dA + \frac{\mathfrak{M}'}{J} \int_A \bar{\epsilon}_x y dA \right] d\bar{x}$$

che si può scrivere molto semplicemente così:

$$\delta = \int_{\bar{x}} (\mathfrak{N}' \bar{\lambda} + \mathfrak{M}' \bar{\mu}) d\bar{x}$$

se si introducono quelle funzioni

$$\bar{\lambda} = \frac{\int_A \bar{\epsilon}_x dA}{A}$$

e

$$\bar{\mu} = \frac{\int_A \bar{\epsilon}_x y dA}{J}$$

a cui noi abbiamo già avuto occasione⁽¹⁾ di riconoscere i significati rispettivi di « dilatazione plastica » e di « curvatura plastica » dovute al dato sistema di deformazioni $\bar{\epsilon}_x$.

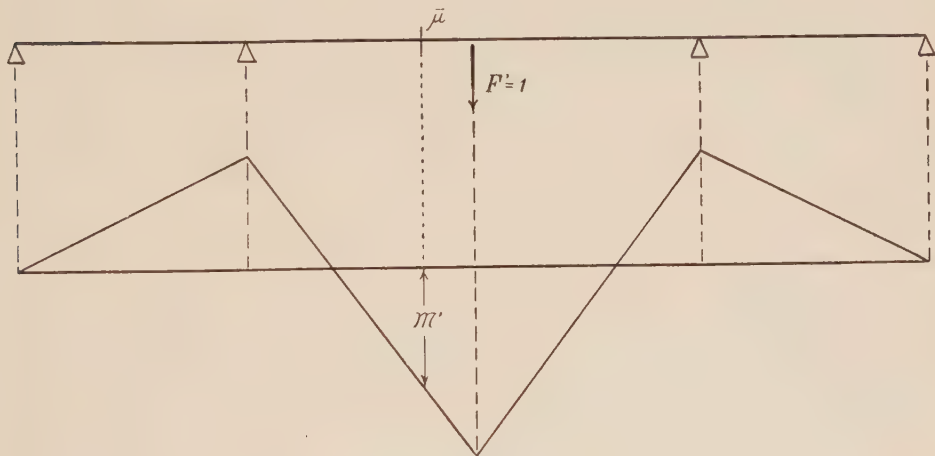
(1) G. COLONNETTI, *Nuovi punti di vista sulla statica degli archi molto ribassati*. « L'Ingegnere », Roma, 1937; *Sul calcolo delle deformazioni delle travi in cemento armato*. « Il Cemento Armato », Milano, 1937; *Saggio di una teoria generale dell'equilibrio elasto-plastico*. « Pontificia Academia Scientiarum », Città del Vaticano, 1938.

SAGGIO DI APPLICAZIONE ALLA ORDINARIA TEORIA DELLE TRAVI INFLESSE.

Tra tutti gli esempi possibili sceglieremo il più semplice: quello di una trave semplicemente appoggiata su n appoggi orizzontalmente allineati, e destinata a sopportare esclusivamente dei carichi verticali.

Supporremo che, sotto l'azione di una data condizione di carico, in certe ben determinate regioni della trave, il limite di elasticità del materiale sia stato raggiunto.

Daremo per fatta l'analisi delle deformazioni plastiche $\bar{\epsilon}_x$ ed il conseguente calcolo delle $\bar{\lambda}$ e delle $\bar{\mu}$ per tutte le sezioni rette interessate ⁽¹⁾.



È ben inteso che anche qui — come già nel caso delle travature reticolari — noi potremmo a questo punto affrontare il problema per via diretta.

Potremmo cioè servirci della conoscenza delle deformazioni plastiche, e più precisamente delle $\bar{\lambda}$ e delle $\bar{\mu}$, per determinare lo stato di coazione a cui le deformazioni plastiche danno generalmente origine; calcolare le curvature elastiche; sommarvi le curvature plastiche; e finalmente dal diagramma così ottenuto delle curvature totali dedurre graficamente la deformata della trave, considerando quel diagramma come un diagramma ideale di carico e costruendo il relativo poligono funicolare ⁽²⁾.

Ma ben più agevole ed immediata si presenta la via indiretta, cioè fondata sulla applicazione del nostro « secondo principio di reciprocità ».

(1) G. COLONNETTI, *Analisi delle deformazioni plastiche e del conseguente stato di tensione nelle travi in cemento armato*. « Il Cemento Armato », Milano, 1938.

(2) G. COLONNETTI, *Sul calcolo delle deformazioni delle travi in cemento armato*. « Il Cemento Armato », Milano, 1937.

Nel punto in corrispondenza del quale noi vogliamo calcolare la freccia permanente — vale a dire lo spostamento determinato dal dato sistema di deformazioni plastiche — immaginiamo infatti applicato il carico

$$F' = 1.$$

Per tale sollecitazione

$$\mathfrak{N}' = 0$$

quindi

$$\delta = \int \mathfrak{N}' \bar{\mu} d\chi.$$

Ciò è quanto dire che basta considerare il diagramma delle $\bar{\mu}$ come un ordinario diagramma di carico, perchè il diagramma dei momenti flettenti \mathfrak{N}' per la sollecitazione ipotetica $F' = 1$ si possa immediatamente interpretare come « linea d'influenza della freccia ».

Dopo di che non v'è evidentemente più alcuna difficoltà a fondare sulle considerazioni che precedono una vera e propria teoria generale delle linee d'influenza delle deformazioni permanenti.

Meccanica. — *La statica einsteiniana nell'interno di una massa fluida gravitante.* Nota di LUCIA VENTURELLI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Lo studio del campo gravitazionale nell'interno di una massa fluida, dal punto di vista relativistico, può apparire giustificato dalla considerazione che una distribuzione materiale discontinua qual'è un insieme di corpi celesti, oppure una nebulosa, può, sia pure in prima approssimazione, essere sostituita con un mezzo fittizio, continuo, tenuto in sesto da ipotetiche azioni interne del tipo più semplice che si conosca, cioè (come se si trattasse di un fluido perfetto) da sforzi puramente normali.

È noto che in un mezzo siffatto il tensore energetico assume la forma, proposta da Einstein

$$(I) \quad T_{\mu\nu} = \varepsilon \lambda_{\mu} \lambda_{\nu} - p g_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$$

in cui ε rappresenta la densità d'energia, le λ sono i momenti delle linee orarie, p ha il significato di una pressione (quando è positivo) o di una trazione uniforme (quando è negativo), e le $g_{\mu\nu}$ sono le componenti del tensore fondamentale. È noto inoltre come una necessaria conseguenza

(1) Nella seduta del 6 marzo 1938.

delle equazioni gravitazionali sia l'annullarsi della divergenza del tensore energetico; si hanno così i quattro principî di conservazione ⁽¹⁾:

$$(2) \quad T_{\mu\nu}^{\nu} = 0 \quad (\mu = 0, 1, 2, 3).$$

Avuto riguardo alla particolare forma (1) che assume il tensore energetico, il prof. Levi-Civita ha calcolato ⁽²⁾ le relazioni a cui danno luogo i principî di conservazione ed ha trovato le quattro seguenti:

$$(3) \quad \varepsilon k_{\mu} + \lambda_{\mu} \left(\frac{d\varepsilon}{ds} + \varepsilon \operatorname{div} \lambda \right) - p_{\mu} = 0 \quad (\mu = 0, 1, 2, 3)$$

dove le k_{μ} sono le componenti covarianti del vettore k , curvatura geodetica della linea oraria avente i parametri λ^{μ} , l'operatore $\frac{d}{ds} = \lambda^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ rappresenta la derivata rispetto all'arco della linea oraria e p_{μ} sta in luogo di $\frac{\partial p}{\partial x^{\mu}}$.

Conseguenza delle (3) ⁽³⁾ è la relazione:

$$(4) \quad \frac{d(\varepsilon - p)}{ds} + \varepsilon \operatorname{div} \lambda = 0$$

in virtù della quale le (3) possono anche scriversi:

$$(3') \quad \varepsilon k_{\mu} + \lambda_{\mu} \frac{dp}{ds} - p_{\mu} = 0 \quad (\mu = 0, 1, 2, 3).$$

2. Considerando l'interesse cosmologico che può presentare lo studio del campo gravitazionale di un fluido perfetto e tenuto conto che, qualora ci si accontenti di risultati validi in prima approssimazione (con che si intende di limitarsi ai termini di secondo ordine), e quindi nelle ordinarie circostanze astronomiche, ogni ds^2 ha comportamento statico ⁽⁴⁾, non sarà inutile studiare la statica relativistica di una massa fluida gravitante.

Quando si considerano fenomeni statici il ds^2 del cronotopo si presenta sotto la forma: $ds^2 = V^2 dx^{02} - dl^2$, con $dl^2 = a_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$ dove i coefficienti $a_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 1, 2, 3$) al pari di V devono ritenersi funzioni unicamente del posto e V si interpreta come velocità della luce. Le componenti covarianti del tensore energetico hanno le espressioni:

$$T_{00} = g_{00}(\varepsilon - p) = V^2(\varepsilon - p) \quad ; \quad T_{0\mu} = -pg_{0\mu} = 0$$

$$T_{\mu\nu} = -pg_{\mu\nu} = pa_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu > 0)$$

(1) Con la consueta convenzione riguardo al segno di sommatoria.

(2) Il calcolo è stato esposto in una conferenza tenuta a Princeton, nel settembre 1936, il cui manoscritto è stato gentilmente messo a mia disposizione dall'Illustre Professore.

(3) Ved. anche: J. L. SYNGE, *Relativistic Hydrodynamics*. «Proceedings of the London Mathematical Society», ser. 2^a, vol. 43, parte V, p. 387.

(4) LEVI-CIVITA, *Fondamenti di meccanica relativistica*. Cap. II, § 1, p. 93.

mentre la congruenza delle linee orarie ha i parametri:

$$\lambda^0 = \frac{1}{V}, \quad \lambda^\mu = 0 \quad (\mu > 0).$$

La divergenza del vettore λ , tenuto conto dei particolari valori delle λ e del fatto che le componenti del tensore fondamentale sono indipendenti da x^0 si annulla, ossia, nel caso statico, la congruenza delle linee orarie è solenoidale.

Poichè l'operatore $\frac{d}{ds}$ diviene $\frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial x^0}$, la relazione (4) risulta identicamente soddisfatta essendo ε e p , nel caso statico, funzioni unicamente del posto. Quindi le equazioni (3) o (3') si riducono solamente a tre.

Per calcolare le componenti covarianti del vettore curvatura geodetica si osservi che: $k_\mu = \lambda_{\mu\nu} \lambda^\nu = \lambda_{\mu 0} \lambda^0$ e che, quindi, basta calcolare le sole derivate covarianti dei momenti λ_μ rispetto all'indice zero; si ha: $\lambda_{\mu 0} = -\frac{\partial V}{\partial x^\mu}$, $\lambda_{00} = 0$, cosicchè il vettore curvatura geodetica ha per componenti covarianti:

$$k_\mu = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial x^\mu} \quad (\mu = 0, 1, 2, 3).$$

Vettorialmente si potrebbe scrivere:

$$k = \text{grad} \log \frac{1}{V}.$$

Come si vede, la congruenza delle linee orarie è geodetica soltanto se è costante la velocità della luce.

Sostituendo nelle equazioni (3) o (3') si ha come forma definitiva dei principi di conservazione:

$$(5) \quad \frac{\varepsilon}{V} \frac{\partial V}{\partial x^\mu} + \frac{\partial p}{\partial x^\mu} = 0 \quad (\mu > 0).$$

Poichè ε e p sono funzioni solamente del posto, le tre equazioni (5) si compendiano nell'unica ai differenziali totali:

$$(6) \quad \varepsilon d \log V + dp = 0$$

dalla quale segue che ε e p sono funzioni della sola V e che, posto $\varepsilon = \varphi(V)$, rimane individuata p con una quadratura.

3. Sempre nel caso statico le equazioni gravitazionali assumono la forma ⁽¹⁾:

$$\alpha_{\mu\nu} + \frac{V_{\mu\nu}}{V} - \frac{\Delta_2 V}{V} a_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3)$$

$$M = \kappa \frac{T_{00}}{V^2}$$

essendo le $\alpha_{\mu\nu}$ le componenti covarianti del tensore doppio simmetrico di Ricci e M il loro invariante lineare che si interpreta come curvatura media della varietà spaziale. Date le particolari espressioni che hanno le componenti del tensore energetico, queste equazioni diventano:

$$(7) \quad \alpha_{\mu\nu} + \frac{V_{\mu\nu}}{V} - \frac{\Delta_2 V}{V} a_{\mu\nu} = -\kappa p a_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3)$$

$$(8) \quad M = \kappa (\varepsilon - p).$$

Ma, poichè dalle (7), moltiplicando per $a^{\mu\nu}$, sommando e tenendo conto della (8), si ricava:

$$-\frac{\Delta_2 V}{V} = \frac{1}{2} \kappa (2p + \varepsilon)$$

le (7) possono anche essere scritte:

$$(9) \quad \alpha_{\mu\nu} + \frac{V_{\mu\nu}}{V} = \frac{1}{2} \kappa \varepsilon a_{\mu\nu}.$$

Sicchè, tenendo conto della (6), per il campo gravitazionale statico di un fluido perfetto si hanno le otto equazioni:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{\mu\nu} + \frac{V_{\mu\nu}}{V} = \frac{1}{2} \kappa \varepsilon a_{\mu\nu} \\ M = \kappa (\varepsilon - p) \\ \varepsilon d \log V + dp = 0 \end{array} \right.$$

nelle otto incognite $V, a_{\mu\nu}, p$, potendosi, come si è già detto, assumere ε quale funzione, *a priori* arbitraria, di V .

Osservando che ε , quindi p , e perciò anche M sono funzioni della sola V , si ha, dalle due ultime equazioni (10):

$$(11) \quad \frac{dM}{dV} = \frac{\kappa}{V} \frac{d(\varepsilon V)}{dV};$$

(1) Cfr. LEVI-CIVITA, loc. cit., p. 105.

adunque il sistema risolvibile (10) può anche essere scritto nella forma equivalente:

$$(12) \quad \begin{cases} \alpha_{\mu\nu} + \frac{V_{\mu\nu}}{V} = \frac{1}{2} \kappa \varepsilon a_{\mu\nu} \\ \frac{dM}{dV} = \frac{\kappa}{V} \frac{d(\varepsilon V)}{dV}; \end{cases}$$

$$(13) \quad p = \varepsilon - \frac{M}{\kappa}.$$

Le (12), in numero di sette, contengono altrettante incognite: i sei coefficienti $a_{\mu\nu}$ del dl^2 spaziale e la V . La ε va ritenuta, come si è detto or ora, funzione (*a priori* qualunque) della sola V . Una volta integrato questo sistema (12), la p rimane definita dalla (13).

L'equazione (11) permette di osservare che: se la varietà spaziale ha curvatura media costante, la velocità della luce è inversamente proporzionale alla densità d'energia; e viceversa.

Eliminando invece la ε fra le due ultime equazioni (10) si ha:

$$(14) \quad M = -\kappa \frac{d(pV)}{dV}$$

da cui si deduce che: se lo sforzo normale, pressione o tensione secondo il segno di p , è inversamente proporzionale alla velocità della luce la curvatura media della varietà spaziale è nulla.

Il sistema (12) non ha (né per la sua genesi potrebbe avere) forma normale; cioè non è risolubile, senza specializzare opportunamente le variabili, rispetto a derivate d'ordine massimo di tutte le incognite $a_{\mu\nu}, V$. Si potrebbe cercare, anche per il nostro caso (statico) un procedimento analogo a quello escogitato dal Lanczos⁽¹⁾ per le equazioni generali; ma non possiamo qui dilungarci in argomento.

4. Vogliamo piuttosto trovare una soluzione del sistema (13) valida in prima approssimazione e in un campo newtoniano assegnato. Supponiamo che il ds^2 sia prossimo al tipo euclideo riferito a coordinate cartesiane e al tempo römeriano: ciò equivale a porre:

$$(15) \quad V = 1 - \beta, \quad a_{\mu\nu} = \delta_{\mu}^{\nu} + \beta_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3),$$

in cui le δ_{μ}^{ν} hanno il solito significato, β e le $\beta_{\mu\nu}$ si suppongono infinite-sime (di secondo ordine almeno) con le loro derivate.

(1) Cfr. J. CHAZY, *La théorie de la relativité et la mécanique celeste*. To. II, cap. X, pp. 140 e sgg.

Essendo adunque infinitesimo il divario fra la varietà spaziale e un ordinario spazio euclideo sarà infinitesima anche la curvatura media $\kappa(\varepsilon - p)$; d'altra parte, essendo infinitesimi i simboli di Christoffel, coincideranno in prima approssimazione le derivate covarianti con le ordinarie. In virtù della (15), sarà pure infinitesima $\frac{\Delta_2 V}{V}$ e con essa $\frac{1}{2} \kappa(\varepsilon + 2p)$. Ne consegue che devonsi considerare separatamente come infinitesime le quantità $\kappa\varepsilon$ e κp , almeno dello stesso ordine di β .

Ciò premesso, prendendo per il tensore di Einstein l'espressione che gli compete in prima approssimazione ⁽¹⁾:

$$G_{\mu\nu} = \{ \mu\alpha, \alpha\nu \} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha}^3 \left\{ \frac{\partial^2 \beta_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha^2}} + \frac{\partial^2 \beta_{\alpha\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 \beta_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\alpha}} - \frac{\partial^2 \beta_{\alpha\nu}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\alpha}} \right\},$$

($\mu, \nu = 1, 2, 3$)

ricordando che le $\alpha_{\mu\nu}$ sono legate alle $G_{\mu\nu}$ dalla relazione $G_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\nu} - M\alpha_{\mu\nu}$ ed essendo inoltre, in prima approssimazione:

$$\frac{V_{\mu\nu}}{V} = - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}}, \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3)$$

le prime sei equazioni (12) si possono scrivere

$$(16) \quad \sum_{\alpha}^3 \left\{ \frac{\partial^2 \beta_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha^2}} + \frac{\partial^2 \beta_{\alpha\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 \beta_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\alpha}} - \frac{\partial^2 \beta_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\alpha}} \right\} +$$

$$+ \kappa(\varepsilon - 2p) \delta_{\mu}^{\nu} - 2 \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} = 0 \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3),$$

avendo trascurato il termine $\kappa(\varepsilon - 2p) \beta_{\mu\nu}$ come d'ordine superiore.

L'equazione $\frac{\Delta_2 V}{V} - \frac{1}{2} \kappa(2p + \varepsilon) = 0$ assume l'aspetto

$$(17) \quad \Delta_2^0 \beta = - \frac{1}{2} \kappa(2p + \varepsilon),$$

dove con Δ_2^0 si intende semplicemente $\sum_{\mu}^3 \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu^2}}$.

Giova a questo punto osservare come, in base alle equazioni (5) ricavate dai principî di conservazione si abbia, sempre con la solita approssimazione:

$$\kappa \frac{\partial p}{\partial x^{\mu}} = - \frac{\kappa\varepsilon}{V} \frac{\partial V}{\partial x^{\mu}} = \kappa\varepsilon \frac{\partial \beta}{\partial x^{\mu}} \quad (\mu = 1, 2, 3);$$

(1) LEVI-CIVITA, ibidem, p. 144.

quindi, tenendo conto delle ipotesi fatte sull'ordine di grandezza delle derivate di β e della quantità $\kappa\epsilon$, si conclude che $\kappa \frac{\partial p}{\partial x^\mu}$ è infinitesimo di ordine superiore, il che è quanto dire che, in un computo nel quale ci si limiti alla prima approssimazione, la p può essere riguardata come una costante.

Tenuto conto di questo si può osservare come una soluzione particolare delle equazioni (16) sia rappresentata da:

$$(18) \quad \beta_{\mu\nu} = \left(2\beta + \frac{\kappa p}{2} \rho^2 \right) \delta_\mu^\nu \quad (\mu, \nu, 1, 2, 3)$$

(dove si è scritto per brevità ρ^2 anzichè $\sum_1^3 x^r x^r$) come si può verificare sostituendo in (16), ricordando il valore (17) di $\Delta^0 \beta$ e riguardando p come costante.

L'integrale generale, valido in prima approssimazione, delle (16) si ha sommando la soluzione particolare (18) con la soluzione più generale del sistema omogeneo

$$(19) \quad G_{\mu\nu} = 0.$$

Integrare le (19) equivale a calcolare i coefficienti di un dl^2 per cui, annullandosi le componenti del tensore di Einstein, e quindi il loro invariante lineare G , è nulla pure la curvatura media $M = -\frac{1}{2} G$ e perciò anche le componenti del tensore di Ricci.

È adunque il caso già considerato dal Levi-Civita nella Nota: *ds² einsteiniani in campi newtoniani*. Nota I⁽¹⁾. In questa Nota si mostra come il termine da aggiungere a (18) per ottenere l'integrale generale si possa, con opportuno cambiamento di coordinate, ridurre a zero. Le nuove coordinate y^i sono legate alle precedenti dalle relazioni:

$$y^i = x^i + \xi^i(x^1 x^2 x^3)$$

essendo le ξ infinitesime al pari di β e di κp .

Ma tale sostituzione, effettuata nella (17) si riduce, a meno di infinitesimi di ordine superiore, alla materiale sostituzione delle x con le y .

Perciò al dl^2 compete l'espressione:

$$(20) \quad dl^2 = \left(1 + 2\beta + \frac{\kappa p}{2} \rho^2 \right) dl_0^2$$

essendo dl_0^2 l'elemento lineare di uno spazio euclideo.

(1) « Rend. R. Acc. Lincei », ser. 5^a, vol. XXVI, 2° sem., 1917.

5. Consideriamo ora la equazione (17) e determiniamo il valore di β in un campo newtoniano assegnato.

Per la materia disgregata ($p = 0$) si ha la relazione $\Delta_2^0 \beta = -\frac{1}{2} \kappa \varepsilon$, quindi, se si considera il campo di forza dovuto a una distribuzione di materia $\mu = \frac{\varepsilon}{c^2}$, detto U il potenziale newtoniano di un tale campo, in forza dell'equazione di Poisson, e attribuendo alla costante κ il valore $\frac{8\pi f}{c^4}$ sussiste la relazione:

$$\beta = \frac{U}{c^2}.$$

Se p non è zero, si soddisfa alla (17) aggiungendo alla espressione $\frac{U}{c^2}$ una soluzione particolare φ della equazione:

$$\Delta_2^0 \varphi = -\kappa p$$

dove p va trattata come una costante.

Una tale soluzione particolare è data da:

$$(21) \quad \varphi = -\frac{1}{6} \kappa p \rho^2.$$

L'integrale generale della (17) si otterrebbe aggiungendo a $\frac{U}{c^2} + \varphi$ un'arbitraria funzione armonica; ma se si esige che questa si comporti regolarmente dappertutto (anche all' ∞), si conclude che la funzione addizionale deve annullarsi. Si ha adunque:

$$V = 1 - \frac{U}{c^2} + \frac{1}{6} \kappa p \rho^2$$

e quindi, con la solita approssimazione:

$$V^2 = 1 - \frac{2U}{c^2} + \frac{1}{3} \kappa p \rho^2.$$

Per il ds^2 si ha perciò l'espressione complessiva:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2U}{c^2} + \frac{1}{3} \kappa p \rho^2\right) dx^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2} + \frac{1}{6} \kappa p \rho^2\right) dt_0^2.$$

Geodesia. — *Campagna gravimetrica in Sardegna.* Nota di di G. BOAGA, presentata ⁽¹⁾ dal Socio E. SOLER.

Durante i mesi di agosto e settembre 1937 venne eseguita dallo scrivente una vasta campagna gravimetrica in Sardegna ⁽²⁾. Le misure effettuate rivestono un carattere di particolare importanza dal punto di vista geologico e minerario, in quanto fino ad oggi mancavano in Sardegna misure gravimetriche a terra così utili per le indagini geo-fisiche e quindi per le prospezioni del sottosuolo.

Il programma stabilito dalla Presidenza della R. Commissione Geodetica Italiana è stato completamente espletato. Vennero così determinate le gravità a Terranova, Sassari, Ozieri, Nuoro, Lanusei, Cagliari, Carloforte (Specola Astronomica), Iglesias, Oristano e Macomer.

Come stazione di riferimento — dove vennero eseguite misure prima e dopo i lavori di campagna — fu tenuta Padova, Stazione di gravità G. Lorenzoni.

Ciascuna delle stazioni battute potranno servire di riferimento per indagini geo-fisiche locali di dettaglio, specialmente nella zona metallifera dell'Iglesiente.

Nelle operazioni eseguite venne impiegato al completo il corredo strumentale gravimetrico dell'Istituto Geodetico della R. Università di Padova, gentilmente prestato dal suo Direttore On. Sen. E. Soler, al quale vanno i più vivi ringraziamenti.

Detto corredo comprende: una mensola bipendolare a campana pneumatica, un relais per le coincidenze, quattro pendoli in bronzo Mioni tipo Sterneck, un cronometro Nardin regolato a tempo siderale, un apparato radio per le ricezioni dei segnali orari per la conservazione dell'ora in collegamento a un cronografo a punte tipo Cavignato, e strumenti minori come termometri, barometri, igrometri ecc.

Della Costruzione della mensola è stata data notizia nella riunione della R. Commissione Geodetica tenuta a Milano il 10 aprile 1934. Essa permette di far oscillare i pendoli gravimetrici per periodi di 8 e 12 ore e quindi occupare con le oscillazioni gli intervalli di tempo intercedenti fra le emissioni radiotelegrafiche dei segnali ritmici di Rugby (mattina e sera, 8 ore) e Bordeaux (mattina e sera, o sera e mattina, 12 ore).

Il relais delle coincidenze, il cronometro e i pendoli gravimetrici sono quelli stessi adoperati per iniziativa del Sen. Soler, nelle fondamentali

(1) Nella seduta del 6 marzo 1938.

(2) La campagna venne finanziata dal Ministero della E. N. e dalla R. Commissione Geodetica ai quali Enti lo scrivente porge vivi ringraziamenti.

campagne del Carso e nella regione circunvesuviana, dove hanno dato sempre buoni risultati e sui quali larghe notizie si trovano in questi « Rendiconti » ⁽¹⁾.

In ogni stazione i quattro pendoli vennero fatti oscillare due a due, ed ogni coppia fu fatta oscillare tre volte, sì che per i quattro pendoli si hanno tre serie di osservazioni. Fanno eccezione Padova I (partenza) e Cagliari dove furono eseguite 2 e 4 serie rispettivamente.

Con le consuete modalità vennero determinate le *coincidenze* e da queste dedotte le durate di oscillazione osservate. A queste durate vennero poi apportate le correzioni per la temperatura, densità, amplitudine infinitesima, oscillazione del supporto e andamento dell'orologio.

Rimandando ad altra pubblicazione notizie dettagliate sull'andamento della campagna e sui valori ottenuti per le varie riduzioni ecc. si ritiene opportuno adesso presentare per le varie serie e per le varie stazioni i valori delle durate di *oscillazione ridotte* per il *pendolo medio*:

	Padova I	Terranova	Sassari
I Serie	0,5076457 sec.	0,5077439 sec.	0,5077573 sec.
II »	6445 »	7423 »	7577 »
III »	—	7429 »	7572 »
media:	6451 »	7430 »	7574 »
	Ozieri	Nuoro	Lanusei
I Serie	0,5077688 sec.	0,5077881 sec.	0,5077940 sec.
II »	7683 »	7907 »	7962 »
III »	7676 »	7883 »	7958 »
media:	7682 »	7890 »	7953 »
	Cagliari	Carloforte	Iglesias
I Serie	0,5077842 sec.	0,5077770 sec.	0,5077835 sec.
II »	7826 »	7788 »	7844 »
III »	7837 »	7805 »	7840 »
IV »	7845 »	—	—
media:	7838 »	7788 »	7880 »
	Oristano	Macomer	Padova II
I Serie	0,5077672 sec.	0,5077866 sec.	0,5076457 sec.
II »	7669 »	7813 »	6456 »
III »	7684 »	7858 »	6457 »
media:	7675 »	7862 »	6457 »

(1) Cfr. E. SOLER, *Prima campagna gravimetrica sul Carso*. « Rendiconti della R. Acc. Naz. dei Lincei », vol. XXXIII, ser. 5^a, 1924; Id., *Seconda campagna gravimetrica sul Carso*. « Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei », vol. IX, ser. 6^a, 1929; Id., *Lavori geofisici eseguiti dall'Istituto di Geodesia della R. Università di Padova nella regione vesuviana nel 1934-35*. « Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei », vol. XXIV, ser. 6^a, 1936.

Con questi valori e mediante l'applicazione della formula

$$g = g' - 2g' \frac{S - S'}{S'}$$

vennero dedotti i valori delle *gravità osservate* nelle varie stazioni, assumendo per g' , valore della gravità a Padova, 980, 658 gal. e per S' durata di oscillazione dei pendoli a Padova, la media dei valori precedenti, aumentata di $3 \cdot 10^{-7}$ sec. per ridurla alla stazione Lorenzoni.

L'errore complessivo, *accidentale* e *sistematico* calcolato con procedimento seguito in altre determinazioni ⁽¹⁾, è, per la durata di oscillazione media del pendolo medio:

$$\text{stazioni di campagna} \quad \pm 2,6 \cdot 10^{-7} \text{ sec.}$$

$$\text{stazione di riferimento} \quad \pm 2,4 \cdot 10^{-7} \text{ sec.}$$

e conseguentemente l'errore medio della differenza $S - S'$ risulta dalla

$$M_{S-S'} = \pm \sqrt{M_S^2 + M_{S'}^2} = \pm 3,5 \cdot 10^{-7} \text{ sec.}$$

e quello della *differenza di gravità* fra Padova I, II e le stazioni di campagna, ricavato con la

$$\begin{aligned} M_{g-g'} &= \frac{2g}{S'} M_{S-S'} \\ &= \pm 0,0014 \text{ gal.} \end{aligned}$$

Alle gravità osservate vennero apportate le *correzioni di Faye* e di *Bouguer* mediante le

$$\Delta h = 0,0003086 \cdot h$$

$$\Delta h' = -0,0000412 \cdot h \cdot \delta$$

e la *correzione topografica* ($g' - g$) estesa fino a 40 km dai punti stazione, adottando la formula dei cilindri dello Messerschmitt ⁽²⁾.

Le quote h delle varie stazioni vennero determinate con opportune *livellazioni*. Per densità δ venne assunto il valore 2,6 gentilmente comunicato dal prof. Vardabasso, Direttore dell'Istituto Geologico della R. Università di Cagliari.

(1) Cfr. Atti del R. Istituto Veneto, to. XCIV, parte seconda, p. 485, anno 1934-35.

(2) Cfr. *Die Schwerebestimmung an der Erdoberfläche* von J. B. MESSERSCHMITT, Braunschweig, 1908.

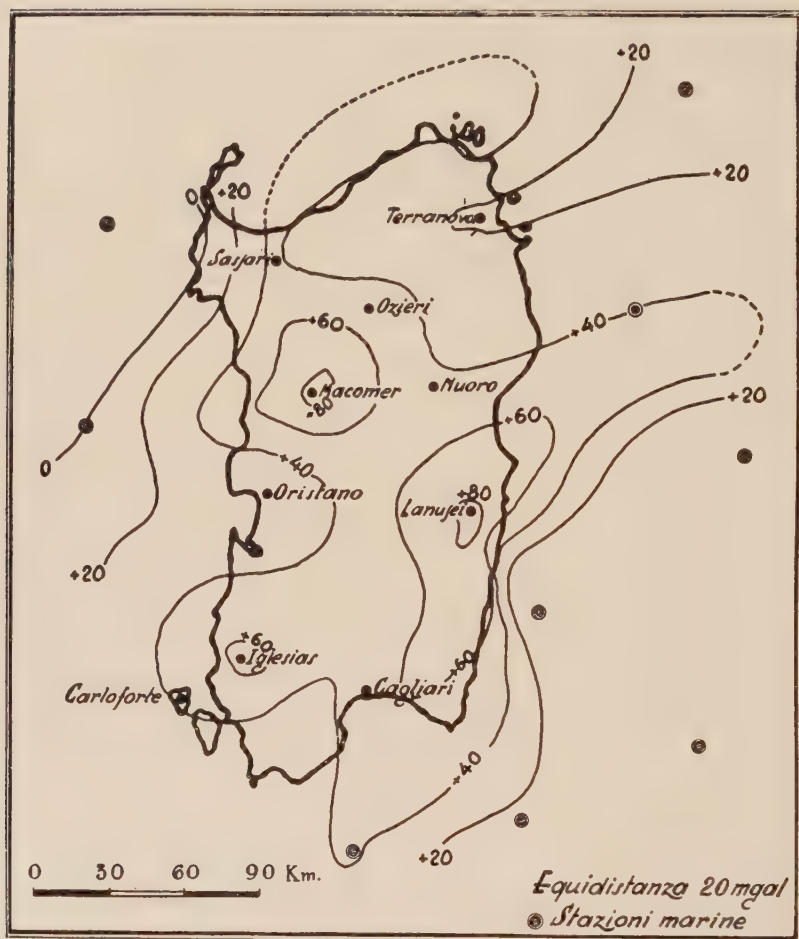
TABELLA.

STAZIONE	Latitudine	Longitudine (E. Gr.)	Altezza m.	Densità	Gravità osservata gal.	g_0 gal.	g_0'' gal.	Form. Helmert (1901)			Form. Intern. (1930)		
								γ_0 gal.	$g_0 - \gamma_0$ gal.	$g_0'' - \gamma_0$ gal.	γ_0' gal.	$g_0 - \gamma_0'$ gal.	$g_0'' - \gamma_0'$ gal.
Terranova	40°55'.4	9°31'.7	15	2.6	980.282	980.287	980.286	980.255	+ 0.032	+ 0.031	980.270	+ 0.017	+ 0.016
Sassari	40 43.5	8 35.3	192	»	.227	.286	.266	.230	+ 56	+ 36	.245	+ 41	+ 21
Ozieri	40 35.0	9 01.9	314	»	.185	.282	.255	.217	+ 65	+ 38	.232	+ 50	+ 23
Nuoro	40 19.2	9 11.6	483	»	.104	.253	.203	.194	+ 59	+ 09	.209	+ 44	+ 6
Lanusei	40 52.7	9 34.1	565	»	.080	.254	.196	.154	+ 100	+ 42	.169	+ 85	+ 27
Cagliari	39 13.0	9 08.5	59	»	.125	.143	.138	.096	+ 47	+ 42	.111	+ 32	+ 27
Carloforte	39 08.2	8 20.3	15	»	.144	.149	.148	.093	+ 56	+ 55	.108	+ 41	+ 40
Iglesias	39 18.6	8 28.6	187	»	.124	.182	.164	.103	+ 79	+ 61	.118	+ 64	+ 46
Oristano	39 54.0	8 37.5	12	»	.187	.193	.193	.157	+ 36	+ 36	.172	+ 21	+ 21
Macomer	40 16.0	8 48.4	562	»	.115	.288	.229	.189	+ 99	+ 40	.204	+ 84	+ 25

Con queste correzioni vennero ricavati i valori:

$$g_0 = g + \Delta h$$

$$g''_0 = g_0 + \Delta h' + (g' - g).$$



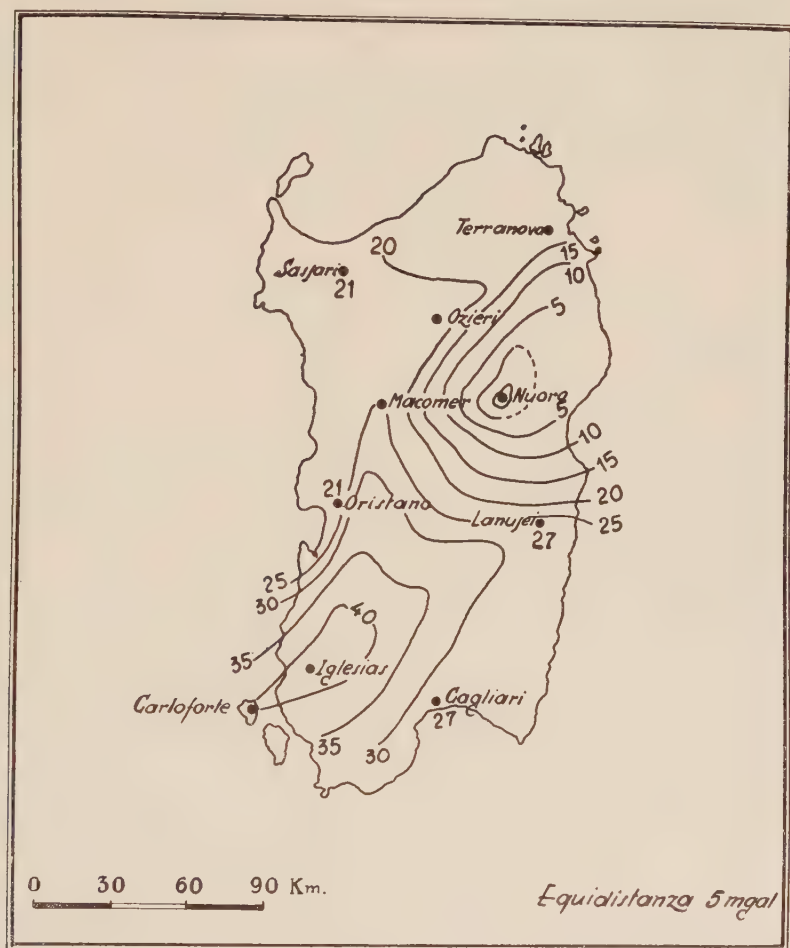
*Isolanomale della gravità g_0, g'_0
[Riduzione di Faye]*

Grafico I.

Da ultimo furono calcolati i valori della *gravità normale* γ_0, γ'_0 adottando le formule di Helmert (1901) e quella internazionale (1930) allo scopo di determinare le *anomalie gravimetriche* $g_0 - \gamma_0, g''_0 - \gamma'_0, g_0 - \gamma'_0, g''_0 - \gamma_0$.

I risultati di questi calcoli, compresi i valori delle posizioni geografiche delle singole stazioni, sono inseriti nello specchio annesso.

Nei due grafici sono poi disegnate oltre il profilo dell'isola e le posizioni planimetriche delle stazioni: le curve isoanomale di 20 in 20 mgal in



*Isoanomale della gravita' $g_0 - \gamma'_0$
[Riduzione di Bouguer e Topografica]*

Grafico II.

corrispondenza alle $g_0 - \gamma'_0$, riduzione di Faye (I grafico), tenendo conto anche delle anomalie dedotte dalle misure eseguite in mare dal prof. Cassinis per le stazioni circostanti l'isola, ricavate dalla pubblicazione di G. Cassinis e M. De Pisa, *La crociera gravimetrica del R. Sommergibile Vettor Pisani, anno 1931* (Ed. I. I. R. M.); e le curve isoanomale di 5 in

5 mgal corrispondenti alle $g''_0 - \gamma'_0$ includendo anche la correzione di Bouguer e quella topografica.

Dall'esame del I grafico risulta che tutta l'isola è compresa in via di massima dalla curva isoanomale + 40 mgal; nell'interno di questa l'anomalia aumenta e determina tre circondari di massima anomalia a: Macomer, Lanusei, Iglesias.

Dal II grafico risulta invece una deficienza gravimetrica nel circondario di Nuoro ed un deciso aumento di gravità nella zona dell'Iglesiente assai ricca di giacimenti metalliferi, mentre uniforme appare la zona tra Cagliari e Lanusei e a Sud di Sassari lungo la costa occidentale fin quasi ad Oristano.

Chimica. — *Sui telluromercaptani*⁽¹⁾. Nota di A. BARONI, presentata⁽²⁾ dal Socio N. PARRAVANO.

La serie dei composti organici degli elementi del 6° gruppo del sistema periodico risultava fino ad ora incompleta per quanto riguarda i derivati di sostituzione dell'ossigeno negli alcoli con zolfo, selenio e tellurio.

Infatti mentre sono noti da tempo i mercaptani ed i selenomercaptani in grado più o meno completo per le serie alchilica ed arilica, non mi risulta che qualcuno abbia potuto a tutt'oggi ottenere i telluromercaptani. La ragione è da ricercarsi nella ossidabilità di questi composti che va aumentando nell'ordine zolfo, selenio, tellurio. Inoltre mentre tale aumento è relativamente piccolo nel passaggio dai mercaptani ai selenomercaptani, è fortissimo nel passaggio da questi ai telluromercaptani. Ciò del resto non deve meravigliare potendo essere messo in relazione con le variazioni delle proprietà metalloidiche-metalliche. Infatti zolfo e selenio non presentano mai allo stato combinato proprietà metalliche, mentre queste si ritrovano spiccate per il tellurio come è dimostrato per es. dal fatto che per evaporazione di una soluzione nitrica di acido telluroso si ha la cristallizzazione del nitrato basico di tellurio $\text{Te}_2\text{O}_3(\text{OH})\text{NO}_3$. Inoltre nel caso del tellurio è prevalente la formazione dei cationi tanto che esso può essere determinato per elettrolisi raccogliendolo al catodo.

In un precedente lavoro⁽³⁾ io mi sono occupato della preparazione del selenomercaptano metallico che mi ha permesso di completare la serie dei selenomercaptani alchilici che mancava appunto di questo primo termine. Mi è sembrato ora non privo di interesse il riprendere lo studio di questi composti studiando la possibilità e le condizioni di formazione dei telluro-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Firenze.

(2) Nella seduta del 6 marzo 1938.

(3) «Rend. Acc. Lincei», 1930, XII, 6°, p. 234.

mercaptani. In una prossima Nota riferirò sulla preparazione dei tellurofenoli attualmente ancora in corso di studio.

Per le ragioni sopra esposte ho dovuto anzitutto fare una scelta fra i numerosi metodi indicati in letteratura per la preparazione dei mercaptani per potere stabilire quello che mi permettesse di rendere minimo o addirittura di impedire il processo di ossidazione eseguendo tutta la reazione in ambiente di gas assolutamente inerte o meglio riducente. La mia attenzione si è soffermata sulla reazione classica basata sul trattamento degli alogenuri alchilici con KTeH e sulla azione dei vapori alcoolici sul tellururo di alluminio già studiata da Levi ⁽¹⁾ per la preparazione dei mercaptani e da Natta ⁽²⁾ per la preparazione dei selenomercaptani e dei tellururi. In questo lavoro nel quale viene riscontrato che l'azione del tellururo di alluminio sugli alcoolici e sugli eteri è analoga a quella del solfuro e del seleniuro, Natta ritiene di avere ottenuto con la sua reazione il telluromercaptano etilico, senza però averlo potuto isolare.

Entrambi i metodi eseguiti completamente in ambiente riducente (tutto il dispositivo di reazione era infatti mantenuto in atmosfera di idrogeno) mi hanno permesso di giungere alla preparazione dei telluromercaptani. Il migliore si è rivelato però il secondo che risulta di applicazione generale mentre il primo non è adatto alla preparazione dei telluromercaptani metilico ed etilico.

I telluromercaptani da me preparati (metilico, etilico, propilico, butilico) si presentano come dei liquidi aventi un colore giallastro, caratterizzati da una grande ossidabilità. Il loro odore è molto forte e sgradevole e ricorda quello dei tartufi. Il contatto con l'aria li trasforma istantaneamente in tellururi. Anche in ambiente riducente la loro stabilità è piccola.

Ho tentato la preparazione dei corrispondenti telluromercapturi di mercurio, argento, piombo per azione dei telluromercaptani su soluzioni acquose alcooliche di $\text{Hg}(\text{CN})_2$, di AgNO_3 , ed acetato di sodio e su una soluzione acquosa raffreddata di acetato neutro di piombo, ma senza alcun risultato positivo. A questo proposito devo notare che già nel selenomercaptano metilico io avevo notato una notevole instabilità dei suoi mercapturi, che, in base alle considerazioni da me precedentemente fatte, è logico risulti esaltata nei telluromercapturi.

La estrema alterabilità dei telluromercaptani, come risulta dalle necessarie precauzioni per la loro preparazione, non mi ha permesso di determinare alcuna costante fisica di questi prodotti. Ho potuto di essi stabilire solo il punto di ebollizione che è riportato nella tabella I di confronto ai corrispondenti punti di ebollizione degli alcoolici, mercaptani e selenomercaptani.

(1) « Rend. Acc. Lincei » [5], 1926, XXXIII, 359.

(2) « Giorn. Chim. Ind. e Appl. », 1926, p. 1.

TABELLA I.

Alcooli	Mercaptani	Selenomercaptani	Telluromercaptani
CH ₃ OH 64°.5	CH ₃ SH 5°.8	CH ₃ SeH 12°.0	CH ₃ TeH 57°.0
C ₂ H ₅ OH 78°.0	C ₂ H ₅ SH 37°.0	C ₂ H ₅ SeH 53°.5	C ₂ H ₅ TeH 90°.0
C ₃ H ₇ OH 97°.0	C ₃ H ₇ SH 67°.0	C ₃ H ₇ SeH 84°.0	C ₃ H ₇ TeH 121°.0
C ₄ H ₉ OH 117°.0	C ₄ H ₉ SH 97°.0	C ₄ H ₉ SeH 114°.0	C ₄ H ₉ TeH 151°.0

Si può osservare la notevole concordanza fra i punti di ebollizione dei mercaptani, selenomercaptani e telluromercaptani. Diversi sono invece gli scarti fra i punti di ebollizione degli alcooli a causa della associazione che negli alcooli è tanto maggiore quanto più basso è il peso molecolare.

Parte sperimentale. — Il primo dispositivo da me usato nella preparazione dei telluromercaptani è rappresentato dalla fig. 1. L'idrogeno tellurato ottenuto nell'apparecchio 1 per azione di acido solforico diluito sul tallururo di alluminio (preparato riscaldando una miscela dei due elementi in un tubo di porcellana fuori del contatto dell'aria) viene condotto nel pallone 2 (dal quale è stata eliminata l'aria mediante una corrente di idrogeno) contenente una soluzione di etilato sodico in alcool assoluto. Dopo aver saturata la soluzione si aggiunge mediante l'imbuto a rubinetto 3 un volume uguale della stessa soluzione. Il liquido viene allora spinto mediante pressione di idrogeno nel pallone di reazione 4 contenente il brumuro alchilico corrispondente al telluromercaptano che si vuole preparare. Regolando in modo adatto i rubinetti si fa in modo che l'aggiunta avvenga lentamente. Il pallone 4 è munito di un agitatore con chiusura a mercurio ed è scaldato a bagno maria. Quando tutto il liquido è stato aggiunto si scalda lentamente a 50–60° per mezz'ora agitando e mantenendo sempre l'atmosfera di idrogeno e poi la miscela viene inviata per la filtrazione nell'imbuto 5. Il passaggio del liquido avviene anche in questo caso mediante pressione di idrogeno in modo da essere certi che nell'apparecchio non vi sia nemmeno una traccia di aria. Per permettere questa operazione l'agitatore del pallone è fatto in modo che la chiusura a mercurio può essere sostituita da una chiusura a cono semplicemente abbassandolo al momento opportuno. Nella figura 2 è rappresentato ingrandito il dettaglio di questo pezzo. Il liquido alcoolico filtrato nel pallone 6 viene inviato nel pallone di distillazione 7 nel quale viene distillato l'alcool e poi nel pallone 8 dove avviene la distillazione sempre in atmosfera di idrogeno, dei prodotti di

reazione. L'idrogeno usato in questo apparecchio ed in quello successivamente descritto deve essere purificato mediante passaggio su rame rovente.

Questo dispositivo risponde perfettamente per la preparazione dei telluromercaptani propilico e butilico, ma, dato il loro punto di ebollizione, non per quella dei telluromercaptani metilico ed etilico. Per questi due ultimi buoni risultati ho ottenuto invece col dispositivo della figura 2 b, eseguendo distillazioni lentissime con l'impiego anche di una piccola colonna di deflegmazione, sfruttando l'azione degli alcoli allo stato di vapore sul

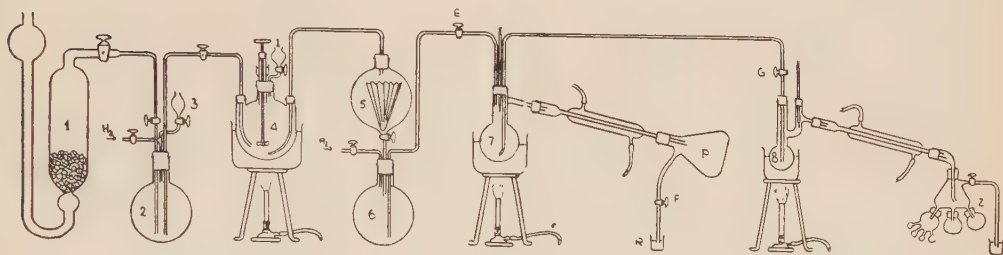


Fig. 1



Fig. 2 a

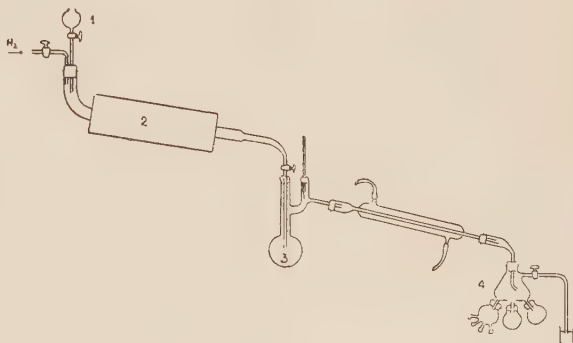


Fig. 2 b

tellururo di alluminio. La preparazione con questo metodo risulta molto più semplice. L'alcool contenuto nell'imbuto a rubinetto 1 viene fatto gocciolare lentamente nel tubo di reazione di vetro difficilmente fusibile avente un diametro interno di 15-20 mm. e scaldato in un forno elettrico a resistenza a 300-350° seguendo la tecnica indicata da Natta per la preparazione dei tellururi. I prodotti di reazione vengono condensati nel pallone 3 raffreddato con ghiaccio e sale e successivamente distillati nello stesso pallone operando sempre in corrente di idrogeno ed osservando tutte le precauzioni indicate precedentemente.

Per conservare inalterati i prodotti per l'analisi sul fondo del palloncino di raccolta dei telluromercaptani sono soffiate delle fialette della capa-

cità di circa 0,5–1 cc. che vengono chiuse alla lampada a distillazione ultimata sempre in atmosfera di idrogeno.

L'analisi dei telluromercaptani è stata da me fatta col metodo di Carius dosando il tellurio come tellurio metallico. I risultati ottenuti sono riuniti nella seguente tabella:

Telluromercaptano	Sostanza pesata	Te pesato	Te % trov.	Te % teorico
CH ₃ TeH	0.1178	0.1044	88.68	88.86
	0.1542	0.1467	88.64	
C ₂ H ₅ TeH	0.2738	0.2203	80.47	80.91
	0.1941	0.1563	80.50	
C ₃ H ₇ TeH	0.1832	0.1358	74.15	74.31
	0.2416	0.1793	74.20	
C ₄ H ₉ TeH	0.2810	0.1882	68.52	68.71
	0.1692	0.1162	68.66	

Lo scarto nella percentuale del tellurio nel telluromercaptano etilico, è dovuta alla difficoltà di eliminare da esso completamente l'alcool per la differenza relativamente piccola fra i punti di ebollizione dei due prodotti.

Fisiologia (Chimica biologica). — *Sul contenuto in cloro di organi e tessuti del ratto in rapporto all'età*⁽¹⁾. Nota di A. SALVATORI, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Occupandoci, in precedenti lavori⁽³⁾, dell'ipocloremia post-operatoria, abbiamo messo in evidenza l'utilità, per non dire la necessità, di trasportare il problema dal campo clinico, al campo puramente biochimico.

Dopo che Gosset, Binet, Petit-Dutaillis⁽⁴⁾, trovarono, che nel decorso post-operatorio si osserva in genere ipocloremia, si credette di poter arrivare alla sua spiegazione a rapidi colpi di esperienze, basate su concetti sintetici. Ma ben presto si dovette riconoscere, che proseguendo su questa via, si veniva ad urtare contro risultati sperimentali senza alcun nesso che li potesse anche lontanamente collegare, anzi talvolta in stridente contrasto, come può rilevarsi dai nostri lavori sopra citati.

Perciò noi fin dall'anno scorso, convinti che era necessario fare un po' di analisi, e che occorreva guardare un po' più da vicino il cloro negli organismi, e studiarlo in sè e in rapporto ad altri elementi, abbiamo iniziato una serie di esperienze sistematiche sull'animale. Scorrendo in questa occasione la letteratura del cloro, abbiamo dovuto constatare che, almeno per i più comuni animali di laboratorio, mancavano i dati più elementari, quali per es. il contenuto in cloro dell'intero animale in rapporto all'età; la distribuzione di questo cloro nei vari organi e tessuti, pure in rapporto alla età; il variare del cloro sanguigno col variare dell'alimentazione ecc. Allora, contemporaneamente allo studio dei rapporti del cloro con altri elementi, per es. l'azoto, noi abbiamo voluto riempire le predette lacune. In una prima Nota, sopra citata, abbiamo dato conto del contenuto in cloro dell'intero ratto in rapporto all'età. Proseguendo nello stesso proposito, diamo oggi conto della distribuzione del cloro in organi e tessuti del ratto, pure in rapporto all'età.

Per le nostre esperienze abbiamo utilizzato la prole di 6 ratte, tenute ad alimentazione mista sia prima che dopo il parto, e per tutto il periodo

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica biologica della R. Università di Roma, diretto dal prof. G. Amantea.

(2) Nella seduta del 6 marzo 1938.

(3) A. SALVATORI e V. PALUMBO, «Fisiol. e Med.», vol. VIII, 1936; A. SALVATORI, «Rend. Acc. Naz. Lincei», vol. XXIV, 1936; Id., «Rend. Acc. Naz. Lincei», vol. XXV, 1937.

(4) GOSSET-BINET-PETIT-DUTAILLIS, «La Press e Med.», 1938.

dell'allattamento. Anche i piccoli, dallo slattamento in poi, hanno ricevuto un alimento misto. I ratti vennero sacrificati costantemente per dissanguamento. In genere li abbiamo sacrificati ad intervalli di 15-20 giorni a cominciare del 16°-17° giorno di età, o intervalli anche maggiori, a seconda dell'andamento della curva del peso.

La tecnica sperimentale usata si è basata sulle seguenti operazioni:
Incenerimento dell'organo in presenza di alcali.

Estrazione delle ceneri con acqua distillata bollente, concentrazione della soluzione così ottenuta, neutralizzazione con acido nitrico, dosaggio del cloro con metodo di Volhard.

Ciò premesso, ecco come in particolare abbiamo proceduto:

Il ratto veniva sacrificato per dissanguamento; si apriva poi l'addome e si asportavano i vari organi interni, che sistemati su vetrini di orologio precedentemente tarati, venivano subito e rapidamente pesati. Lo stomaco veniva svuotato, lavato con acqua distillata e poi asciugato con carta da filtro. Per quanto riguarda i muscoli, abbiamo sempre prelevato quelli della coscia, e per quanto riguarda le ossa, abbiamo analizzato sempre il femore.

Il sangue venne prelevato durante il dissanguamento, ricevendolo in un pesafiltri tarato.

Dopo pesato, l'organo o il tessuto, veniva trasportato in capsulina di nikel, nella quale già si trovava 1 cc. di idrato sodico al 30%.

Si lavava accuratamente il vetrino da orologio e il pesafiltri con acqua distillata, e poi si riscaldava la capsulina di nikel, prima a modica fiamma e poi a tutta fiamma diretta, fino a ottenere una massa carboniosa. Questa si triturava finemente, si aggiungevano pochi cc. di acqua distillata, si portava a secco e si calcinava di nuovo a fiamma diretta, fino a ottenere delle ceneri grigio-ardesia molto chiaro. Si estraeva allora ripetutamente con acqua distillata bollente e si filtrava. Il filtro veniva bruciato, e il residuo, dopo calcinazione, veniva ancora estratto con acqua distillata bollente. Si filtrava, e il filtrato si univa a quello ottenuto nelle estrazioni precedenti.

In questa maniera, anche senza arrivare a ceneri bianche, cosa che avrebbe richiesto un tempo non indifferente, si poteva essere sicuri che tutto il cloro veniva asportato.

La soluzione finale ottenuta, veniva concentrata fino a piccolissimo volume e poi acidificata con acido nitrico. Ciò fatto si procedeva alla titolazione del cloro usando Nitrato di Argento N/40. La precipitazione del Cloruro di Argento veniva fatta all'ebollizione, onde ottenerlo ben coagulato. Dopo raffreddamento si titolava con solfocianato, indicatore l'allume ferrico. In tutte le titolazioni eseguite, non abbiamo notato alcun disturbo nell'andamento della reazione.

Diamo ora in una tabella i risultati ottenuti.

TABELLA.

N. delle matri		N. dei figli		Età giorni		Peso gr.	C L O R O % C O M E NaCl											
							Cuore	Polmone	Fegato	Rene	Milza	Stomaco	Cervello	Midollo spinale	Osso	Testicoli	Sangue	Muscoli
1	1	17	12.7	0.39	0.55	0.23	0.37	1.2	0.45	0.16	0.61	1.06	—	—	1.06	—	—	0.58
	2	34	30.0	0.31	0.69	0.18	0.43	0.6	0.63	0.23	0.51	0.94	—	—	0.94	—	0.60	0.28
	3	57	42.0	0.28	0.48	0.15	0.36	0.36	0.34	0.22	0.35	0.73	0.38	0.38	0.73	0.38	0.55	0.22
	4	76	60.0	0.24	0.45	0.13	0.30	0.32	0.28	0.20	0.36	0.58	0.28	0.28	0.58	0.28	0.53	0.11
	5	131	140.0	0.26	0.42	0.18	0.34	0.33	0.24	0.21	0.36	0.31	—	—	0.31	—	0.51	0.10
2	1	17	13.0	0.44	0.69	0.22	0.40	1.03	0.20	0.23	1.40	1.50	—	—	1.50	—	—	0.62
	2	32	30.0	0.33	0.57	0.20	0.41	0.49	0.10	0.25	0.56	1.10	0.30	0.30	1.10	0.30	0.50	0.24
	3	48	46.0	0.25	0.60	0.11	0.42	0.43	0.33	0.21	0.33	0.53	—	—	0.53	—	0.48	0.17
	4	75	70.0	0.25	0.50	0.17	0.34	0.28	0.27	0.22	0.28	0.50	0.34	0.34	0.50	0.34	0.44	0.17
	5	112	120.0	0.22	0.48	0.19	0.34	0.28	0.31	0.25	0.38	0.36	0.45	0.45	0.36	0.45	0.55	0.13
3	6	150	—	0.23	0.46	0.18	0.33	0.27	0.30	0.23	0.35	0.34	0.37	0.37	0.34	0.37	0.55	0.11
	1	16	16.5	0.39	0.63	0.27	1.60	1.4	0.40	0.24	1.10	0.80	—	—	0.80	—	—	0.44
	2	31	44.0	0.32	0.65	0.25	0.95	0.90	0.37	0.22	0.90	0.70	0.35	0.35	0.70	0.35	0.62	0.38
	3	50	70.0	0.27	0.51	0.15	0.37	0.37	0.33	0.22	0.39	0.80	0.35	0.35	0.80	0.35	0.59	0.43
	4	70	82.0	0.20	0.46	0.16	0.30	0.27	0.25	0.20	0.32	0.75	0.32	0.32	0.75	0.32	0.58	0.12
4	5	162	—	0.24	0.43	0.19	0.34	0.30	0.34	0.23	0.30	0.79	0.43	0.43	0.79	0.43	0.60	0.14
	1	19	15.0	0.61	0.70	0.26	0.55	1.60	0.30	0.23	2.70	2.70	—	—	2.70	—	—	0.41
	2	39	26.0	0.38	0.77	0.17	0.36	0.71	0.33	0.25	0.80	0.90	—	—	0.90	—	0.53	0.30
	3	54	40.0	0.24	0.48	0.18	0.35	0.32	0.16	0.20	0.67	0.60	—	—	0.60	—	0.47	0.17
	4	79	64.0	0.33	0.46	0.19	0.34	0.38	0.32	0.22	0.39	0.50	—	—	0.50	—	0.49	0.18
5	5	100	—	0.31	0.47	0.16	0.35	0.31	0.30	0.23	0.35	0.49	0.30	0.30	0.49	0.30	0.51	0.15
	1	20	18	0.59	0.65	0.30	0.60	1.30	0.35	0.22	0.80	1.20	—	—	1.20	—	—	0.41
	2	41	29	0.36	0.70	0.19	0.40	0.51	0.30	0.23	0.70	1.00	0.40	0.40	1.00	0.40	0.55	0.30
	3	59	47	0.28	0.49	0.18	0.35	0.35	0.21	0.21	0.60	0.70	0.34	0.34	0.70	0.34	0.50	0.20
	4	81	62	0.34	0.44	0.15	0.31	0.31	0.24	0.22	0.41	0.44	—	—	0.44	—	0.51	0.19
6	5	121	—	0.32	0.41	0.15	0.30	0.30	0.25	0.22	0.40	0.43	0.30	0.30	0.43	0.30	0.55	0.19
	1	18	13.0	0.50	0.61	0.24	0.57	1.20	0.40	0.24	0.58	1.20	—	—	1.20	—	—	0.39
	2	33	30.0	0.39	0.58	0.20	0.39	0.90	0.32	0.23	0.55	0.90	—	—	0.90	—	0.56	0.28
	3	55	39.0	0.27	0.43	0.16	0.30	0.30	0.26	0.23	0.39	0.76	—	—	0.76	—	0.54	0.20
	4	80	71.0	0.23	0.43	0.15	0.31	0.31	0.27	0.24	0.36	0.60	0.31	0.31	0.60	0.31	0.51	0.18
Valori medi per ratto adulto				0.26	0.43	0.17	0.32	0.30	0.29	0.22	0.35	0.56	0.33	0.54	0.56	0.33	0.54	0.14

Osservando i dati riportati nella tabella, si può notare che, ad eccezione del cervello, del sangue e dei testicoli, in tutti gli altri organi e tessuti da noi presi in esame, le percentuali di cloro seguono costantemente una stessa legge: col crescere dell'età, si ha una diminuzione di cloro, che si arresta quando il ratto ha raggiunto l'età adulta.

Dalla tabella stessa risulta inoltre, che i valori percentuali del cloro degli organi e tessuti dei ratti adulti, eccettuati quelli delle ossa, oscillano entro i limiti assai ristretti, non solo per i componenti di una stessa figliata, ma anche per quelli di figliate diverse: cosicchè le cifre percentuali da noi ottenute possono fornire un dato medio di valore generale pel ratto albino adulto.

Ciò premesso, a conclusione del nostro lavoro possiamo dire:

I) Che ad eccezione del cervello, del sangue e dei testicoli, il valore percentuale del cloro degli organi e tessuti del ratto albino, da noi presi in esame, diminuisce con l'età.

II) Che questa diminuzione si arresta quando il ratto ha raggiunto l'età adulta.

III) Che i valori percentuali del cloro da noi ottenuti nel ratto adulto possono prendersi come valori percentuali medi normali degli organi e tessuti da noi esaminati, ad eccezione di quelli delle ossa (femore).

Fisiologia. — *Sul valore del tasso glicemico in colombi di razza diversa* ⁽¹⁾. Nota di R. RUBINI, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Con ricerche eseguite su conigli, ratti, polli e colombi, V. Zagami ⁽³⁾ ha messo in evidenza, che il tasso di glicogeno nei vari segmenti del sistema nervoso centrale e nei vari organi toracici e addominali è più o meno elevato secondo la specie di animali considerata.

Di recente, avendo avuto egli ⁽⁴⁾ occasione di sperimentare su due diverse razze di colombi (pavoncelli bianchi e torraioli), appartenenti ad una stessa specie (*Columba livia domestica* L.), ha rilevato, che anche in tal caso si può notare una netta differenza, per quanto concerne il contenuto in glicogeno del cuore, del fegato e dei muscoli pettorali: nei pavon-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica biologica della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 6 marzo 1938.

(3) V. ZAGAMI, *Sul contenuto comparativo in glicogeno di vari segmenti del sistema nervoso centrale e di vari organi toracici e addominali in varie specie animali*. « Arch. Fisiol. », 35, 407 (1936).

(4) V. ZAGAMI, *Azione dei vaghi sul metabolismo dei glicidi*. — I. *Sul comportamento del glicogeno epatico, cardiaco e muscolare in seguito alla vagotomia bilaterale nei colombi* « Rendic. R. Acc. Naz. Lincei », in corso di pubblicazione.

cellì bianchi, rispetto ai torraioli, si ha infatti un contenuto in glicogeno nettamente più elevato.

Data l'importanza biologica di questo ultimo rilievo, ci è sembrato utile portare un contributo all'ulteriore conoscenza dell'argomento indagando, se, anche per quanto concerne il tasso glicemico, una differenza apprezzabile esistesse tra colombi pavoncelli bianchi e colombi torraioli.

Le esperienze, all'uopo condotte sotto la guida del prof. V. Zagami, sono state eseguite su 60 colombi complessivamente, di cui 20 pavoncelli bianchi e 40 torraioli.

Si è sperimentato sempre su colombi adulti, non vecchi, in massima parte allevati nelle colombaie dell'Istituto, e in buone condizioni di nutrizione. Perchè le condizioni fossero pari per tutti i colombi appartenenti ai due gruppi, il prelevamento del sangue per la determinazione del tasso glicemico veniva eseguito sugli animali a digiuno da 16-24 ore.

Il sangue fu sempre ottenuto per puntura, dalle vene dell'ala; e per il dosaggio del glicosio si adoperò il 2° micrometodo di Bang, seguendo rigorosamente tutti gli opportuni accorgimenti di tecnica in uso in questo laboratorio per giungere a dati esatti.

Per brevità riportiamo nell'annessa tabella i risultati ottenuti.

Nei colombi pavoncelli bianchi, il valore medio del tasso glicemico è risultato di gr. 0,162 %, oscillando tra un minimo di gr. 0,145 % e un massimo di gr. 0,182 %.

Nei colombi torraioli, il valore medio del tasso glicemico è risultato di gr. 0,187 %, oscillando tra un valore minimo di gr. 0,157 % e un valore massimo di gr. 0,235 %.

In base ai valori singoli del tasso glicemico, riportati nella tabella, non è evidentemente possibile stabilire una netta demarcazione tra le due razze di colombi. Tuttavia, in base ai valori medi, una differenza, per quanto non marcata, senza dubbio evidente, appare tra colombi pavoncelli bianchi e colombi torraioli, nel senso che il tasso glicemico dei primi è sensibilmente più basso rispetto a quello dei secondi.

Fisiologia. — *Azione dei vaghi sul metabolismo dei glicidi.* — II. *Sul comportamento del glicogeno cardiaco, epatico e muscolare in seguito a somministrazione di insulina nei colombi vagotomizzati*⁽¹⁾. Nota di V. ZAGAMI, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Nel corso di nostre indagini, i cui risultati sono stati riferiti in una precedente Nota⁽³⁾, abbiamo avuto occasione di studiare, comparativamente, le variazioni quantitative del glicogeno di vari organi toracici e addominali e di vari gruppi muscolari scheletrici, indotte dall'insulina.

Da tale studio è emerso, che il glicogeno del cuore, rispetto a quello dei muscoli scheletrici e dei vari organi toracici e addominali, presenta un andamento nettamente diverso. Infatti, mentre negli animali a digiuno da circa 16-20 ore, in seguito alla somministrazione di opportune quantità di insulina, si è avuta una diminuzione di glicogeno più o meno marcata nel fegato, nella milza, nel rene, nel polmone e nei vari gruppi muscolari scheletrici, si è avuto invece nel cuore un aumento, che è stato nettissimo nei colombi, netto nei conigli, e modico nei ratti.

Un comportamento analogo a quello del cuore ha presentato anche il glicogeno del diaframma nel coniglio.

Poichè in base ai risultati raccolti non ci era possibile dare di questi fatti una fondata interpretazione, ci siamo allora limitati a rilevare, che l'aumento del glicogeno, per azione dell'insulina, era risultato per muscoli a funzione particolare e specifica, e che la differenza di comportamento di questi ultimi, rispetto alla muscolatura scheletrica, si delineava di particolare importanza e degna di ulteriore studio.

Anche altri autori, studiando le variazioni quantitative del glicogeno, in condizioni sperimentali differenti dalle nostre o sotto l'azione di sostanze diverse dall'insulina, hanno notato un comportamento diverso tra muscolo cardiaco e muscoli scheletrici.

Takahashi⁽⁴⁾ riferisce, che per azione dell'insulina, mentre si ha nei muscoli marcata diminuzione del glicogeno e degli altri glicidi, nel cuore si ha invece lieve diminuzione del glicogeno ed aumento degli altri glicidi.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica biologica della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 20 febbraio 1938.

(3) V. ZAGAMI, *Sul comportamento del glicogeno di vari segmenti del sistema nervoso centrale e di vari organi toracici e addominali sotto l'azione dell'insulina.* « Arch. Fisiol. », 36, 475 (1936); *Sul comportamento del glicogeno del cuore per azione dell'insulina*, « Rendic. R. Acc. Naz. Lincei », 1936, XXIII, 524.

(4) K. TAKAHASHI, *Ueber experimentelle Kohlehydratstoffwechsel des Gehirns.* « Bioch. Zeitschr. », 154, 444 (1924).

Long e Evans ⁽¹⁾, sperimentando su ratti, osservarono un progressivo aumento del glicogeno del cuore durante il digiuno, mentre diminuiva il glicogeno dei muscoli scheletrici. Riferiscono ancora i suddetti Autori, che il lavoro muscolare o la somministrazione di adrenalina, che diminuiva il glicogeno dei muscoli scheletrici dal 55 al 70 % dei valori normali di controllo, aveva scarso o nessuno effetto sul glicogeno del cuore.

Evans ⁽²⁾ ha osservato, che in condizioni di anossiemia, mentre si ha marcata diminuzione del glicogeno nel cuore, lo stesso fatto non avviene invece nei muscoli scheletrici.

Evans e Bowie ⁽³⁾ hanno rilevato, che il glicogeno cardiaco si mantiene bene anche nei ratti a digiuno, che hanno ricevuto florizina, o florizina e insulina, e sostengono che esso sia sotto un controllo diverso da quello del glicogeno dei muscoli scheletrici, o che, almeno, un fattore addizionale sconosciuto regoli il comportamento di questo glicide nel cuore.

Cruickshank e Startup ⁽⁴⁾, in seguito ad una serie di indagini sul cuore isolato, hanno concluso, che nè l'insulina, nè l'adrenalina determinano diminuzione del tasso del glicogeno del muscolo cardiaco, e che sul cuore l'insulina è uno stimolante dei processi sintetici e non del metabolismo ossidativo.

In considerazione di quanto abbiamo detto, ci è sembrato opportuno riprendere le indagini, coll'intento di poter portare un contributo all'interpretazione di questo diverso comportamento tra glicogeno del muscolo cardiaco e glicogeno dei muscoli scheletrici.

Abbiamo ritenuto utile stabilire in primo luogo, se intervenisse o non l'azione dei vaghi; e pertanto le nuove esperienze sono state dirette ad accertare, se l'aumento del glicogeno nel cuore, per azione dell'insulina, si manifesta anche negli animali vagotomizzati, e, in caso positivo, se l'aumento è oppure non pari a quello che si ha negli animali normali a vaghi integri.

Le esperienze sono state condotte su 46 colombi, divisi in quattro gruppi. Ogni gruppo è risultato composto di colombi « pavoncelli bianchi » e di colombi « torraioli ». Il primo gruppo (Gruppo I) ci è servito per stabilire i valori normali di confronto, e, a tale scopo, gli animali sono stati sacrificati in condizioni perfettamente normali dopo un digiuno di 24, 48 o 96 ore. Un secondo gruppo (Gruppo II) ci è servito per stabilire le variazioni quantitative indotte dall'insulina nei colombi normali, e, a tale scopo,

(1) C. N. H. LONG e G. T. EVANS, « Proc. Soc. Exp. Biol. a. Med. », 30, 186 (1932-33).

(2) G. T. EVANS, « Journ. Physiol. », 82, 468 (1934).

(3) G. T. EVANS e M. A. BOWIE, « Proc. Soc. Exp. Biol. a. Med. », 35, 68 (1936).

(4) E. W. H. CRUICKSHANK e C. W. STARTUP, *The effect of insulin on the respiratory quotient, oxygen consumption, sugar utilization, and glycogen synthesis in the normal mammalian heart in hyper- and hypoglycemia.* « Journ. Physiol. », 77, 365 (1933); *The respiratory quotient, oxygen consumption and glycogen content of the mammalian heart in aglycemia.* « Journal Physiol. », 80, 179 (1933); *The action of insulin on the Q. R., oxygen utilization in the mammalian diabetic heart.* « Journ. Physiol. », 81, 153 (1934).

gli animali, parimenti a digiuno da 24, 48 o 96 ore, sono stati sacrificati 90' minuti dopo la somministrazione di 10-20 Unità di insulina. Un terzo gruppo (Gruppo III) ci è servito per stabilire le variazioni quantitative indotte dalla vagotomia, per sè sola, in modo da potere con precisione scindere le possibili variazioni dovute unicamente a questa causa da quelle dovute invece all'azione dell'insulina in condizioni di lesa attività dei vaghi. A tale scopo, gli animali sono stati sacrificati dopo 24, 48 o 96 ore dalla vagotomia coincidente coll'inizio del digiuno. Un quarto gruppo (Gruppo IV), infine, ci è servito per stabilire le variazioni quantitative indotte dall'insulina nei colombi vagotomizzati, e, a tale scopo, gli animali vagotomizzati e a digiuno pure da 24, 48 o 96 ore, sono stati sacrificati 90' minuti dopo la somministrazione di 10-20 Unità di insulina.

La vagotomia bilaterale è stata praticata sempre nella parte inferiore del collo.

Gli animali sono stati sacrificati tutti per dissanguamento, dopo aver prelevato un campione di sangue per la determinazione del tasso glicemico. Nei colombi, cui è stata somministrata l'insulina, un campione di sangue è stato prelevato pure prima della iniezione.

In tutti gli animali abbiamo accertato il contenuto in glicogeno del cuore, del fegato e dei muscoli pettorali. Per la determinazione del glicosio del sangue e del glicogeno degli organi e dei muscoli abbiamo adoperato il metodo di Bang e di Pflüger, seguendo la tecnica dettagliatamente descritta in una nostra precedente Nota ⁽¹⁾.

Nelle Tabelle annesse sono presentati i risultati ottenuti. Poichè nella precedente Nota ⁽²⁾ abbiamo esposto già le variazioni quantitative, che si sono avute per effetto della vagotomia, per sè sola, ci limitiamo a riferire qui soltanto le variazioni quantitative indotte dall'insulina, comparativamente, negli animali normali e negli animali vagotomizzati.

Contenuto in glicogeno nel cuore. — Nei colombi normali, non sottoposti a somministrazione di insulina, il contenuto in glicogeno nel cuore è risultato di gr. 0.176 %, in media, considerando complessivamente i valori trovati per tutti gli animali. Nei colombi normali, sacrificati 90' minuti dopo la somministrazione di 10-20 Unità di insulina, il contenuto in glicogeno nel cuore è risultato invece di gr. 0.427 %, in media, considerando anche in questo caso i valori trovati per tutti gli animali.

Per azione dell'insulina, nei colombi normali si è avuto perciò un nettissimo aumento (142 %, in media) del contenuto in glicogeno nel cuore.

(1) V. ZAGAMI, *Sul contenuto comparativo in glicogeno di vari segmenti del sistema nervoso centrale e di vari organi toracici e addominali*. « Arch. Fisiol. », 35, 407 (1936).

(2) V. ZAGAMI, *Azione dei vaghi sul metabolismo dei glicidi*. — I. *Sul comportamento del glicogeno epatico, cardiaco e muscolare in seguito alla vagotomia bilaterale nei colombi*. « Rend. R. Acc. Naz. Lincei », in corso di pubblicazione.

Tale aumento si è verificato sia nei pavoncelli bianchi a digiuno da 24 ore, sia nei torraioli a digiuno da 24, o da 48, o da 96 ore, e sia in seguito alla somministrazione di 10 che di 20 Unità di insulina.

Nei colombi vagotomizzati, non sottoposti a somministrazione di insulina, il contenuto in glicogeno nel cuore è risultato di gr. 0.230 %, in media. Nei colombi vagotomizzati, sacrificati 90' minuti dopo la somministrazione di 10-20 Unità di insulina, è risultato invece di gr. 0.430 %, in media.

Per azione dell'insulina, dunque, nei colombi vagotomizzati si è avuto pure un nettissimo aumento (87 %, in media) del contenuto in glicogeno del cuore. Anche in questo caso, l'aumento si è verificato sia nei pavoncelli vagotomizzati e a digiuno da 24 ore, sia nei torraioli vagotomizzati e a digiuno da 24, o da 48, o da 96 ore, e sia in seguito alla somministrazione di 10 che di 20 Unità di insulina.

Contenuto in glicogeno nel fegato. — Nei colombi normali, non trattati con insulina, il contenuto in glicogeno del fegato è risultato di gr. 0.235 %, in media, e in quelli sacrificati 90' minuti dopo la somministrazione di 10-20 Unità di insulina, è risultato di gr. 0.136 %, in media.

Per azione dell'insulina, nei colombi normali si è avuta perciò una diminuzione netta (42 %, in media) del contenuto in glicogeno del fegato.

Nei colombi vagotomizzati, non trattati con insulina, il contenuto in glicogeno del fegato è risultato di gr. 0.579 %, in media, e in quelli sacrificati 90' minuti dopo la somministrazione di 10-20 Unità di insulina è risultato di gr. 0.089 %, in media.

Per azione dell'insulina, anche nei colombi vagotomizzati si è avuta perciò una netta diminuzione (84 %, in media) del glicogeno epatico.

Sia nel caso dei colombi normali, sia nel caso dei colombi vagotomizzati la diminuzione del glicogeno epatico si è verificata sia nei pavoncelli bianchi a digiuno, o a digiuno e vagotomizzati da 24 ore, sia nei torraioli a digiuno, o a digiuno e vagotomizzati da 24, o da 48, o da 96 ore, e sia in seguito alla somministrazione di 10 che di 20 Unità di insulina.

Contenuto in glicogeno nei muscoli pettorali. — Nei colombi normali, non sottoposti a somministrazione di insulina, il contenuto in glicogeno dei muscoli pettorali è risultato di gr. 0.706 %, in media, e in quelli sacrificati 90' minuti dopo la somministrazione di 10-20 Unità di insulina, è risultato di gr. 0.615 %, in media.

Nei colombi vagotomizzati, non trattati con insulina, il contenuto in glicogeno dei muscoli pettorali è risultato di gr. 0.197 %, in media e in quelli sacrificati 90' minuti dopo la somministrazione di 10-20 Unità di insulina è risultato di gr. 0.183 %, in media.

Per azione dell'insulina si è avuta perciò una netta diminuzione (12 %, in media) nei colombi normali, e una lieve diminuzione (7 %, in media) nei colombi vagotomizzati. In ogni caso, la diminuzione del glicogeno muscolare si è verificata sia nei pavoncelli bianchi a digiuno, o a digiuno e vago-

tomizzati da 24 ore, sia nei torraioli a digiuno, o a digiuno e vagotomizzati da 24, o da 48, o da 96 ore, e sia in seguito alla somministrazione di 10 che di 20 Unità di insulina.

Riassumendo e concludendo, adunque, nei colombi normali, a digiuno da 24, o da 48, o da 96 ore, per azione di 10-20 Unità di insulina, si è avuto sempre un netto aumento del glicogeno cardiaco e una evidente diminuzione invece del glicogeno epatico e dei muscoli pettorali.

Nei colombi a digiuno e vagotomizzati da 24, o da 48, o da 96 ore, si è avuto pure sempre, per azione di 10-20 Unità di insulina, un netto aumento del glicogeno cardiaco, e una diminuzione del glicogeno epatico e dei muscoli pettorali.

Raffrontando le medie percentuali, relative alle variazioni quantitative del glicogeno cardiaco, epatico e muscolare, indotte dalla insulina, sembra, che vi sia una lieve differenza tra animali normali e animali vagotomizzati. Nei normali, rispetto ai vagotomizzati, sarebbe più accentuato l'aumento del glicogeno cardiaco e la diminuzione del glicogeno muscolare, meno accentuata, invece, la diminuzione del glicogeno epatico. Ma tali differenze possono trovare agevole spiegazione nel fatto, che gli animali normali, rispetto ai vagotomizzati - come abbiamo esposto nella Nota precedente - presentano un minore contenuto iniziale di glicogeno nel cuore e nel fegato e un maggiore contenuto nei muscoli. Le variazioni percentuali risentono quindi di questi differenti valori iniziali, e di scarso o nessuno valore ne è di conseguenza la comparazione.

Più importante per noi è il raffronto delle variazioni medie indotte dall'insulina, partitamente, negli animali normali e negli animali vagotomizzati; e questo - come abbiamo detto - depone, nei due casi, in favore di un nettissimo aumento del glicogeno cardiaco e di una evidente diminuzione del glicogeno epatico e dei muscoli pettorali.

Le presenti esperienze confermano, adunque, le nostre precedenti, con cui si è dimostrato, che l'insulina, mentre determina negli animali a digiuno da 16-20 ore una diminuzione di glicogeno nei vari organi toracici e addominali e nei vari gruppi muscolari scheletrici, determina invece un netto aumento di glicogeno nel cuore. Esse inoltre le estendono, dimostrando, che variazioni sempre nello stesso senso persistono anche nei colombi a digiuno da 24, o da 48, o da 96 ore, e in quelli a digiuno e vagotomizzati pure da 24, o da 48, o da 96 ore. Il fatto che l'aumento del glicogeno nel cuore si verifica anche nettissimo negli animali a vaghi recisi induce a ritenere, che il fenomeno in parola non sia da riferire ad una particolare azione vagale, ma sia piuttosto da attribuire ad uno speciale metabolismo del muscolo cardiaco, differente pertanto, entro certi limiti, da quello dei muscoli scheletrici.

TABELLA I.

N. progressivo degli animali	Sesso	Peso corporeo g.	Razza	Periodo di tempo trascorso dall'inizio del digiuno ore	Insulina iniettata Un. Cl.	Glicosio nel sangue g. per ‰		Glicogeno g. per ‰			Medie parziali. Glicogeno: g. per ‰		
						iniziale	dopo 90' dalla iniez. di insulina	Cuore	Fegato	Muscoli pettorali	Cuore	Fegato	Muscoli pettorali
1	♂	355	pavoncelli	24	—	0,157	—	0,392	0,312	0,608			
2	♀	270	id.	24	—	0,146	—	0,361	0,909	0,831			
3	♂	370	id.	24	—	0,150	—	0,262	0,499	1,194	0,338	0,573	0,877
4	♂	360	torraioli	24	—	0,146	—	0,102	0,031	0,753			
5	♂	320	id.	24	—	0,176	—	0,196	0,060	0,648			
6	♂	460	id.	24	—	0,181	—	0,141	0,350	0,703			
7	♂	350	id.	24	—	0,157	—	0,238	0,055	0,469			
8	♂	330	id.	24	—	0,168	—	0,121	0,751	0,729			
9	♀	330	id.	24	—	0,180	—	0,136	0,034	0,725	0,155	0,213	0,671
10	♂	290	id.	48	—	0,201	—	0,101	0,063	0,815			
11	♀	340	id.	48	—	0,160	—	0,062	0,036	0,474			
12	♀	350	id.	48	—	0,160	—	0,136	0,014	0,864	0,100	0,037	0,718
13	♂	310	id.	96	—	0,174	—	0,095	0,098	0,555			
14	♂	315	id.	96	—	0,162	—	0,125	0,090	0,510	0,108	0,094	0,532
Medie complessive . . .						0,165	—	0,176	0,235	0,706			

GRUPPO II: Colombi normali trattati con insulina.

1	♀	320	pavoncelli	24	10	0,171	0,080	0,540	0,270	0,600			
2	♂	320	id.	24	20	0,151	0,079	0,462	0,405	0,745	0,501	0,337	0,672
3	♂	400	torraioli	24	10	0,169	0,047	0,718	0,272	0,881			
4	♂	340	id.	24	10	0,154	0,099	0,276	0,045	0,524			
5	♀	320	id.	24	20	0,186	0,048	0,475	0,014	0,551			
6	♀	320	id.	24	20	0,179	0,087	0,264	0,038	0,491	0,433	0,092	0,612
7	♀	300	id.	48	10	0,190	0,093	0,407	0,031	0,706	0,407	0,031	0,706
8	♂	290	id.	96	10	0,151	0,094	0,250	0,076	0,550			
9	♂	300	id.	96	20	0,196	0,102	0,455	0,040	0,473	0,352	0,058	0,511
Medie complessive . . .						0,172	0,081	0,427	0,136	0,615			

TABELLA II.

N. progressivo degli animali	Sesso	Peso corporeo g.	Razza	Periodo di tempo trascorso dall'inizio del digiuno e dalla vagotomia	Insulina iniettata Un. Cl.	Glicosio nel sangue g. per %		Glicogeno g. per %			Medie parziali. Glicogeno: g. per %		
						iniziale	dopo 90' dalla iniez. di insulina	Cuore	Fegato	Muscoli pettorali	Cuore	Fegato	Muscoli pettorali

GRUPPO III: Colombi vagotomizzati.

1	♂	320	pavoncelli	24	—	0,207	—	0,411	0,241	0,194			
2	♀	240	id.	24	—	0,191	—	0,496	2,362	0,054			
3	♂	380	id.	24	—	0,154	—	0,646	1,654	0,153	0,518	1,419	0,134
4	♂	450	torraioli	24	—	0,196	—	0,135	0,259	0,316			
5	♀	440	id.	24	—	0,168	—	0,103	0,989	0,182			
6	♂	360	id.	24	—	0,251	—	0,121	0,139	0,317			
7	♂	340	id.	24	—	0,240	—	0,190	0,103	0,126			
8	♀	310	id.	24	—	0,250	—	0,171	0,239	0,187			
9	♂	340	id.	24	—	0,213	—	0,280	0,076	0,153	0,167	0,300	0,213
10	♂	340	id.	48	—	0,247	—	0,086	0,163	0,304			
11	♂	315	id.	48	—	0,181	—	0,134	0,120	0,150			
12	♂	400	id.	48	—	0,261	—	0,260	0,466	0,210	0,160	0,249	0,221
13	♀	320	id.	96	—	0,244	—	0,116	1,130	0,101			
14	♀	300	id.	96	—	0,186	—	0,136	0,166	0,322	0,126	0,648	0,211
Medie complessive . . .						0,213	—	0,230	0,579	0,197			

GRUPPO IV: Colombi vagotomizzati trattati con insulina.

1	♂	350	pavoncelli	24	10	0,178	0,056	0,938	0,066	0,201			
2	♂	350	id.	24	20	0,174	0,056	0,585	0,100	0,046	0,761	0,083	0,123
3	♂	400	torraioli	24	10	0,232	0,069	0,233	0,067	0,238			
4	♀	340	id.	24	10	0,206	0,038	0,383	0,016	0,014			
5	♂	360	id.	24	20	0,199	0,039	0,269	0,014	0,280			
6	♂	330	id.	24	20	0,215	0,042	0,271	0,025	0,227	0,289	0,030	0,189
7	♀	310	id.	48	10	0,166	0,046	0,503	0,118	0,210	0,503	0,118	0,210
8	♂	270	id.	96	10	0,204	0,054	0,348	0,046	0,302			
9	♂	320	id.	96	20	0,244	0,095	0,341	0,356	0,101	0,344	0,201	0,201
Medie complessive . . .						0,209	0,055	0,430	0,089	0,183			

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente sen. MILLOSEVICH annuncia la morte avvenuta il 19 febbraio scorso del Socio Straniero EDMUND LANDAU e alla Sua Memoria invia il saluto reverente dell'Accademia.

Il Socio SEVERI, poichè ha la parola per presentazione di Nota, rivolge, a nome di tutti i Colleghi, vive espressioni di saluto al nuovo Presidente sen. Millosevich, del quale pone in rilievo l'alto valore scientifico e le doti di tatto e di equilibrio.

I Colleghi si associano con vive acclamazioni alle parole del Socio SEVERI.

Il Presidente Sen. MILLOSEVICH ringrazia vivamente i Colleghi della manifestazione di stima e di simpatia.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio MARCOLONGO presenta alla Classe l'ingente materiale degli scritti e dei disegni di Leonardo pubblicati dal 1900 in poi dalla Commissione Vinciana per un complesso di ben dodici monumentali volumi. Dopo aver fatto la storia dei singoli codici e specialmente del famoso codice Arundel, del codice Forster e dei codici che si trovano oggi in possesso dell'Institut de France, il MARCOLONGO ha illustrato ai Colleghi i criteri e le difficoltà della edizione ponendo pienamente in rilievo l'importanza della pubblicazione stessa per la completa conoscenza del genio universale di Leonardo.

Il Presidente MILLOSEVICH si congratula vivamente con il Socio MARCOLONGO per la bella e interessante comunicazione.

L'Accademico Segretario PARRAVANO presenta le opere giunte in dono all'Accademia segnalando: il volume « Opérations infinitésimales linéaires » di Vito Volterra e Bohuslav Hostinsky; « La théorie des groupes finis et continus » di Elie Cartan; le « Leçons sur les principes topologiques » di S. Stoilow; le « Ricerche biochimiche sulle farine e sugli impasti da pane » di Luigi Salto; i « Reports of proceedings » del Congresso Internazionale dell'Unione scientifica di Londra del 1937; l'edizione delle « Opere Complete di Cristiano Huygens » pubblicate dalla Società Olandese di Scienze.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per l'inserzione nei « Rendiconti » i Soci BAGLIONI, CROCCO, LEVI-CIVITA e SEVERI.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

L'Accademico Segretario aggiunto prof. AMALDI legge la relazione con la quale i Soci ALOISI e D'ACHIARDI propongono la pubblicazione della Memoria di Probo Comucci dal titolo: « Le rocce raccolte dalla spedizione geografica italiana al Karakorum (1929) ». L'Assemblea approva.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente sen. MILLOSEVICH legge alla Classe il telegramma che a nome dell'Accademia ha inviato alla Reale Accademia d'Italia, per la morte di Gabriele D'Annunzio.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 6 marzo 1938

- AJON GUIDO. — Rapporto di equivalenza e fertilità (Estr. dagli « Annali della R. Stazione Sperimentale di frutticoltura e di agricoltura ». Vol. XV). Acireale, 1938. 8°, pp. 1-15.
- AMPRINO RODOLFO. — Come si forma e come si organizza la struttura del polmone nel periodo fetale. (Estr. dall'« Archivio Italiano di Anatomia, e di Embriologia ». Vol. XXXVIII, pp. 447-458). Firenze, 1937. 8°.
- AMPRINO RODOLFO. — Transformations histologiques pendant l'accroissement et le remaniement du col du fémur après la naissance. (Extr. des « Comptes Rendus de l'Association des Anatomistes », 21-25 mars, 1937). Marseille, 1937. 8°, pp. 1-17.
- AMPRINO RODOLFO. — Un perfectionnement technique à la méthode d'Achucarro pour les fibrilles grillagées, avec quelques considérations sur les méthodes de coloration élective du tissu conjonctif. (Extr. du « Bulletin d'Histologie appliquée ». 1936, pp. 223-234). Paris, 1936. 8°.
- BACHELIER LOUIS. — La spéculation et le calcul des probabilités. Paris, Editeur Gauthier-Villars, 1938. 8°, pp. I-VII, 1-49.
- BRACCINI PAOLO. — Esperimento di alimentazione delle vacche da latte con barbabietole da foraggio in sostituzione del mais caragua insilato. (Estr. dalla « Rivista di Zootecnica », Anno XIV). Firenze, 1937. 8°, pp. 1-15.
- BRACCINI PAOLO. — Il latte scremato nell'alimentazione del bestiame. (Esperimento compiuto su due gruppi di vacche da latte). (Estr. dalla Rivista « Latte e latticini ». Anno XIV, nn. 5-6). Lodi, 1937. 4°, pp. 1-7.
- BRACCINI PAOLO. — La durata della gestazione nelle cavalle coperte dall'asino. Studio biometrico. Milano, 1937. 8°, pp. 1-12.
- BUCCIANTE LUIGI. — Studi statistici sulla morfologia dei vasi della retina nell'uomo. (Estr. dall'« Archivio Italiano di Anatomia e di Embriologia ». Vol. XXXVI, pp. 344-394). Firenze, 1936. 8°.
- CARTAN ELIE. — La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle traitées par la méthode du repère mobile. (Cahiers scientifiques. Fasc. XVIII). Paris, Editeur Gauthier-Villars, 1937. 8°, pp. I-VI, 1-269.
- CASTELLANI Omero. — Contributo alla conoscenza della fauna entomologica del Lazio. (Estr. dal « Bollettino della Società Entomologica Italiana ». Volumi LXVIII, LXIX, pp. 34, 40, 114-117). Roma, 1937. 8°.
- CASTELLANI Omero. — Contributo alla conoscenza della fauna entomologica del Lazio. (Estr. dal « Bollettino della Società Veneziana di Storia Naturale ». Vol. I, pp. 179-183). Venezia, 1937. 8°.
- DE SANTILLANA G. — Vedi ENRIQUEZ FEDERICO.
- DRAGHETTI ALFONSO. — Nuovi orientamenti nella fertilizzazione del suolo. Il metodo di concimazione umo-minerale. (Estratto dagli « Annali di Tecnica Agraria », Anno X, fasc. IV-VI). Roma, 1938. 8°, pp. 1-38.
- DUCROS ETTORE. — Aspetti e sviluppi del problema zootecnico in Libia. (Estr. da « Agricoltura Libica ». Anno VI). Tripoli, 1937. 8°, pp. 1-11.
- ENRIQUES FEDERICO. — Il significato della storia del pensiero scientifico

- Bologna, Editore Nicola Zanichelli, 1936. 8°, pp. 1-68.
- ENRIQUES FEDERICO e DE SANTILLANA G. — Compendio di storia del pensiero scientifico dall'antichità fino ai tempi moderni. Bologna, Editore Nicola Zanichelli, 1937. 8°, pp. I-VI, 1-481.
- GIUSTI GIUSEPPE. — Il controllo della incubazione artificiale (Estr. dalla « Rivista di Avicoltura ». 1937 n. 5. Bologna, 1937. 8°, pp. 1-8.
- HUYGENS CHRISTIAAN. — Oeuvres complètes. Tome XIX publiées par la Société Hollandaise des Sciences. La Haye, 1937. 4°, pp. 1-687.
- International Council of Scientific Unions. — The Third General Assembly of the International Council of Scientific Unions held at London April 24th to May 3, 1937. Cambridge, 1937. 8°, pp. I-VIII, 1-151.
- Istituto Nazionale di Economia Agraria Roma. — Scopi - ordinamento attività scientifica dell'Istituto. Milano, 1936. 8°, pp. 1-31.
- Istituto Nazionale Vittorio Emanuele III per lo studio e la cura del cancro. Vol. IX, 1937.
- ASTUNI ANTONINO. — Ricerche cliniche sulla sensibilità nervosa dei tessuti neoplastici. (Estr. da « Tumori ». Anno XXIII, fasc. VI). Milano, 1937. 8°, pp. 1-14.
- BELTRAMI WALLY. — Il comportamento di alcuni enzimi nel sangue e negli organi durante il trattamento con sostanze cancerogene. (Estr. da « Tumori ». Anno XXIII, fasc. IV-V). Milano, 1937. 8°, pp. 1-15.
- BORDOLI L. — L'escrezione urinaria giornaliera e sue variazioni durante la terapia attinica, in seguito a prove di carico e dopo la trasfusione di sangue. (Estr. da « Tumori ». Anno XXIII, fasc. VI). Milano, 1937. 8°, pp. 1-48.
- BORDOLI LUIGI. — L'eliminazione urinaria di acido ascorbico nei cancerosi. (Estr. dagli « Atti e Memorie della Società Lombarda di Medicina ». Vol. V). Milano, 1937. 8°, pp. 1-4.
- BUCALOSSI PIETRO. — Il trattamento dei gangli linfatici nei portatori di tumori epiteliali maligni del cavo orale. (Estr. da « Tumori ». Anno XXIII, fasc. VI). Milano, 1937. 8°, pp. 1-38.
- BULLO ENZO. — La roentgenstereografia in stati patologici del cranio. (Estr. da « La Radiologia Medica ». Volume XXIV, fasc. 4). Milano, 1937. 8°, pp. 1-12.
- BULLO ENZO. — Un caso di epitelioma della cornea guarito con la plesio-roentgenterapia. (Estr. da « La Radiologia Medica ». Vol. XXIV, fasc. 7). Milano, 1937. 8°, pp. 1-11.
- CARDILLO FURIO. — La roentgenterapia dei tumori maligni della ghiandola genitale maschile. (Estr. da « Tumori ». Anno XXIII, fasc. III). Milano, 1937. 8°, pp. 1-37.
- CARDILLO FURIO. — Raggi gamma ed unità « r ». (Estr. da « La Radiologia Medica ». Vol. XXIV, fasc. 6°). Milano, 1937. 8°, pp. 1-19.
- CARDILLO FURIO. — Sul sarcoma dello stomaco. (Contributo radiologico). (Estr. da « La Radiologia Medica ». Vol. XXIV, fasc. 9). Milano, 1937. 8°, pp. 1-20.
- CARDILLO FURIO. — Tumore del polmone e malattia di Pierre Marie. (Estr. da « La Radiologia Medica ». Vol. XXIV, fasc. 10). Milano, 1937. 8°, pp. 1-11.
- DISTEFANO GIOACCHINO. — Considerazioni sull'istologia e istogenesi del sarcoma mammario. (Estr. da « Tumori ». Anno XXIII, fasc. IV-V). Milano, 1937. 8°, pp. 1-13.
- DISTEFANO GIOACCHINO. — Carcinoma papillare della pelici renale con distruzione emorragica totale del rene. (Estr. da « Tumori ». Anno XXIII, fasc. VI). Milano, 1937. 8°, pp. 1-20.
- LANCER A. — La digeribilità di cellule normali e neoplastiche per parte della pepsina. (Estr. da « Tumori ». Anno XXIII, fasc. III). Milano, 1937. 8°, pp. 1-7.
- PERUSSIA FELICE. — Considerazioni sulla irradiazione post-operatoria del can-

- cro della mammella. (Estr. dalla « Rassegna Internazionale di Clinica e Terapia ». Vol. XVIII). Milano, 1937. 8°, pp. 1-4.
- PERUSSIA FELICE. — Le indicazioni della plesiorontgentherapie (Estr. da « La Radiologia Medica ». Vol. XXIV, fasc. 9). Milano, 1937. 8°, pp. 1-8.
- RATTI ARDUINO. — La frequenza delle radiazioni in rapporto agli effetti sui tessuti neoplastici. (Estr. dagli « Atti e Memorie della Società Lombarda di Medicina ». Vol. V). Milano, 1937. 8°, pp. 1-5.
- RATTI ARDUINO. — La radioterapia del cancro della mammella. (Estr. da « Tumori » Anno XXIII, fasc. 1). Milano, 1937. 8°, pp. 1-92, tav. I-VIII.
- RATTI ARDUINO. — Ricerche sperimentali su di un presunto antagonismo fra i raggi roentgen e i raggi infrarossi. (Estr. da « La Radiologia Medica ». Vol. XXIV, fasc. 1). Milano, 1937. 8°, pp. 1-16.
- RATTI ARDUINO. — Sulla visibilità radiologica dei tumori della epifaringe. (Estr. dagli « Annali di radiologia e fisica medica ». Vol. XI). Bologna, 1937. 8°, pp. 1-17.
- RONDONI P. — Alcuni contributi della chimica alla moderna cancerologia. (Estr. dalla « Rassegna Clinico-scientifica » dell'Istituto Biochimico Italiano. 1937, N. 7). Milano, 1937. 8°, pp. 1-28.
- RONDONI P. — Der Einfluss der Krebs-erregenden Stoffe auf enzymatische Vorgänge. (Aus « Enzymologia ». Volume III, pp. 252-257). Den Haag, 1937. 8°.
- RONDONI P., CARMINATI V. e CORBELLINI A. — Die vermutliche oestrogene Wirkung eines Cholesterinpräparates. (Sonderabdruck aus « Hoppe-Seyler's Zeitschr.f. physiol. Chem. ». Band 247, pp. 225-226). Berlin and Leipzig, 1937. 8°.
- RONDONI P. — Fizjologia komorki a rak. (Odbitka z N. 10, 1937 r. dwutygodnika « Medycyna »). Warszawa, 1937. 8°, pp. 1-19.
- RONDONI P. — Relazione sull'attività dal 21 dicembre 1936 al 20 dicembre 1937 ed elenco delle pubblicazioni del 1937 dell'Istituto Nazionale Vitorio Emanuele III per lo studio e la cura del cancro. Milano, 1938. 8°, pp. 1-26.
- RONDONI P. e BELTRAMI W. — Ricerche enzimatiche negli animali trattati con sostanze cancerogene. (Estr. dagli « Atti e Memorie della Società Lombarda di Medicina ». Vol. V). Milano, 1937. 8°, pp. 1-2.
- RONDONI P. e EISEN. — Ricerche sul papilloma di Shope. (Estr. da « Tumori ». Anno XXIII, fasc. VI). Milano, 1937. 8°, pp. 1-23.
- RONDONI P. — Su due casi di linfadenosi cronica. (Estr. dagli « Atti e Memorie della Società Lombarda di Medicina ». Vol. V). Milano, 1937. 8°, pp. 1-9.
- SILVESTRONI E. — L'equilibrio acidobasi espresso dai caratteri urinari nei cancerosi. (Estr. da « Tumori ». Anno XXIII, fasc. IV-V). Milano, 1937. 8°, pp. 1-41.
- JABLONSKI W. — Vedi MEYER H.
- JANNONE GIUSEPPE. — Primo contributo alla conoscenza dell'ortotterofauna della Libia. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Vol. XXX. Portici, 1938. 8°, pp. 87-120).
- LEVI GIUSEPPE. — Variabilità nella struttura dei tessuti e degli organi e suo significato. (Estr. da « Scritti in onore del prof. Angelo Ceconi »). Torino, 1936. 4°, pp. 1-8.
- LEVI G. et MEYER H. — Nouvelles recherches expérimentales sur les tissu nerveux cultivé « in vitro ». Recherches sur les ganglions spinaux. (Extr. des « Comptes Rendus de l'Association des Anatomistes ». XXXII^e réunion, Marseille, 21-25 mars 1937). Turin, 1937. 8°, pp. 1-18.
- LEVI G. und MEYER H. — Die Struktur der lebenden Neuronen. (Aus « Anat. Anzeiger ». Bd. 83, pp. 401-422). Jena, 1937. 8°.

- MARTELLI G. M. — La lotta contro la *Deilophila lineata* var. *livornica* Esp. nel 1937 in Tripolitania. (Estr. da «Agricoltura Libica». Anno VI). Tripoli, 1937. 8°, pp. 1-6.
- MEYER H. — Langdauernde Züchtung von Nervenzellen in vitro. (Estr. dalla «Rivista di Biologia». Vol. XXII). Firenze, 1937. 8°, pp. 1-8.
- MEYER H. and JABLONSKI W. — Cultivation of nerve cells in vitro over a long period. Second note. (Reprinted from the «Journal of Anatomy». Vol. LXXII, Part I, pp. 62-65). Cambridge, 1937. 8°.
- MEYER H. — Vedi LEVI GIUSEPPE.
- MIGLIARDI L. — Caratteri delle membrane basali dei canalicoli durante l'istogenesi del rene. (Estr. dal «Monitore zoologico Italiano». Anno XLVIII, pp. 167-174). Firenze, 1937. 8°.
- MITRINOVITCH DRAGOSLAV. — Équation différentielle des asymptotiques et équation des cordes vibrantes qui s'y rattache. (Extr. des «Revue Mathématique de l'Union Interbalkanique». Tome I, fasc. II). Athènes, 1936. 4°, pp. 1-3.
- MITRINOVITCH DRAGOSLAV. — Sur une différentielle du premier ordre intervenant dans divers problèmes de géométrie. (Extr. des «Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences». T. 204). Paris, 1937. 4°, pp. 1-3.
- MITRINOVITCH DRAGOSLAV. — Transformation et intégration d'une équation différentielle du premier ordre. (Extr. de «Publications mathématiques de l'Université de Belgrade». Tome V, pp. 10-22). Belgrade, 1936. 8°.
- MONTALCINI LEVI e SACERDOTE E. — Formazione di fibrille reticolari e collagene in colture di epitelii e di elementi miocardici. (Estr. dal «Monitore zoologico Italiano». Anno XLVII, pp. 309-318). Firenze, 1937. 8°.
- MUGGIA GIULIO. — Un caso di blefaroptosi con oftalmoplegia congenita ereditaria. (Estr. dal «Bollettino della Società Italiana di Biologia sperimentale». Vol. XII, pp. 621-622). Torino, 1937. 8°.
- Opera Nazionale per i Combattenti. — Aprilia. L'Agro Pontino al 29 ottobre. Anno XVI. E. F. Roma, 1937. 8°, pp. 1-194.
- PELSINA GIOVANNI. — Ricerche sulle variazioni della longitudine Greenwich-Uccle. (Estr. dalle «Memorie della Società Astronomica Italiana». Vol. X, 4). Pavia, 1937. 8°, pp. 1-40.
- PIROCCHI ANTONIO. — Discussione sulle applicazioni alla genetica nel campo zootecnico. (Estr. dal «Bollettino della Società Italiana di Biologia Sperimentale». Vol. XII, pp. 550-553). Varese, 1937. 8°.
- PIROCCHI ANTONIO. — Esperimento di alimentazione su cento maiali col sottoprodotto del latte scremato usato per la fabbricazione del «Lanital». (Estr. dai «Nuovi Annali dell'Agricoltura». Anno XVII, pp. 495-502). Roma, 1937. 8°.
- RUSSO A. — Olutorie raccolte dalla R. N. Magnaghi in Mar Rosso e zone viciniori. (Estr. dal «Bollettino dell'Accademia Gioenia di Catania». 1937). Catania, 1937. 8°, pp. 1-4.
- SACERDOTE E. — Vedi MONTALCINI LEVI.
- SALDIA MANINAT ANTONIO J. — Corso de geometria gravitacional. Lima, 1937. 8°. pp. 1-177.
- SALTO LUIGI. — Ricerche biochimiche sulle farine e sugli impasti da pane. (Estr. dagli «Annali del Laboratorio L. Spallanzani del R. Istituto Superiore Agrario di Milano». Vol. III). Parma, 1937. 8°, pp. 1-186.
- SCARPA OSCAR. — Sulla lampada di Nernst. (Estr. dagli «Atti della Associazione Elettrotecnica Italiana», 1902). [Solo il titolo].
- SCARPA OSCAR. — Determinazione della viscosità del fenolo allo stato liquido. (Estr. dal «Nuovo Cimento». Serie V, Vol. V). Pisa, 1903. 8°, pp. 1-16.
- SCARPA OSCAR. — Sulla viscosità dei miscugli di acqua e fenolo. (Estr. da

- « Nuovo Cimento ». Serie V, Vol. VI). Pisa, 1903, 8°. pp. 1-16.
- SCARPA OSCAR. — La viscosité des solutions d'eau et de phénol. (Extrait du « Journal de Chimie-Physique », pp. 447-451). Genève, 1904. 8°.
- SCARPA OSCAR. — Sulla distribuzione del campo magnetico nel traferro delle elettrocalamite di Wes e di Faraday. (Estr. dagli « Atti della Associazione Elettrotecnica Italiana », 1903). Roma, 1903. 8°, pp. 1-19.
- SCARPA OSCAR. — Sulla distribuzione del campo magnetico nel traferro delle elettro calamite Weis. Nota II. (Estr. dagli « Atti della Associazione Elettrotecnica Italiana », 1904). Roma, 1904. 8°, pp. 1-6.
- SCARPA OSCAR. — Alcune esperienze sulle pile campione. (Estr. dagli « Atti della Associazione Elettrotecnica Italiana », 1904). Roma, 1904. 8°, pp. 1-6.
- SCARPA OSCAR. — Alcune semplici forme di potenziometri. (Estr. dall'« Eletttricista », N. 20, 1904). S. I. 1904. 8°, pp. 1-4.
- SCARPA OSCAR. — Sulla viscosità di alcuni colloidi inorganici. (Estr. dall'« Archivio di Fisiologia ». 1905). [Solo il titolo].
- SCARPA OSCAR. — Una semplice disposizione per le osservazioni ultramicroscopiche e alcune soluzioni colloidali e i loro coaguli. (Estr. dall'« Archivio di Fisiologia ». Vol. II, fasc. III, pp. 321-326). Firenze, 1905. 8°.
- SCARPA OSCAR. — Determinazione della suscettività magnetica dell'acqua. (Estratto dagli « Atti del R. Istituto d'Incoraggiamento di Napoli ». Serie VI, Vol. II). Napoli, 1905. 8°, pp. 1-27.
- SCARPA OSCAR. — Un dispositif simple pour la mesure de faibles forces électromotrices (tissus animaux, piles de concentration etc.). (Extr. des « Archives Internationales de Physiologie ». Vol. III, fasc. II, pp. 183-190). Liège, 1905-1906. 8°.
- SCARPA OSCAR. — Ricerche magnetiche e ottiche su alcuni colloidi magnetici. (Estr. dagli « Atti dell'Associazione Elettrotecnica Italiana ». 1905). Roma, 1905. 8°, pp. 1-52.
- SCARPA OSCAR. — Un metodo per metallizzare le superfici delle sostanze porose. (Estr. dall'« Eletttricista ». Volume V, pp. 299-306). Roma, 1907. 8°.
- SCARPA OSCAR. — Sulla radioattività delle lave del Vesuvio. (Estr. dai « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei ». Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Serie 5ª, Vol. XVI, pp. 44-51). Roma, 1907. 8°.
- SCARPA OSCAR. — Metodi per preparare corpi incandescenti per lampade elettriche. [Solo il titolo].
- SCARPA OSCAR. — Sulla sintesi dell'anidride nitrosa col metodo di Helbig. (Estr. dalla « Gazzetta Chimica Italiana ». Anno XXXVII). Roma, 1904. 8°, pp. 1-6.
- SCARPA OSCAR. — Un fenomeno delle acque termali e delle fumarole dell'Isola d'Ischia. (Estr. dal « Corriere d'Ischia ». N. 8). Napoli, 1907. 12°, pp. 1-8.
- SCARPA OSCAR. — Lezioni di chimico-fisica dettate nella R. Università di Napoli. (Raccolte dagli Studenti Kernot e Miele. Napoli, 1907).
- SCARPA OSCAR. — Contributo alla teoria delle soluzioni. (Estr. dai « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei ». Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Serie 5ª, vol. XVII, pp. 362-359). Roma, 1908. 8°.
- SCARPA OSCAR. — Sull'azione della corrente alternata sulle lampade ad incandescenza con filamenti di tantalio. (Estr. dagli « Atti dell'Associazione Elettrotecnica Italiana ». 1908). Milano, 1908. 8°, pp. 1-5.
- SCARPA OSCAR. — Sull'azione della corrente alternata sulle odierne lampade con filamenti metallici. (Estr. dagli « Atti dell'Associazione Elettrotecnica Italiana ». Vol. XIII). Milano, 1909. 8°, pp. 1-6.
- SCARPA OSCAR. — Sulla misura della viscosità dei liquidi e dei lubrificanti con nuovo viscosimetro a efflusso.

- (Estr. dagli «Atti del R. Istituto d'Incoraggiamento di Napoli». Serie VI, vol. VII). Napoli, 1909. 8°, pp. 1-39.
- SCARPA OSCAR. — Sulla misura della viscosità dei liquidi e dei lubrificanti. (Estr. dalla «Gazzetta Chimica Italiana». Anno XL, parte II). Roma, 1910. 8°, pp. 1-25.
- SCARPA OSCAR. — Istruzione per il viscosimetro Scarpa. Napoli, 1910. 8°, pp. 1-7.
- SCARPA OSCAR. — Sugli ultramicroscopi a riflessione totale. (Estr. dagli «Atti del R. Istituto d'Incoraggiamento di Napoli». Serie VI, vol. VII). Napoli, 1909. 8°, pp. 1-7.
- SCARPA OSCAR. — Analisi della radioattività delle acque termali Fornello e Fontana di Porto d'Ischia e Manzi di Casamicciola. (Estr. dagli «Atti del R. Istituto d'Incoraggiamento di Napoli. Serie VI, vol. VIII). Napoli, 1910. 8°, pp. 1-36.
- SCARPA OSCAR. — Sulla ionizzazione dell'aria nelle vicinanze di alcune sorgenti termali dell'Isola d'Ischia. (Estr. dagli «Atti del R. Istituto d'Incoraggiamento di Napoli». Serie VI, vol. VIII). Napoli, 1910. 8°, pp. 1-6.
- SCARPA OSCAR. — Sulla esistenza della emanazione di torio nelle acque termali di Porto d'Ischia. (Estr. dagli «Atti del R. Istituto d'Incoraggiamento di Napoli». Serie, VI, vol. VIII). Napoli, 1910. 8°, pp. 1-4.
- SCARPA OSCAR. — Nuovo metodo per preparare il mercurio colloidale. (Estr. dai «Rendiconti della Società Chimica Italiana». Vol. II). Roma, 1910. 8°, pp. 1-4.
- SCARPA OSCAR. — Sulla legge della diluizione. (Estr. dal «Nuovo Cimento». Serie, V, vol. XX). Pisa, 1910. 8°, pp. 1-12.
- SCARPA OSCAR. — Sulla idrolisi dei sali di acido e di base forte. (Estr. dai «Rendiconti della Società Chimica Italiana». Vol. II). Roma, 1910. 8°, pp. 1-4.
- SCARPA OSCAR. — Su un problema e su alcune esperienze di diffusione. (Estr. dal «Nuovo Cimento». Serie V, vol. XX). Pisa, 1910. 8°, pp. 1-16.
- SCARPA OSCAR. — Sulla idrolisi dei sali di acido e di base forte. (Estr. dai «Rendiconti della Società Chimica Italiana». Vol. II). Roma, 1910. 8°, pp. 1-3.
- SCARPA OSCAR. — Sul calcolo della idrolisi dei sali di acido e di base egualmente forte. (Estr. dai «Rendiconti della Società Chimica Italiana». Fasc. 10°). Roma, 1910. 8°, pp. 1-6.
- SCARPA OSCAR. — Su un singolare risultato di alcune esperienze di diffusione. (Estr. dai «Rendiconti della Società Chimica Italiana». Fasc. 10°). Roma, 1910.
- SCARPA OSCAR. — Un nuovo apparecchio per la misura dei numeri di trasporto. (Estr. dall'«Elettricista». Vol. IX). s. l. 1910. 8°, pp. 1-2.
- SCARPA OSCAR. — Sulla idrolisi dei sali di acido e di base forte, e su alcune esperienze di diffusione. (Estr. dai «Rendiconti della Società Chimica Italiana». Fasc. 3°, 1911). Roma, 1911. 8°.
- SCARPA OSCAR. — Su alcune esperienze di diffusione. Nota II. (Estr. dalla «Gazzetta Chimica Italiana». Anno XLI, parte I). Roma, 1911. 8°, pp. 1-9.
- SCARPA OSCAR. — Su alcune esperienze di diffusione. (Estr. dal «Nuovo Cimento». Serie VI, vol. I). Pisa, 1911. 8°, pp. 1-7.
- SCARPA OSCAR. — Su una recente dimostrazione della legge della diluizione. (Estr. dai «Rendiconti della Società Chimica Italiana». Fasc. III, 1911). Roma, 1911. 8°, pp. 1-2.
- SCARPA OSCAR. — Sulla dipendenza della mobilità degli joni dalla concentrazione delle soluzioni. (Estr. dai «Rendiconti della Società Chimica Italiana». Fasc. 3°, 1911). Roma, 1911. 8°, pp. 1-10.
- SCARPA OSCAR. — Sul calcolo dei numeri di trasporto e delle mobilità degli joni idratati. (Estr. dai «Rendiconti

- della Società Chimica Italiana». Fasc. VI, 1911). Roma, 1911. 8°, pp. 1-5.
- SCARPA OSCAR. — Sul calcolo dei numeri di trasporto reali. (Estr. dal «Nuovo Cimento», vol. II, fasc. VI). Pisa, 1911. 8°, pp. 1-12.
- SCARPA OSCAR. — Alcune esperienze sulla dimostrazione della conduttività degli elettroliti senza l'uso di elettrodi, (Estr. dall'«Elettricista». Vol. I). Roma, 1912. 8°, pp. 1-5.
- SCARPA OSCAR. — Su un problema di diffusione. Nota IV. (Estr. dai «Rendiconti della Società Chimica Italiana». Fasc. X, 1911). Roma, 1911. 8°, pp. 1-6.
- SCARPA OSCAR. — Su un problema e su alcune esperienze di diffusione (Estr. dal «Nuovo Cimento». Serie VI, vol. I). Pisa, 1911. 8°, pp. 1-8.
- SCARPA OSCAR. — Una disposizione sperimentale per la misura diretta delle pressioni osmotiche. (Estr. dai «Rendiconti della Società Chimica Italiana». Fasc. XI, 1911). Roma, 1911. 8°, pp. 1-4.
- SCARPA OSCAR. — Una nuova forma di viscosimetro a efflusso. (Estr. dall'«Archivio di Fisiologia». Vol. V, pp. 375-380). Napoli, 1908. 8°.
- SCARPA OSCAR. — Su una nuova forma di viscosimetro ad efflusso. (Estr. dallo «Sperimentale Archivio di Biologia normale e patologica». Anno LXV). Napoli, 1911. 8°, pp. 1-7.
- SCARPA OSCAR. — Ancora sulla teoria di un problema di diffusione. (Estr. dal «Nuovo Cimento». Serie VI, vol. III). Pisa, 1912. 8°, pp. 1-20.
- SCARPA OSCAR. — Alcune esperienze riguardanti la teoria della diffusione. (Estr. dai «Rendiconti della Società Chimica Italiana». Fasc. III, 1912). Roma, 1912. 8°, pp. 1-6.
- SCARPA OSCAR. — Un nuovo metodo per la determinazione della sensibilità degli indicatori. (Estr. dai «Rendiconti della Società Chimica Italiana». Fasc. III, 1912). Roma, 1912. 8°, pp. 1-4.
- SCARPA OSCAR. — L'influenza della concentrazione sulla sensibilità degli indicatori. (Estr. dai «Rendiconti della Società Chimica Italiana». Fasc. IV, 1912). Roma, 1912. 8°, pp. 1-6.
- SCARPA OSCAR. — Un tentativo per migliorare le osservazioni ultramicroscopiche. (Estr. dai «Rendiconti della Società Chimica Italiana». Fasc. IV, 1912). Pisa, 1912. 8°, pp. 1-5.
- SCARPA OSCAR. — Un buon apparecchio per la misura dei numeri di trasporto. (Estr. dal «Nuovo Cimento». Serie VI, vol. III). Pisa, 1912. 8°, pp. 1-8.
- SCARPA OSCAR. — Un singolare fenomeno che talvolta accompagna la precipitazione dei colloidi. (Estr. dai «Rendiconti della Società Chimica Italiana». Fasc. VI, 1912). Roma, 1912. 8°, pp. 1-4.
- SCARPA OSCAR. — Una forma pratica di picno-dilatometro. (Estr. dai «Rendiconti della Società Chimica Italiana». Fasc. VI, 1912). Roma, 1912. 8°, pp. 1-2.
- SCARPA OSCAR. — Sul calcolo di alcune esperienze di diffusione. (Estr. dalla «Gazzetta Chimica Italiana». Anno XLII, parte II). Roma, 1912. 8°, pp. 1-11.
- SCARPA OSCAR. — Sul comportamento dei filamenti di tungsteno trafilato sotto l'azione della temperatura e delle vibrazioni. (Estr. dagli «Atti dell'Associazione Elettrotecnica Italiana». Vol. XVI). Milano, 1912. 8°, pp. 1-6.
- SCARPA OSCAR. — Influenza del mercurio sul comportamento degli accumulatori a piombo. (Estr. dall'«Elettricista». Vol. II). Roma, 1913. 8°, pp. 1-2.
- SCARPA OSCAR. — Sull'influenza dei colloidi sulla viscosità di alcuni miscugli binari di non elettroliti. (Estr. dai «Rendiconti della Società Chimica Italiana». Anno 1913, fasc. XIII). Roma, 1913. 8°, pp. 1-5.
- SCARPA OSCAR. — È la viscosità o la fluidità una proprietà addittiva? (Estr.

- dai « Rendiconti della Società Chimica Italiana ». Anno 1913, fasc. XIII). Roma, 1913. 8°, pp. 1-8.
- SCARPA OSCAR. — Trasformazione invertibile della gomma e della gelatina dallo stato di emulsoide a quello di sospensoide e proprietà di tali sistemi. (Estr. dai « Rendiconti della Società Chimica Italiana ». Anno 1913, fasc. XIII). Roma, 1913. 8°, pp. 1-5.
- SCARPA OSCAR. — Le applicazioni industriali della chimica-fisica. (Estr. da « L'Elettrotecnica ». Anno II, n. 12). s. l. s. d. 4°, pp. 1-4.
- SCARPA OSCAR. — Un'esperienza sul passaggio della corrente nei conduttori di seconda classe. S. l. s. d.
- SCARPA OSCAR. — Umkehrbare Ueberführung emulsoider Gummi und Gelatinelösungen in den suspensoiden Zustand und Eigenschaften derartiger Systemen-Kolloid Zeitschrift 1914. [Solo il titolo].
- SCARPA OSCAR. — La fabbricazione dell'ammoniaca usufruendo dell'azoto atmosferico. (Estr. da « L'Elettrotecnica ». Anno II, n. 5. S. l. s. d. 4°, pp. 1-13).
- SCARPA OSCAR. — Sul comportamento elettrochimico dei forni elettrici ad arco. Conferenza tenuta alla Società Chimica Italiana in Roma il 6 dicembre 1914. (Estr. dagli « Atti della Società Chimica Italiana », 1915).
- SCARPA OSCAR. — Origini e sviluppo della ultramicroscopia. (Estr. dagli « Annali di Chimica Applicata ». Anno II, vol. III, pp. 295-313). Roma, 1915. 8°.
- SCARPA OSCAR. — Una nuova industria italiana. (Estr. dalla Rivista « Ausoniae Hermes ». Anno I, fasc. X-XII). Roma, 1915. 8°, pp. 1-7.
- SCARPA OSCAR. — Disposizione potenziometrica per ricerche di elettrochimica. (Estr. dagli « Annali di Chimica Applicata ». Anno II, vol. III, pp. 157-161). Roma, 1915. 8°.
- SCARPA OSCAR. — La fabbricazione dell'acido nitrico e dei nitrati usufruendo dell'azoto atmosferico. (Estr. da « L'Elettrotecnica ». Anno III, n. 28). S. l. s. d. 5°, pp. 1-12.
- SCARPA OSCAR et LOMBARDI L. — Sur les éléments qui caractérisent le facteur de puissance des fours à carbure de calcium. (Communication au III^{ème} Congrès International du carbure de calcium et de l'acétylène). Roma, 1913. 4°, pp. 1-7.
- SCORDIA CONCETTINA. — Per la biologia del tonno (*Thunnus thynnus* LI). (Estr. dalle « Memorie di Biologia Marina e di Oceanografia ». Vol. V, n. 6). Messina, 1937. 8°, pp. 1-11.
- SILVESTRI FILIPPO. — L'entomologia agraria nello sviluppo delle nostre Colonie. (Estr. dagli « Atti della XXV^a Riunione della S. I. P. S. a Tripoli », 1° Raduno della Scienza Italiana 1-7 novembre 1936). Roma, 1937. 8°, pp. 1-22.
- STOILOW S. — Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques. Paris, Editeur Gauthier-Villars, 1938. 8°, pp. I-X, 1-148.
- THAYER-OJEDA LUIS. — Consideraciones sobre la periodicidad de los cuerpos elementales. Valparaiso, 1937. 8°, pp. 1-16.
- VAGHI LORENZO. — Il nuovo metodo dell'Höyberg confrontato col metodo del Gerber per la determinazione del grasso nel latte. (Estr. dalla « Rivista latte e latticini ». Anno XIV, n. 3-4). Lodi, 1937. 4°, pp. 1-6.
- VOLTERRA VITO. — Opérations infinitésimales linéaires. Applications aux équations différentielles et fonctionnelles. Paris, Editeur Gauthier-Villars, 1938. 8°, pp. I-III, 1-238.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 20 marzo 1938 — Anno XVI

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Meccanica (Meccanica del volo). — *I fattori della stabilità statico-cinetica nei motovelivoli*. Nota⁽¹⁾ del Socio G. A. CROCCO.

Riferendoci ad una nostra precedente Nota⁽²⁾ nella quale abbiamo indicato una prima formulazione del fattore di stabilità cinetica nei motovelivoli e della correzione cinetica al fattore di stabilità statica, vogliamo con la presente revisionare le ipotesi semplificative che hanno permesso tale formulazione, alcune delle quali non si sono dimostrate attendibili nelle successive applicazioni numeriche. Le necessarie correzioni sono state già apportate da qualche anno nelle nostre lezioni presso la Scuola d'Ingegneria Aeronautica di Roma, ma non erano ancora di pubblica ragione.

La trazione dell'elica introduce nel velivolo una forza aerodinamica che varia in senso opposto alle eventuali variazioni di velocità di cammino del motovelivolo e quindi in discordanza con la variazione conseguente in tutte le altre forze aerodinamiche; ed inoltre induce una variazione nella portanza di coda. Ne nasce una complessa alterazione cinetica del momento baricentrico, che vogliamo riprendere in esame.

Sia perciò T la trazione dell'elica; e la sua altezza sul baricentro del velivolo, p la portanza di coda nel velivolo, anteriore all'attivazione dell'elica, ed a_g la distanza del centro di pressione della portanza di coda dal baricentro. Se supponiamo inesistente la variazione della portanza alare in con-

(1) Presentata nella seduta del 6 marzo 1938.

(2) G. A. CROCCO, *Stabilità statica e stabilità cinetica nei motovelivoli*. Questi « Rendiconti », vol. XIX, fasc. 5-6, 1934.

seguenza dell'azione dell'elica, l'alterazione introdotta nel momento baricentrico si può formulare con

$$\Delta M_g = e T + a_g \Delta p;$$

ove Δp indica l'alterazione della portanza di coda.

L'influsso dell'elica consta di due effetti contrastanti⁽¹⁾; e cioè di un aumento nella velocità di corrente che investe la coda ed in una diminuzione dell'angolo d'incidenza con cui la investe⁽²⁾.

Se ora esprimiamo la trazione T per mezzo della classica formula sintetica

$$(1) \quad T = \rho A V^2 \cdot \left(1 + \frac{v}{2}\right) \cdot v;$$

dove ρ è la densità dell'aria; A la superficie efficace del disco battuto dalle pale dell'elica; V la velocità di cammino del motovelivolo; $v = \frac{\Delta V}{V}$ il rapporto tra l'incremento finale di velocità della corrente, dietro l'elica, e la velocità di cammino, comunemente detto *regresso relativo*; l'esperienza insegna che l'aumento relativo di velocità e la diminuzione, $\Delta \epsilon$, dell'angolo d'incidenza con cui la corrente investe la coda possono ritenersi formulabili con $h v$ e $\kappa C_{pa} v$; essendo h e κ coefficienti sperimentali e C_{pa} la portanza unitaria dell'ala.

Cosicchè, chiamando con α_c la preesistente incidenza della coda, s la sua superficie, k_{pc} il gradiente della sua portanza, potremo scrivere

$$p = k_{pc} \cdot \rho s V^2 \cdot \alpha_c$$

$$\Delta p = k_{pc} \rho s V^2 [(2 h v + h^2 v^2) \alpha_c - (1 + h v)^2 \Delta \epsilon].$$

Da questa espressione, introducendovi oltre alla (1) le posizioni:

$$(2) \quad \begin{cases} \Delta M_g = \Delta C_{mg} \cdot \rho S V^2 l & ; \quad T = C_\tau \cdot \rho S V^2; \\ P_a = C_{pa} \rho S V^2 & ; \quad \Delta \epsilon = \kappa C_{pa} v; \end{cases}$$

nelle quali l è la media corda alare; S la superficie alare di riferimento; P_a la portanza alare; C_{mg} il coefficiente adimensionale del momento baricentrico; si otterrà agevolmente

$$(3) \quad \Delta C_{mg} = C_\tau \left[\frac{e}{l} + \frac{k_{pc} s a_g}{A l} \left(\frac{2 h + h^2 v}{1 + \frac{v}{2}} \right) \alpha_c - \frac{(1 + h v)^2}{1 + \frac{v}{2}} \kappa C_{pa} \right].$$

(1) CROCCO, *Elementi di Aviazione*, p. 573 e sg.

(2) Vedi anche: PANETTI, «Rendiconti Lab. Aeronautico di Torino», 2^a serie, 1936, p. 47.

Osserviamo subito che nella realtà dei voli moderni v può raggiungere in salita il valore 0.5; e che la sola esperienza, in presenza di ala ⁽¹⁾, dalla quale si possano desumere i coefficienti h e κ assegna ad h il valore 0.45. Sicchè si può ritenere con buona media:

$$\frac{2h + h^2 v}{1 + \frac{v}{2}} \cong 2h \quad ; \quad \frac{(1 + hv)^2}{1 + \frac{v}{2}} \cong 1.$$

Inoltre conviene di fare apparire nella (3) la portanza unitaria totale C_p al posto di quella alare C_{pa} ; cosicchè, ponendovi:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_{pa} = C_p - \frac{k_p s}{S} \alpha_c; \\ h_1 = 2h + \kappa k_{pc} \frac{s}{S}; \end{array} \right.$$

si ottiene in definitiva:

$$(5) \quad \Delta M_g \cong C_\tau \left[\frac{c}{l} + \frac{k_{pc} s a_g}{Al} (h_1 \alpha_c - \kappa C_p) \right];$$

che risulta identica a quella adottata nello studio precedente, a meno dei simboli e della sostituzione delle quantità baricentriche al posto di quelle riferite al bordo d'attacco della corda media.

Sin qui, pertanto, le semplificazioni introdotte e le ipotesi da cui nascono appaiono sostanzialmente giustificate.

A questo punto interviene un fatto aerodinamico di cui non è stato tenuto conto nella precedente trattazione; e cioè la manovra dell'equilibratore, necessaria a ripristinare l'equilibrio nell'istante in cui si attiva l'elica. Per introdurre, senza complicare inutilmente il problema, le alterazioni conseguenti a questa generica manovra negli elementi aerodinamici da cui dipendono i fattori cinetici del motovelivolo faremo le ipotesi che restino inalterate le due quantità *velocità* e *portanza* considerate nel velivolo, pur rimanendo inalterata l'incidenza assoluta dell'ala. È ovvio che queste ipotesi sono incompatibili con quella, fatta innanzi, circa la nullità della interferenza fra ala ed elica. Per rendere tutte le ipotesi logicamente compatibili bisogna ora modificare quest'ultima nel senso che l'interferenza sull'ala, pur non alterandone il momento baricentrico, alteri leggermente la portanza in senso opposto alla finale alterazione di quello di coda. Quando l'aerodinamica fornirà dati concreti non sarà per altro difficile ritoccare su questo punto le nostre conclusioni.

(1) Le successive brillanti esperienze condotte da Panetti al Laboratorio di Torino, di cui la nota alla pagina precedente, riguardano l'interferenza elica-coda non in presenza di ala.

Le precedenti ipotesi ci consentono comunque di ammettere invariata, dal velivolo al motovelivolo, l'incidenza indotta dell'ala sulla coda: cosicchè, nella espressione totale dell'angolo d'incidenza α_c ,

$$(6) \quad \alpha_c = i + \varphi \bar{\alpha} - \Delta \varepsilon;$$

dove i è l'equivalente angolo di calettamento della coda, φ il fattore d' influsso dell'ala, $\Delta \varepsilon$ l'influsso dell'elica, basterà ora supporre una variazione Δi di i per riassumere l'effetto della manovra dell'equilibratore.

Esprimeremo allora la condizione che, a manovra effettuata, dovrà risultare nulla la somma algebrica della variazione di momento dovuta alla manovra dell'equilibratore più il momento direttamente introdotto dall'elica più il momento dovuto all'azione dell'elica sulla coda, nella sua posizione angolare finale modificata. Si trarrà pertanto Δi dalla:

$$(7) \quad \frac{k_{pc} sa_g}{Sl} \Delta i + C_\tau \frac{e}{l} + C_\tau \frac{k_{pc} sa_g}{Al} [h_1 (\alpha_c + \Delta i) - \kappa C_p] = 0;$$

dove $sa_g : Sl$ proviene dal noto *rapporto volumetrico di coda*.

Ponendo, per brevità

$$(8) \quad \nabla = \frac{k_{pc} sa_g}{Al} (\kappa C_p - h_1 \alpha_c) - \frac{e}{l}$$

si ricaverà dalla (7), posto $\xi_2 = h_1 \frac{S}{A}$:

$$(9) \quad \frac{k_{pc} sa_g}{Sl} \Delta i = \frac{C_\tau}{1 + \xi_2 C_\tau} \nabla.$$

Potremo adesso calcolare il trinomio ∇_1 del motovelivolo, che dovremo considerare nella valutazione dei fattori cinetici. Esso risulterà dalla espressione

$$(10) \quad \nabla_1 = \frac{k_{pc} sa_g}{Al} [\kappa C_p - h_1 (\alpha_c + \Delta i)] - \frac{e}{l},$$

analogà alla (8) del corrispondente trinomio del velivolo, tenendo conto della (9). Ne risulterà, in definitiva

$$(11) \quad \nabla_1 = \frac{\nabla}{1 + \xi_2 C_\tau};$$

che ci consentirà ora di ricavare con migliore approssimazione i fattori cinetici, pur continuando a servirsi del trinomio ∇ , calcolato per il velivolo ad elica inattiva.

Supponiamo pertanto una variazione di incidenza, $\delta \alpha$, nel motovelivolo e calcoliamo la conseguente variazione δM_g : o, poichè V si suppone invariata, la variazione δC_{mg} .

Indicando con $(C_{mg})_{vel}$ il corrispondente momento unitario del velivolo, che è nullo per $\delta\alpha = 0$, potremo scrivere

$$(12) \quad C_{mg} = (C_{mg})_{vel} + \frac{k_{pc} sa_g}{Sl} \Delta i - \frac{C_\tau \nabla}{1 + f_2 C_\tau};$$

espressione anch'essa corrispondente ad un valore nullo, poichè il primo termine è nullo e gli altri due sono eguali per la (9). Ma derivandola rispetto ad α il secondo termine darà zero, perchè costante, e il terzo termine conterrà soltanto la derivata di ∇ . Si avrà perciò

$$(13) \quad \frac{\delta C_{mg}}{\delta\alpha} = \frac{\delta}{\delta\alpha} (C_{mg})_{vel} - \frac{C_\tau}{1 + f_2 C_\tau} \frac{\delta \nabla}{\delta\alpha};$$

dove il primo termine sarà precisamente il prodotto $k_p \frac{\bar{x}_g}{l}$, col quale abbiamo definito la stabilità statica del velivolo nelle Note precedenti; ed il secondo termine, poichè φ è la derivata di α_c e k_p di C_p , conterrà l'espressione

$$(14) \quad \frac{\delta \nabla}{\delta\alpha} = \frac{k_{pc} sa_g}{Al} [\kappa k_p - h_1 \varphi].$$

Il fattore di stabilità statica del motovelivolo risulterà pertanto

$$(15) \quad \bar{s} = \frac{\delta M_g}{\delta\alpha} = k_p \rho SV^2 l \left[\frac{\bar{x}_g}{l} - \frac{C_\tau}{1 + f_2 C_\tau} \frac{k_{pc} sa_g}{Al} \left(\kappa - h_1 \frac{\varphi}{k_p} \right) \right]$$

e la *correzione cinetica* si tradurrà in uno spostamento del fuoco statico verso l'avanti o verso l'indietro, secondo che sarà positiva o negativa la espressione tra parentesi del secondo termine del secondo membro.

La (15) va dunque sostituita alla (14) della Nota precedente ed all'ambiguo ragionamento che la seguiva.

Calcoliamo ora il *fattore di stabilità cinetica*, cioè la derivata, rispetto alla velocità, del momento baricentrico

$$M_g = C_{mg} \cdot \rho SV^2 l;$$

dove a C_{mg} s'intende sostituita la (12).

Poichè C_{mg} è nullo inizialmente, la derivata di M_g si ridurrà soltanto a

$$(16) \quad \frac{\delta M_g}{\delta V} = \rho SV^2 l \cdot \nabla \cdot \frac{\delta}{\delta V} \left(- \frac{C_\tau}{1 + f_2 C_\tau} \right);$$

essendo C_τ la sola quantità variabile con δV in tutta la espressione (12).

Per calcolare la (16) ci gioveremo di una constatazione sperimentale ⁽¹⁾ da cui risulta che la derivata della trazione di un'elica qualsiasi, a passo fisso nell'istante in cui si considera, può esprimersi assai bene entro i limiti del volo normale mediante la

$$(17) \quad \frac{\delta T}{\delta V} \cong - \frac{1}{2} \frac{T}{V}.$$

Sostituendo ora nella (17) la espressione di T fornita dalle (2) si avrà

$$\frac{\delta C_\tau}{\delta V} \rho S V^2 + 2 C_\tau \rho S V = - \frac{1}{2} C_\tau \rho S V$$

da cui

$$(18) \quad \frac{\delta C_\tau}{\delta V} = - \frac{5}{2} \frac{C_\tau}{V};$$

e in conseguenza

$$(19) \quad \frac{\delta}{\delta V} \left(- \frac{C_\tau}{1 + f_2 C_\tau} \right) = \frac{5}{2 V} \frac{C_\tau}{(1 + f_2 C_\tau)^2}.$$

Si ottiene così la nuova formulazione del fattore di stabilità cinetica

$$(20) \quad t = \frac{\delta M_g}{\delta V} = \rho S V l \frac{5}{2} \frac{C_\tau}{(1 + f_2 C_\tau)^2} \cdot \nabla;$$

da sostituire alla analoga formula (17), inesatta, della precedente Nota.

L'importanza di questi fattori nello studio della stabilità spinge infine a trasformarne le espressioni per facilitarne la valutazione numerica sperimentale.

Si potrebbero invero valutare analiticamente le singole quantità del velivolo che vi figurano e cioè k_p ; k_{pc} ; φ ; conoscendo $\frac{s}{S}$; $\frac{a_g}{l}$; $\frac{S}{A}$; ma conviene desumerli dal *grafico dei momenti* ⁽²⁾, da noi introdotto nel 1930 e adottato con successo nei laboratori sperimentali aerodinamici di Guidonia e di Torino. Ci riferiamo a titolo di esempio al grafico del ROMA 1501, da noi citato; e a quelli dei TORINO 38, 39, 43 *ter*, accuratissimi e bene illustrati ⁽³⁾. Ci duole di non potere citare i GUIDONIA, perchè non ancora resi di pubblica ragione.

(1) Ing. LUIGI CROCCO, *L'Aerotecnica*, vol. XVII, n. 7 del luglio 1937. La nostra formula (17) discende dalla differenziazione logaritmica della [3] della suddetta Nota per C = costante.

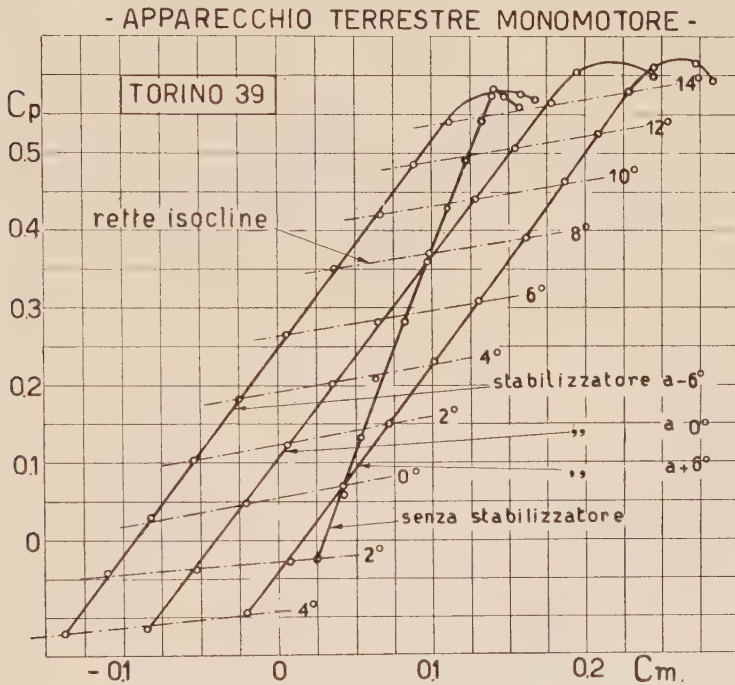
(2) CROCCO, *Elementi di Aviazione*. Cap. V, n. 78 e sg.

(3) PANETTI, « Rendiconti », 3^a serie.

Riferendoci al TORINO 39 (fig. 1), che ha il baricentro sensibilmente sulla corda media, ne riporteremo una immagine ingrandita nella figura 2, di cui deformiamo il rapporto tra le scale per maggior chiarezza.

Questa immagine si riferisce alla parte di grafico compresa tra due linee di momenti del *velivolo totale*, che tagliano la linea del *velivolo parziale* (senza coda) (fig. 2).

Siano AC, EB i tratti delle linee relative al velivolo totale: ed AB quella relativa al velivolo parziale. Siano A e B i punti di incontro; e si



traccino per interpolazione le *isocline* AF, BC passanti per A e B. Si consideri il punto d'incontro C, che determina il *triangolo dei momenti* ABC. Completiamolo col tracciamento della *retta baricentrica* LM; che ci servirà a tracciarne da B la parallela sino ad incontrare in D l'orizzontale tirata da C. Misuriamo inoltre l'incremento, ΔC_p , di portanza, compreso tra quest'ultima orizzontale e quella tirata da A. Sia $\Delta \alpha$ l'angolo, in radianti, tra le due linee isocline; e Δi l'angolo, in radianti, tra le due linee di momento del velivolo totale. Si legga infine \overline{DC} nella scala dei momenti.

È agevole dimostrare che si hanno le seguenti relazioni, da sostituire nella (15):

$$(21) \quad \frac{k_{pc} s a_g}{Sl} = \frac{\overline{DC}}{\Delta i} \quad ; \quad \frac{k_{pc} s a_g}{Sl} \frac{\varphi}{k_p} = \frac{\overline{DC}}{\Delta C_p} ;$$

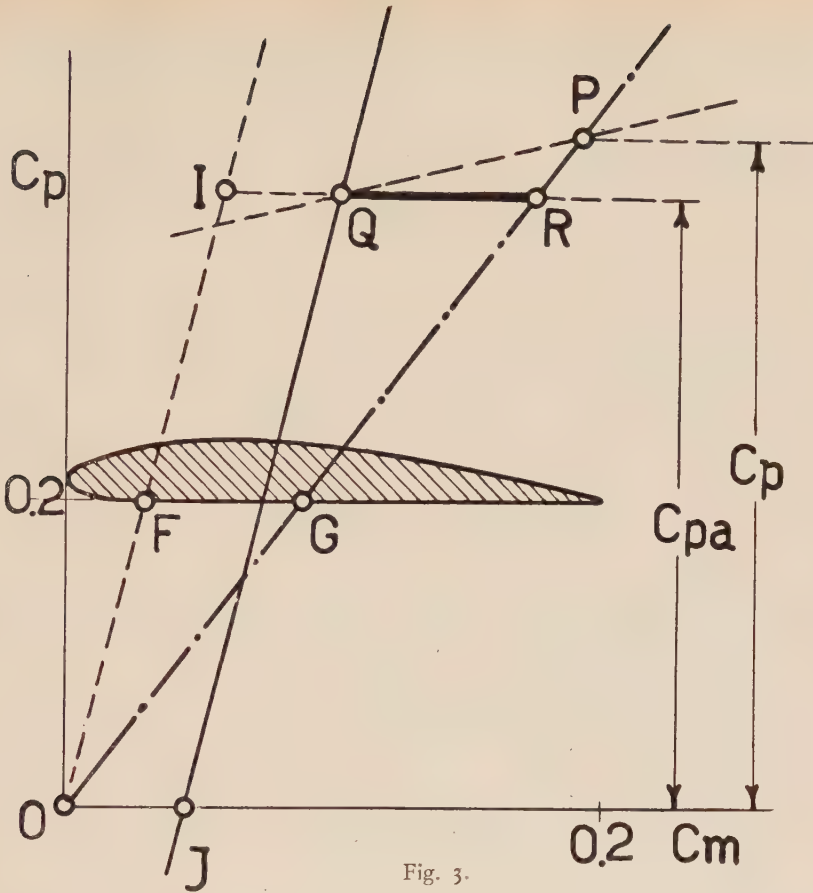


Fig. 3.

È agevole dimostrare che si ha, essendo G sulla corda media:

$$(23) \quad \begin{cases} \frac{k_{pc} s a_g}{Sl} \alpha_c = \overline{QR} = \overline{IR} - \overline{IQ}; \\ \overline{IR} = \frac{\overline{FG}}{l} C_{pa} = \frac{\overline{FG}}{l} (C_p - k_{pc} \frac{s}{S} \alpha_c); \\ \overline{IQ} = \overline{OJ} = C_{mo}; \end{cases}$$

e in definitiva

$$(24) \quad \frac{k_{pc} s a_g}{Sl} \alpha_c = \frac{a_g}{a_g + \overline{FG}} \left[\frac{\overline{FG}}{l} \cdot C_p - C_{mo} \right].$$

La (24) e la prima delle (21) consentono allora di precisare gli elementi del velivolo che figurano nel trinomio ∇ , che risulta pertanto in questo caso lineare in C_p .

Per formularlo numericamente occorre ora soltanto la conoscenza sperimentale di h e κ ; ed in un campo più esteso di quello citato.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. *Sulle superficie razionali a sezioni iperpiane canoniche e su un paradosso relativo alle loro singolarità.* Nota II di S. FAEDO, presentata ⁽¹⁾ dal Socio F. ENRIQUES.

4. — Andiamo ora a ricercare se esistono (e di quanti tipi) sistemi lineari $\bar{\Sigma}$ aventi 10 punti base, di cui almeno uno semplice, sopra una cubica fondamentale. Per le nostre considerazioni ci si può limitare a considerare i sistemi di ordine minimo (fra gli ordini delle curve dei sistemi fra loro birazionalmente equivalenti). Una serie di tali sistemi è data dalle curve di genere p e di ordine $n = 3p$

$$(III) \quad C_{3p}(A_1^p, \dots, A_8^p, A_9^{p-1}, A_{10});$$

per $p = 3$ si ha il sistema II di Noether.

Dimostriamo ora che questa serie comprende tutti i possibili sistemi $\bar{\Sigma}$.

$\bar{\Sigma}$ abbia i punti base $A_1^{i_1}, A_2^{i_2}, \dots, A_9^{i_9}, A_{10}$ con $i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_9 \geq 1$. Supponiamo dapprima che sia $n = 3r$ con r intero.

Se $\bar{\Sigma}$ non appartiene alle serie (III), il punto A_1 ha la molteplicità $r + t$ con $t \geq 1$. La somma delle molteplicità nei punti A_2, \dots, A_9 è $8r - t - 1$ ed è

$$(6) \quad i_2 + \dots + i_9 \geq \frac{i_2 + i_3 + \dots + i_9}{4} = \frac{8r - t - 1}{4} = \\ = 2r - t + 1 + \frac{3t - 5}{4},$$

dai cui $i_2 + i_3 \geq 2r - t + 1$ essendo $i_2 + i_3$ intero.

I punti A_1, A_2 e A_3 non sono allineati, avendosi $i_1 + i_2 + i_3 \geq 3r + 1$, ed una trasformazione quadratica, che li abbia come punti fondamentali, abbassa l'ordine di $\bar{\Sigma}$, contro l'ipotesi che Σ , sia di ordine minimo.

Il ragionamento precedente sussiste pure per $n = 3r + 1$, sostituendo alla (4) la

$$(6') \quad i_2 + i_3 \geq \frac{8r - t + 2}{4} = 2r - t + 2 + \frac{3t - 6}{4}$$

e per $n = 3r + 2$, in cui si ha

$$(6'') \quad i_2 + i_3 \geq \frac{8r - t + 5}{4} = 2r - t + 3 + \frac{3t - 7}{4}, \quad \text{con } t \geq 2.$$

(1) Nella seduta del 20 febbraio 1938.

È così dimostrato che *i soli tipi di sistemi lineari* (di ordine minimo), *che posseggono una cubica fondamentale con 10 punti base di cui almeno uno semplice, sono dati dalla serie (III) per* $p = 3, 4, \dots$

5. — Studiamo ora la superficie F_{2p-2} di S_p rappresentata dal sistema lineare

$$(III) \quad \Sigma \equiv C_{3p}(A_1^p, \dots, A_8^p, A_9^{p-1}, A_{10})$$

con $\Gamma_3(A_1, \dots, A_{10})$.

Alle curve $\Sigma_1 \equiv C_{3(p-1)}(A_1^{p-1}, \dots, A_8^{p-1}, A_9^{p-2}, B_1)$ corrispondono le sezioni iperpiane per un punto P , che risulta doppio per F . Infatti lo staccamento della Γ_3 abbassa di 1 il genere e di 2 il grado di Σ . Ora Σ_1 incontra Γ_3 in un ulteriore punto fisso B_1 ; perciò Γ_3 è fondamentale anche per Σ_1 (e per i successivi aggiunti) e alle curve

$$\Sigma_2 \equiv C_{3(p-2)}(A_1^{p-2}, \dots, A_8^{p-2}, A_9^{p-3}, B_2)$$

corrispondono le sezioni iperpiane per P e per un punto P_1 infinitamente vicino a P , che risulta doppio. Così si può proseguire fino a considerare il sistema $\Sigma_{p-3} \equiv C_9(A_1^3, \dots, A_8^3, A_9^2, B_{p-3})$ che è il sistema II di Noether. Σ_1 rappresenta una superficie F_{2p-4} di S_{p-1} che possiede un punto doppio Q e che si ottiene proiettando la F_{2p-2} da P in S_{p-1} ; Σ_2 rappresenta una superficie F_{2p-6} di S_{p-2} , proiezione di F_{2p-4} dal punto di doppio Q . Così con proiezioni successive si giunge alla F_4 di S_3 rappresentata ad Σ_{p-3} e che possiede come singolarità un punto doppio cui è infinitamente vicino un tacnodo. Da queste considerazioni si è indotti a ritenere che la F_{2p-2} possieda un *punto doppio* P al quale sono *successivi* $p-2$ *punti doppi* di cui *l'ultimo* è un *tacnodo* ⁽¹⁾.

Ma qui si presenta un *paradosso* perchè ciò è in contrasto col fatto che se una superficie possiede una serie di punti doppi infinitamente vicini l'ultimo dei quali è un tacnodo, avviene uno scaricamento per cui il tacnodo non può andare oltre il secondo punto della serie. Ho notato ciò in uno studio che sto facendo sui punti doppi delle superficie e mi limito a darne un rapido cenno.

La falda che ha origine in un punto doppio P si può rappresentare su un piano doppio e la singolarità che viene ad avere la curva di diramazione L è atta a definire P . È immediato che se P è un punto doppio conico della superficie gli corrisponde su L un nodo, se è biplanare una cuspidale, se è uniplanare un punto triplo e infine se P è un tacnodo L viene ad avere un punto quadruplo. Alla singolarità della superficie costituita da un punto

(1) Cfr., ad es., G. FANO, Osservazioni intorno al sistema aggiunto puro... « Rend. del Circ. Mat. di Palermo », to. XL, p. 29, 1915.

doppio che ha infinitamente vicino un tacnodo, corrisponde su L un punto doppio con infinitamente vicino uno quadruplo, ossia, per il principio di scaricamento ⁽¹⁾, due punti tripli infinitamente vicini.

Se sulla superficie si ha una serie di punti doppi di cui l'ultimo tacnodo, L possiede una serie di punti doppi o tripli infinitamente vicini chiusa da un punto quadruplo. Questo si scarica in guisa che o la serie viene a cominciare con un punto quadruplo oppure con due punti tripli infinitamente vicini. Ciò esprime che sulla superficie è avvenuto uno scaricamento per cui il tacnodo è rispettivamente il primo o il secondo punto delle serie.

L. Gussenhoven ⁽²⁾ ha pure rilevato questa proprietà, facendo uso di trasformazioni quadratiche.

La circostanza di questo scaricamento è in contrasto con quanto s'era prima detto circa la singolarità della nostra F_{2p-2} . La radice del paradosso sta nel fatto che *non si può esplorare con spazi lineari l'intorno del punto P* perchè la retta PP_1 appartiene alla superficie e quindi gli spazi lineari per PP_1 contengono una linea fissa.

Se invece si esplora l'intorno di P con quadriche di S_p per PP_1 e non contenenti la retta PP_1 si verifica immediatamente che P_1 è un tacnodo. Le Γ_{4p-4} intersezioni di queste quadriche con F_{2p-2} sono rappresentate sul piano da

$$C_{6(p-1)}(A_1^{2p-2}, \dots, A_8^{2p-2}, A_9^{2p-4})$$

e possiedono P e P_1 come punti doppi, essendo ⁽³⁾

$$(C_{3(p-1)}, C_{6(p-1)}) = 4p - 6 \quad (C_{3(p-2)}, C_{6(p-1)}) = 4p - 8.$$

Queste $C_{6(p-1)}$ segano su Γ_3 una g_2^1 e di conseguenza possiedono infinitamente vicino a P_1 un terzo punto doppio, fuori della retta PP_1 , che risponde alla coppia neutra delle intersezioni con Γ_3 . Così si ha vicino a P_1 una retta doppia infinitesima che risponde alle coppie della g_2^1 . Quindi la singolarità delle F_{2p-2} , rappresentate dai sistemi III, è costituita qualunque sia p da un punto doppio al quale è infinitamente vicino un tacnodo.

Ora si tratta di spiegare come possa avvenire che proiettando la F_{2p-2} da P in un S_{p-1} si riottienga una superficie dotata anch'essa di un punto doppio e di un tacnodo infinitamente vicini.

(1) ENRIQUES-CHISINI, *Teoria geometrica delle equazioni*, vol. II, L. IV, Cap. II, § 17.

(2) L. GUSSENHOVEN, *Sur les points doubles infiniment voisins d'une surface algébrique*. « Mathesis », T. XLIX, 1935, p. 288.

(3) Come è noto, col simbolo $(C_{3(p-1)}, C_{6(p-1)})$ si indica il numero delle intersezioni variabili delle due curve $C_{3(p-1)}, C_{6(p-1)}$.

6. — Possiamo limitarci a considerare la F_6 di S_4 della serie (III) e studiare come per proiezione dal suo punto doppio si ottenga la superficie II di Noether. Sia

$$\Sigma \equiv C_{12} (A_1^4, \dots, A_8^4, A_9^3, A_{10}) \quad \text{con} \quad \Gamma_3 (A_1, \dots, A_{10})$$

il sistema rappresentativo della F_6 . Alle curve

$$\Gamma_3 + \Sigma_1 \equiv \Gamma_3 + C_9 (A_1^3, \dots, A_8^3, A_9^2, B_1)$$

corrispondono le sezioni con gli S_3 per il punto doppio P di F_6 e a

$$\Gamma_3^2 + \Sigma_2 \equiv \Gamma_3^2 + C_6 (A_1^2, \dots, A_8^2, A_9, B_2)$$

(in cui B_1 e B_2 sono punti fissi di Γ_3), le sezioni di F_6 con gli $\infty^2 S_3$ per una retta a uscente da P. Poichè le C_6 sono immagini di curve del quinto ordine L_5 di F_6 , la retta a sta sulla superficie ed è rappresentata sul piano dal punto A_{10} ; essendo $(C_6, C_6) = 2$, le L_5 hanno in P la retta a come tangente di flesso e la F_6 possiede su a tre punti doppi successivi P, P_1 , P_2 (P_2 sta sulla retta doppia infinitesima dell'intorno di P_1). A

$$\Gamma_3^3 + \Sigma_3 \equiv \Gamma_3^3 + C_3 (A_1, \dots, A_8, B_3)$$

corrisponde un fascio di S_3 per un piano α tangente a F_6 lungo la retta a ; questi S_3 segano F_6 , fuori di a , in L_4 che hanno in P il piano α come piano iperosculatore. Infine l' \bar{S}_3 , rappresentato da Γ_3^4 oscula la F_6 , segandola nella retta a contata tre volte e nella L_3 rappresentata dal punto A_9 .

La corrispondenza fra Γ_3 e l'intorno di P è in certo modo due volte degenera, venendo a corrispondere ai punti generici di Γ_3 non già punti dell'intorno del primo ordine, ma punti dell'intorno del terzo ordine, che costituiscono l'intorno di un punto della retta doppia infinitesima.

Le sezioni di F_6 con gli ∞^7 con quadrici di S_4 che hanno il vertice in P e toccano F_6 lungo a , sono rappresentate da

$$\bar{C}_{12} (A_1^4, \dots, A_8^4, A_9^2);$$

questi con segano su F_6 , fuori di a , curve L_{10} di S_4 che hanno P e P_1 come punti doppi e un terzo punto doppio P_2 infinitamente vicino a P_1 sul piano α . Infatti è

$$(\bar{C}_{12}, \bar{C}_{12}) = 10, \quad (C_9, \bar{C}_{12}) = 8, \quad (C_6, \bar{C}_{12}) = 6, \quad C_3, \bar{C}_{12} = 4.$$

Le \bar{C}_{12} segano su Γ_3 una g_2^1 ; quindi un cono Q incontra F_6 , fuori di α , in due punti T_1 , T_2 , che stanno in \bar{S}_3 e sono vicini a P. Tutti i cono Q per T_1 hanno comune la generatrice P T_1 e il punto T_2 , che sta quindi su P T_2 .

Si ricordi ora ciò che si è detto nel § 1 sulle corde improprie.

La retta $P T_1 T_2$ è la posizione limite di una corda per due punti M_1, M_2 di F_6 quando M_1 e M_2 tendono ai punti infinitamente vicini di F_6 rappresentati dalla coppia della g_2^1 relativa al cono Q . Quindi $P T_1 T_2$ è una corda impropria di F_6 relativa alla retta doppia infinitesima dell'intorno di P_1 .

Di queste corde improprie passanti per P se ne ha un sistema ∞^1 , in corrispondenza alle coppie della g_2^1 .

Quando si proietta la F_6 da P in S_3 , al punto P viene a corrispondere la retta a' in tersezione di α con S_3 ; alla retta a (e quindi a P_1) il punto doppio P' della superficie proiezione F_4 e a \bar{S}_3 un piano α' tangente a F_4 lungo a' . La retta doppia infinitesima di F_6 (che sta su α) si proietta in un punto P'_1 , infinitamente vicino a P' su a' e il sistema di corde improprie del tipo di $P T_1 T_2$ genera nell'intorno di P'_1 una nuova retta doppia infinitesima sul piano α' .

Ciò segue immediatamente delle considerazioni fatte al principio di questo paragrafo e dall'osservare che le L_{10} si proiettano in L_8 di S_3 , con tre punti doppi infinitamente vicini nei punti P', P'_1 di a' e in un ulteriore punto di α' ; queste L_8 sono la intersezione completa di F_4 con le quadriche tangenti ad a' in P' .

Si conclude quindi che *nella proiezione da P il tacnodo di F_6 scompare e che se ne ricrea uno nuovo per la presenza di una serie di corde improprie della superficie uscenti da P e relative alla retta doppia infinitesima dell'intorno di P_1 .*

Matematica. — *Sui ds^2 binari con data curvatura totale.*
Nota di M. HAIMOVICI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Il prof. T. Levi-Civita ha fatto vedere in una Nota lineea ⁽²⁾, come si possa trovare una forma canonica isoterma dell'elemento lineare di una superficie la cui curvatura totale sia data in coordinate geodetiche. Essendo K la curvatura totale, l'integrale \sqrt{G} dell'equazione

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} + K\sqrt{G} = 0$$

che si annulla per $u = 0$ e la cui derivata è 1 per lo stesso valore di u dà l'elemento lineare geodetico col polo nel punto O ($u = 0$):

$$(2) \quad ds^2 = du^2 + G dv^2.$$

Per passare da questa forma del ds^2 a quella isoterma, bisogna integrare l'equazione

$$(3) \quad \sqrt{G} \frac{\partial \zeta}{\partial u} + i \frac{\partial \zeta}{\partial v} = 0$$

dove $\zeta = \xi + i\eta$, ξ, η essendo le coordinate isoterme. Se si fa la trasformazione

$$(4) \quad \zeta = ue^{iv} \quad \bar{\zeta} = ue^{-iv}$$

cioè se si prendono come coordinate le combinazioni

$$\zeta = x + iy, \quad \bar{\zeta} = x - iy$$

delle coordinate geodetico-cartesiane x, y , l'equazione (3) diventa

$$(5) \quad (2 + \zeta \bar{\zeta} \gamma) \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{\zeta}} + \zeta^2 \gamma \frac{\partial \zeta}{\partial \zeta} = 0$$

dove $\gamma = \frac{\sqrt{G} - u}{u^3}$ e la (5) possiede un integrale regolare in prossimità di $\bar{\zeta} = 0$.

Nella presente Nota, vogliamo far vedere come si possa ottenere la forma canonica isoterma partendo da una forma isoterma qualunque del ds^2 e poi fare alcune applicazioni delle considerazioni del Levi-Civita.

(1) Nella seduta del 20 marzo 1938.

(2) *Forme canoniche dei ds^2 binari con data curvatura totale.* « Rend. R. Acc. Lincei », vol. XXV, ser. 6^a, pp. 198-205, 1937.

1. Un integrale qualunque dell'equazione (3) o (5) dà una sostituzione $\zeta = \zeta(u, v)$, che trasforma l'elemento (2) in

$$(6) \quad ds^2 = \lambda d\zeta d\bar{\zeta} = \lambda (d\xi^2 + d\eta^2) \quad (\bar{\zeta} = \xi - i\eta).$$

Se imponiamo la condizione che per $\chi = \bar{\chi} = 0$, cioè nel polo, si abbia $\zeta = \bar{\zeta} = 0$, si trova dalla stessa equazione (5) che per $\chi = 0$ tutte le derivate di ζ rapporto a $\bar{\chi}$ sono nulle, cioè per $\chi = 0$ si ha $\zeta = 0$. In modo analogo si mostra che per $\bar{\chi} = 0$ si ha $\bar{\zeta} = 0$. Ciò che era da prevedere, poichè le linee $\chi = 0$, $\bar{\chi} = 0$, essendo (come ogni linea $\frac{\chi}{\bar{\chi}} = c^{te}$) geodetiche ed avendo direzioni isotrope nell'origine, sono linee di lunghezza nulla.

Nella Nota citata del Levi-Civita si trova calcolato anche il valore del coefficiente λ che interviene nella forma canonica isoterma del ds^2 :

$$(7) \quad \lambda = \frac{1}{\left(1 - \frac{\chi\bar{\chi}}{2 + \chi\bar{\chi}}\right)^2 \left|\frac{\partial\zeta}{\partial\chi}\right|^2}.$$

Da questa espressione di λ si vede che per $\chi = 0$, cioè $\zeta = 0$, si ha $\lambda = 1$. E lo stesso accade per $\bar{\chi} = \bar{\zeta} = 0$. Dunque la forma canonica isoterma col polo O ha questa proprietà (caratteristica) che si riduce a $ds^2 = d\zeta d\bar{\zeta} = d\xi^2 + d\eta^2$ sulle linee di lunghezza nulla che passano per O.

Dato un ds^2 isoterma (6), la trasformazione

$$\zeta = f(\zeta')$$

lo cambia in

$$ds^2 = \lambda \frac{df}{d\zeta'} \frac{d\bar{f}}{d\bar{\zeta}'} d\zeta' d\bar{\zeta}'$$

e perchè questa sua forma sia canonica col polo O (di cui possiamo supporre le coordinate $\zeta, \bar{\zeta}$, come pure le $\zeta', \bar{\zeta}'$, nulle senza diminuire la generalità) si deve avere

$$\lambda \frac{df}{d\zeta'} \frac{d\bar{f}}{d\bar{\zeta}'} = 1 \quad \text{per } \zeta' = 0 \text{ e per } \bar{\zeta}' = 0.$$

Dunque si ha

$$(8) \quad \frac{df}{d\zeta'} = \frac{1}{\lambda_{\bar{\zeta}=0} \left(\frac{d\bar{f}}{d\bar{\zeta}'}\right)_0}; \quad \frac{d\bar{f}}{d\bar{\zeta}'} = \frac{1}{\lambda_{\zeta=0} \left(\frac{df}{d\zeta'}\right)_0},$$

con

$$(9) \quad \lambda_{\zeta=\bar{\zeta}=0} \left(\frac{df}{d\zeta'}\right)_0 \left(\frac{d\bar{f}}{d\bar{\zeta}'}\right)_0 = 1;$$

cioè il ds^2 diventa

$$(10) \quad ds^2 = \frac{\lambda_{\zeta=\bar{\zeta}=0} \cdot \lambda}{\lambda_{\zeta=0} \cdot \lambda_{\bar{\zeta}=0}} d\zeta' d\bar{\zeta}'.$$

L'equazione (8) determina f con la condizione iniziale $f(0) = 0$. Dall'equazione (9) risulta determinato soltanto il modulo di $\frac{df}{d\zeta'}$ nell'origine. Vuol dire che la trasformazione $\zeta = f(\zeta')$ è determinata a meno di una rotazione per O .

2. Supponiamo che la curvatura K in coordinate geodetiche sia una funzione solo di u . Allora l'equazione (1), con le condizioni iniziali delle quali abbiamo parlato, determina \sqrt{G} quale funzione di u . L'equazione (3) ci dice che ζ sarà una funzione di $\log u - \int_0^u \frac{u \gamma du}{1 + u^2 \gamma} + iv$, o meglio di

$$ue^{iv} e^{-\int_0^u \frac{u \gamma du}{1 + u^2 \gamma}}.$$

Se adesso facciamo la sostituzione (4), ζ risulta funzione di

$$(12) \quad ze^{\int_0^{\sqrt{\zeta\bar{\zeta}}} \frac{\gamma d(\sqrt{\zeta\bar{\zeta}})}{1 + \zeta\bar{\zeta}\gamma}}$$

e si vede che proprio (12) soddisfa anche alla condizione che per $\bar{\zeta} = 0$ si riduca a z . Una volta trovato ζ , non resta che a calcolare λ dalla formula (7). Si trova così la forma canonica isoterma del ds^2 di una superficie di rotazione col polo nel punto di concorso dei meridiani (supposto regolare).

Se ora vogliamo scrivere la forma canonica dell'elemento lineare di una tale superficie col polo in un punto qualunque O , conviene meglio partire dalla forma $ds^2 = \lambda(d\xi^2 + d\eta^2)$ oppure $ds^2 = \lambda d\zeta d\bar{\zeta}$, dove λ è una funzione di $\zeta + \bar{\zeta}$. Supponiamo di aver fatto una conveniente trasformazione del tipo $\zeta = \xi' + k$, in modo che il punto O abbia le coordinate nulle. La forma canonica dell'elemento lineare sarà, secondo (10):

$$ds^2 = \frac{\lambda(0) \lambda}{\lambda(\zeta) \lambda(\bar{\zeta})} d\zeta' d\bar{\zeta}'$$

dove ζ è una funzione di ζ' data dall'equazione

$$\frac{d\zeta}{d\zeta'} = \frac{\lambda(0) \left(\frac{d\zeta}{d\zeta'} \right)_0}{\lambda(\zeta)}$$

con la condizione iniziale $\zeta(0) = 0$.

3. Un caso in cui si possa trovare per quadrature la forma canonica isoterma partendo dalla curvatura totale K data in coordinate geodetiche, è quello in cui

$$K = - \frac{n(n-1) u^{n-3} V}{1 + u^{n-1} V}$$

dove V è una funzione di v , di periodo 2π , regolare e tale che per una direzione isotropa, il limite di $\bar{\chi}^{n-1} \bar{\chi}^{n-1} V$ sia finito.

Dalla (1) risulta $\sqrt{G} = u + u^n V$, cioè $\gamma = u^{n-3} V$. L'equazione (3) dà ζ quale funzione di

$$\frac{1}{u^{n-1}} e^{-(n-1)iv} - (n-1)i \int e^{-(n-1)iv} V dv$$

e se facciamo la trasformazione (4), ζ risulta una funzione di

$$\frac{1}{\bar{\chi}^{n-1}} - P\left(\frac{\bar{\chi}}{\chi}\right)$$

dove abbiamo posto

$$P\left(\frac{\bar{\chi}}{\chi}\right) = \frac{(n-1)}{2} \int \left(\frac{\bar{\chi}}{\chi}\right)^{\frac{n-3}{2}} V d\left(\frac{\bar{\chi}}{\chi}\right).$$

La funzione

$$\zeta = \frac{\bar{\chi}}{\sqrt{1 - \bar{\chi}^{n-1} (P - P_0)}}$$

soddisfa anche alla condizione al limite, cioè si riduce a χ per $\bar{\chi} = 0$.

4. Consideriamo adesso il problema di determinare l'elemento lineare di una superficie la cui curvatura in coordinate geodetiche sia

$$K = \mu (a \cos v + b \sin v) + c.$$

Con una conveniente rotazione attorno l'origine ($u = 0$) possiamo dare a K la forma

$$K = pu \cos v + c;$$

\sqrt{G} sarà determinato dall'equazione

$$(13) \quad \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} + (pu \cos v + c) \sqrt{G} = 0.$$

È un'equazione del tipo di Laplace, il cui integrale (colle condizioni iniziali richieste dal problema) è ⁽¹⁾

$$\sqrt{G} = A_0 I_0(x) + A_1 I_1(x) + A_2 I_2(x)$$

(1) Ved. A. R. FORSYTH, *A treatise on differential equations*. London, 1903 (terza edizione), pp. 250-256.

dove abbiamo posto

$$I_{\alpha}(x) = \omega^{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^3}{3} + \omega^{\alpha} t x} dt \quad ; \quad x = -\frac{pu \cos v + b}{\sqrt[3]{p^2 \cos^2 v}} \quad ; \quad \alpha = 0, 1, 2,$$

ω^{α} essendo le radici cubiche dell'unità e le costanti A_0, A_1, A_2 essendo date dalle equazioni

$$A_0 + A_1 + A_2 = 0$$

$$A_0 I_0 \left(-\frac{c}{\sqrt[3]{p^2 \cos^2 v}} \right) + A_1 I_1 \left(-\frac{c}{\sqrt[3]{p^2 \cos^2 v}} \right) + A_2 I_2 \left(-\frac{c}{\sqrt[3]{p^2 \cos^2 v}} \right) = 0$$

$$A_0 I'_0 \left(-\frac{c}{\sqrt[3]{p^2 \cos^2 v}} \right) + A_1 I'_1 \left(-\frac{c}{\sqrt[3]{p^2 \cos^2 v}} \right) + A_2 I'_2 \left(-\frac{c}{\sqrt[3]{p^2 \cos^2 v}} \right) = 0,$$

dove

$$I'_{\alpha}(x) = \omega^{2\alpha} \int_0^{\infty} t e^{-\frac{t^3}{3} + \omega^{\alpha} t x} dt.$$

Il problema di passare dalla forma canonica geodetica a quella isoterma dà luogo ad un'equazione differenziale di cui non ci è riuscito di dare una soluzione in forma espressiva.

Se $c = 0$, utilizzando l'integrale di (13) sotto forma di serie:

$$\sqrt{G} = u + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1) \frac{(-p \cos v)^n}{(3n+1)!} u^{3n+1}.$$

si riesce a trovare ζ , con calcoli non troppo complicati, quale serie di $\alpha, \bar{\alpha}$, Noi non ci attarderemo su questo argomento.

Matematica. — *Sopra alcune questioni relative alle curve piane e sghembe.* Nota di F. SBRANA, presentata ⁽¹⁾ dal Socio G. FUBINI.

1. Mi propongo di esporre con ciò che segue alcune semplici considerazioni sulle curve piane e sghembe, ispiratemi dalla lettura degli elementi della geometria differenziale affine. Si tratta sostanzialmente di due questioni distinte, che mi sembrano nuove. In primo luogo, data una curva qualsiasi C , piana o sghemba, considero un suo punto P_0 , ed una corda $P_1 P_2$ parallela ad un qualsiasi piano fisso π tangente in P_0 a C . Se $P_0 P$ è il segmento condotto da P_0 perpendicolarmente alla corda, e si fa tendere questa a coincidere con la tangente in P_0 , il rapporto tra il quadrato della metà della corda e il doppio del segmento $P_0 P$ tende al raggio di prima curvatura della curva C in P_0 .

In secondo luogo, sempre riferendomi ad una curva qualsiasi C , scelgo ancora ad arbitrio un piano π tangente a C nel generico punto P_0 , e considero la retta che congiunge P_0 con un punto M appartenente alla corda $P_1 P_2$ parallela al piano π , e che divida la corda stessa secondo un rapporto costante q . Quando si fa tendere la corda a coincidere con la tangente in P_0 , la retta $P_0 M$ tende pure alla tangente, se $q \neq 1$, mentre per $q = 1$ tende in generale ad una posizione limite ρ , situata sul piano osculatore, e dipendente dalla giacitura di π . Se in particolare π coincide col piano osculatore in P_0 , la ρ si identifica con la tangente; se π contiene la binormale, la retta ρ occupa una posizione, che coincide con la *normale affine*, nel caso in cui la curva C sia piana, nell'intorno di P_0 . Infine la retta ρ si identifica con la retta definita come *normale principale affine per le curve sghembe* ⁽²⁾, se si sceglie opportunamente il piano π .

2. Introduciamo un sistema di assi cartesiani ortogonali x, y, z col piano xz coincidente col generico piano π tangente in P_0 alla curva C , e l'asse x coincidente con la tangente. Nell'intorno di P_0 la curva C sarà rappresentabile mediante equazioni del tipo

$$y = \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots, \quad z = \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \dots,$$

(1) Nella seduta del 20 marzo 1938.

(2) Cfr. W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, II, p. 72 e segg. Berlino, 1923. È noto che la normale principale affine definita per una curva sghemba non si identifica affatto, quando si deforma la curva in modo da renderla piana, con la normale affine definita nel piano.

(con le $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \beta_2, \beta_3, \dots$ costanti). Se la flessione in C è diversa da zero, come appunto vogliamo ammettere, si potrà porre $y = \lambda t^2$, e scegliere il parametro t in modo che valga la rappresentazione seguente:

$$(1) \quad \begin{cases} x = t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots, \\ y = \lambda t^2 \\ \chi = b_2 t^2 + b_3 t^3 + \dots (1). \end{cases}$$

Notiamo subito che le costanti λ e b_2 si esprimono agevolmente per mezzo delle flessioni in P_0 delle due linee che si ottengono proiettando la C rispettivamente sul piano xy e sul piano $x\chi$. Per dimostrarlo, osserviamo intanto che se P è il punto generico di C, di coordinate x, y, χ , dalle (1) segue

$$(2) \quad \left(\frac{d^2 P}{dt^2} \right)_0 = \left(\frac{d^2 P}{ds^2} \right)_0 + 2a_2 \left(\frac{dP}{ds} \right)_0^{(2)},$$

dove s è la lunghezza dell'arco della curva C, contata a partire da una origine prefissata su C, mentre le grandezze che portano l'indice zero s'intendono calcolate in P_0 .

Dalla (2), quadrando, e tenendo presente la prima formula di Frénet,

$$(3) \quad \frac{d^2 P}{ds^2} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} = c\mathbf{n},$$

(in cui \mathbf{T} ed \mathbf{n} indicano rispettivamente i versori della tangente e della normale principale, c la flessione), si ottiene

$$\left(\frac{d^2 P}{dt^2} \right)_0^2 = \left(\frac{d^2 P}{ds^2} \right)_0^2 + 4a_2^2,$$

cioè infine

$$(4) \quad 4(b_2^2 + \lambda^2) = c_0^2.$$

Sia ora θ l'angolo che l'asse y forma con \mathbf{n} . Dalle (2), (3) segue

$$(5) \quad \mathbf{n}_0 = \frac{1}{c_0} \left\{ \left(\frac{d^2 P}{dt^2} \right) - 2a_2 \left(\frac{dP}{ds} \right) \right\},$$

e proiettando prima sull'asse y , poi sull'asse χ ,

$$(6) \quad \cos \theta = \frac{2\lambda}{c_0}, \quad \sin \theta = \frac{2b_2}{c_0}.$$

(1) L'introduzione, molto opportuna, di questo parametro t , mi è stata gentilmente suggerita dall'illustre collega Fubini. Essa mi ha consentito di evitare dei calcoli alquanto laboriosi, con cui ero dapprima pervenuto ai risultati indicati al n. 1.

$$(2) \text{ È infatti } \left(\frac{ds}{dt} \right)_0 = 1, \quad \left(\frac{d^2 s}{dt^2} \right)_0 = 2a_2.$$

D'altra parte è chiaro che $c_0 \cos \theta$ e $c_0 \sin \theta$ sono le curvatures delle proiezioni della curva C sui piani xy ed xz rispettivamente. Per mezzo di tali curvatures si esprimono dunque λ e b_2 , c. v. d.

3. Ciò premesso, se $y = \text{costante}$ è l'equazione di un piano, sufficientemente prossimo a P_0 , esso interseca C in due punti, P_1 e P_2 , di coordinate

$$(7) \quad \begin{cases} x_1 = t + a_3 t^3 + \dots + a_2 t^2 + a_4 t^4 + \dots, & y_1 = \lambda t^2, \\ z_1 = b_2 t^2 + b_4 t^4 + \dots + b_3 t^3 + b_5 t^5 + \dots, \\ x_2 = -(t + a_3 t^3 + \dots) + a_2 t^2 + a_4 t^4 + \dots, & y_2 = \lambda t^2, \\ z_2 = b_2 t^2 + b_4 t^4 + \dots - (b_3 t^3 + b_5 t^5 + \dots). \end{cases}$$

Sia P un punto della corda $P_1 P_2$, che divida questa nel rapporto $q = \frac{k}{1-k}$. Le coordinate di P saranno

$$(8) \quad \begin{aligned} \xi &= (2k-1)(t + a_3 t^3 + \dots) + a_2 t^2 + a_4 t^4 + \dots, & \eta &= \lambda t^2, \\ \zeta &= b_2 t^2 + b_4 t^4 + \dots + (2k-1)(b_3 t^3 + b_5 t^5 + \dots); \end{aligned}$$

e se la retta $P_0 P$ è normale a $P_1 P_2$, si dovrà determinare k in modo che risulti

$$\xi(x_1 - x_2) + \zeta(z_1 - z_2) = 0.$$

Questa condizione, a causa delle (7), (8), fornisce

$$\begin{aligned} &[(2k-1)(1 + a_3 t^2 + \dots) + a_2 t + a_4 t^3 + \dots](1 + a_3 t^2 + \dots) + \\ &+ [b_2 t + b_4 t^3 + \dots + (2k-1)(b_3 t^2 + b_5 t^4 + \dots)](b_3 t^2 + \dots) = 0, \end{aligned}$$

e quindi

$$(9) \quad 2k-1 = -t \frac{(a_2 + \dots)(1 + a_3 t^2 + \dots) + (b_2 + \dots)(b_3 t^2 + \dots)}{(1 + a_3 t^2 + \dots)^2 + (b_3 t^2 + \dots)^2}.$$

Poniamo per brevità

$$(10) \quad 2k-1 = t f(t);$$

si avrà

$$\xi = t^2 \{ (1 + a_3 t^2 + \dots) f(t) + a_2 + a_4 t^2 + \dots \}, \quad \eta = \lambda t^2,$$

$$\zeta = t^2 \{ b_2 + b_4 t^2 + \dots + (b_3 t^2 + \dots) f(t) \},$$

e quindi

$$\begin{aligned} (P_0 P)^2 &= \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = t^4 \{ [(1 + a_3 t^2 + \dots) f(t) + a_2 + \dots]^2 + \lambda^2 + \\ &+ [b_2 + \dots + (b_3 t^2 + \dots) f(t)]^2 \}. \end{aligned}$$

Poichè dalle (9), (10) discende che $f(0) = -a_2$, si trova così, tenendo presente la (4),

$$(11) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(P_0 P)^2}{t^4} = \lambda^2 + b_2^2 = \frac{c_0^2}{4}.$$

D'altra parte risulta

$$\begin{aligned} (P_1 P_2)^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = \\ &= 4t^2 \{ [1 + a_3 t^2 + \dots]^2 + [b_3 t^2 + \dots]^2 \}, \end{aligned}$$

e perciò

$$(12) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{P_1 P_2}{2t} \right)^2 = 1.$$

Dalle (11), (12) si trae

$$(13) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 |P_0 P|}{\left[\frac{1}{2} (P_1 P_2) \right]^2} = |c_0|,$$

(dove $|c_0|$ è il valore assoluto di c_0 , $|P_0 P|$ la lunghezza del segmento $P_0 P$). La (13) esprime il primo dei risultati indicati nel n. 1.

4. Sia ora M il punto della corda $P_1 P_2$ che divide questa in un rapporto prefissato e costante $\frac{k}{1-k}$. Le coordinate di M saranno ancora date dalle (8); e la retta $P_0 M$ avrà coseni direttori proporzionali a

$$\begin{aligned} (2k-1)(1 + a_3 t^2 + \dots) + a_2 t + a_4 t^3 + \dots, \quad \lambda t, \\ b_2 t + b_4 t^3 + \dots + (2k-1)(b_3 t^2 + b_5 t^4 + \dots); \end{aligned}$$

perciò è chiaro che se $k \neq \frac{1}{2}$ essa tende per $t \rightarrow 0$ a coincidere con la tangente in P_0 (1).

Se invece è $k = \frac{1}{2}$, e cioè M si trova nel punto medio della corda $P_1 P_2$, la retta $P_0 M$ tende per $t \rightarrow 0$ ad una retta ρ , i cui coseni direttori sono proporzionali ad a_2, λ, b_2 . D'altra parte segue dalle equazioni parametriche (1) che il vettore $\left(\frac{d^2 P}{dt^2} \right)_0$ ha per componenti $2a_2, 2\lambda, 2b_2$; per conseguenza la retta ρ ha la stessa direzione di questo settore, ed è quindi, a causa della (2), sul piano osculatore alla curva in P_0 .

(1) Per le curve piane questa osservazione è fatta da G. HUMBERT, nel suo *Cours d'analyse*, p. 66, Paris, 1903.

5. Notiamo ancora che dall'identità

$$\frac{d^3 P}{dt^3} = \frac{d^3 P}{ds^3} \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 + 3 \frac{d^2 P}{ds^2} \frac{ds}{dt} \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{dP}{ds} \frac{d^3 s}{dt^3},$$

ove si ponga $t = 0$, proiettando i due membri sull'asse y risulta

$$(14) \quad \left(\frac{d^3 P}{ds^3} \right)_{o,y} + 3 \left(\frac{d^2 P}{ds^2} \right)_{o,y} \cdot 2 a_2 = 0,$$

avendo apposto l'indice y alle proiezioni ortogonali sull'asse y delle grandezze segnate in parentesi. Ora dalle (1), (2) segue

$$(15) \quad \left(\frac{d^2 P}{ds^2} \right)_{o,y} = \left(\frac{d^2 P}{dt^2} \right)_{o,y} = 2\lambda,$$

per cui la (14) fornisce

$$2 a_2 = - \frac{1}{6\lambda} \left(\frac{d^3 P}{ds^3} \right)_{o,y}.$$

Sostituendo nella (2) si trova che la direzione della retta ρ si identifica con quella del vettore

$$(16) \quad \mathbf{v} = \frac{1}{6\lambda} \left(\frac{d^2 P}{dt^2} \right)_o = 3 \left(\frac{d^2 P}{ds^2} \right)_{o,y} \left(\frac{d^2 P}{ds^2} \right)_o - \left(\frac{d^3 P}{ds^3} \right)_{o,y} \left(\frac{dP}{ds} \right)_o^{(1)}.$$

Sopprimendo ora per semplicità l'indice $zero$, ricordiamo che

$$(17) \quad \frac{d^3 P}{ds^3} = \frac{dc}{ds} \mathbf{n} - c (c \mathbf{T} + \tau \mathbf{b}),$$

(dove τ è la torsione, e \mathbf{b} il versore della binormale)⁽²⁾. Dalla 1^a formula di Frénet, e dalla (17), si trae

$$\left(\frac{d^2 P}{ds^2} \right)_y = c \cdot \cos \theta, \quad \left(\frac{d^3 P}{ds^3} \right)_y = \frac{dc}{ds} \cos \theta - c \tau \sin \theta.$$

Risulta così che la direzione della retta ρ è determinata dal vettore

$$(18) \quad \mathbf{v} = 3c \frac{d^2 P}{ds^2} \cos \theta - \left(\frac{dc}{ds} \cos \theta - c \tau \sin \theta \right) \frac{dP}{ds},$$

(1) Si è tenuto presente la (15) secondo la quale è $2\lambda = \left(\frac{d^2 P}{ds^2} \right)_{o,y}$.

(2) Basta aver presenti le due formule di Frénet:

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = c \mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -c \mathbf{T} - \tau \mathbf{b}.$$

dove θ è l'angolo, introdotto nel n. 2, formato dall'asse y , normale al piano π , con la normale principale.

6. Dalla (18) segue in particolare che per $\theta = 90^\circ$ [cioè se la corda $P_1 P_2$ considerata nel n. 3 si mantiene parallela al piano osculatore], la retta limite ρ coincide con la tangente alla curva in P . Per $\theta \neq 90^\circ$, poniamo

$$3c \cos \theta = fg, \quad c\tau \sin \theta - \frac{dc}{d\theta} \cos \theta = f \frac{dg}{ds},$$

e quindi

$$(19) \quad g = \alpha R^{\frac{1}{3}}, \quad \text{con } \alpha = h e^{\frac{1}{3} \int_0^s \tau \operatorname{tg} \theta ds}, \quad R = \frac{1}{|c|},$$

ed h costante arbitraria. Sostituendo nella (18) si trova che la retta ρ ha la direzione del vettore $\frac{d^2 P}{d\sigma^2}$, ove la variabile σ sia definita (a meno di una costante) dalla relazione

$$(20) \quad \frac{ds}{d\sigma} = \alpha R^{\frac{1}{3}},$$

Per $\tau = 0$, tale direzione si identifica con la *normale affine* alla curva in P ⁽¹⁾. Per $\tau \neq 0$, volendo che ρ coincida con la *normale principale affine* definita per le curve sghembe⁽²⁾, basterà assumere $\alpha = |\tau|^{-\frac{1}{6}}$. Dalla (19) segue poi che in questo caso è $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \frac{1}{\tau}$.

(1) Per la definizione della *normale affine* ad una curva piana, cfr. W. BLASCHKE, op. cit., p. 12 e segg. Secondo Blaschke tale normale affine è determinata dalla direzione del vettore $\frac{d^2 P}{d\sigma^2}$, essendo σ l'arco affine, definito (a meno di una costante) dalla relazione

$$\left(\frac{d\sigma}{ds} \right)^3 = \left| \frac{dP}{ds} \wedge \frac{d^2 P}{ds^2} \right|;$$

ma se si osserva che il 2° membro non è altro che $|c|$, si è ricondotti senz'altro alla (20), con $\alpha = 1$.

(2) Per la definizione di *normale principale affine* a una curva sghemba, cfr. W. BLASCHKE, op. cit., p. 72 e segg. La normale in questione ha la direzione del vettore $\frac{d^2 P}{d\sigma^2}$, σ essendo l'arco affine, definito (a meno di una costante) dalla relazione

$$\left(\frac{d\sigma}{ds} \right)^6 = \left| \frac{dP}{ds} \wedge \frac{d^2 P}{ds^2} \times \frac{d^3 P}{ds^3} \right|;$$

ma se si osserva che il 2° membro è uguale a $|\tau| \frac{1}{R^2}$, ci troviamo ricondotti alla (20),

con $\alpha = |\tau|^{-\frac{1}{6}}$.

Fisica. — *Sul funzionamento di un tubo a protoni.* Nota di T. FRANZINI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. L. TIERI.

La possibilità di ottenere correnti protoniche dal Pd idrogenato, già messa da me in evidenza ⁽²⁾, è stata ripresa in un mio più recente lavoro ⁽³⁾ mediante il dispositivo indicato nella fig. 1 qui riportata. Con esso ho constatato la possibilità di ottenere correnti protoniche di una certa intensità in funzione della temperatura del tubetto e con campi acceleratori sino a 550 volt. Nel presente lavoro sono esposti gli studi preliminari fatti per

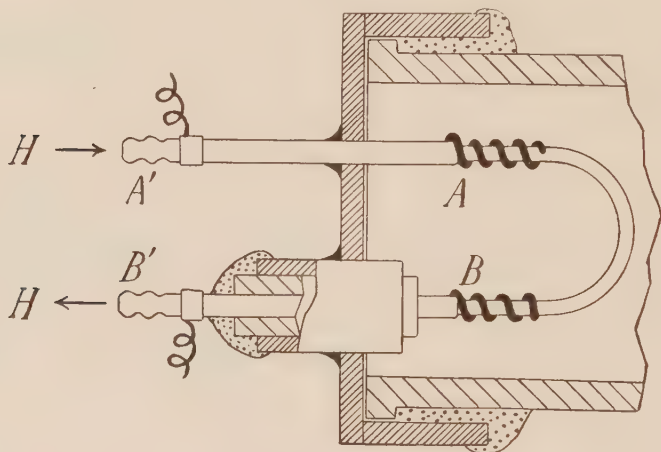


Fig. 1.

realizzare una corrente di protoni veloci, analoga a quella ottenuta da Hulubei ⁽⁴⁾, mediante un dispositivo che indicherò come « diodo protonico ». Ad esso ho dato la forma indicata schematicamente in sezione longitudinale nella fig. 2, la cui parte di sinistra è ancora eguale a quella riportata più in grande nella fig. 1. In questa il tubetto di Pd A-B è saldato ad argento a due tubetti di rame A-A', B-B' di sezione metallica notevolmente maggiore, tali da sopportare il passaggio di correnti sino ad una trentina

(1) Nella seduta del 20 marzo 1938.

(2) T. FRANZINI, « Rend. Lincei », vol. XIX, p. 584, 1934.

(3) T. FRANZINI, « Nuovo Cimento », 1938 (in corso di stampa).

(4) H. HULUBEI, « C. R. », 199, p. 199, 1934. In una recente pubblicazione R. G. STANSFIELD (« Proc. Cambridge Phil. Soc. », 34, 120, 1938) crede di negare la possibilità di una emissione spontanea di protoni dal Pd idrogenato, quale almeno è stata ottenuta da Hulubei.

di ampère senza riscaldamento sensibile. Uno di tali tubi, A-A', è fissato a massa ad un coperchio di ottone. L'altro, B-B', è fissato allo stesso coperchio ma convenientemente isolato. Una spirulina di rame avvolta sul tubetto, lascia liberi solamente 35 mm. centrali di esso che son quelli che vengono quindi praticamente riscaldati. Nell'interno del tubetto è fatto circolare un lento flusso di idrogeno, proveniente da un voltmetro e opportunamente essiccato. Il coperchio di ottone portante il tubetto è masticiato ad un robusto tubo di vetro di circa 45 mm. di diametro interno, la cui estremità opposta è fissata (fig. 2) ad una camera completamente metallica munita di una larga apertura circolare alla quale è applicato uno schermo fluorescente del diametro di circa 5 cm. difeso dalla pressione esterna da una robusta lastra di vetro masticiata sul metallo. Il tutto è congiunto mediante un largo tubo flessibile di tombac al complesso di pompe per il vuoto.

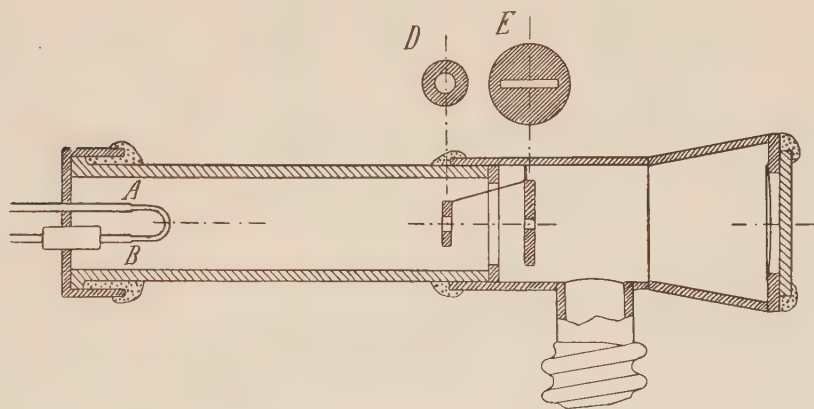


Fig. 2.

Il riscaldamento del tubetto è ottenuto con la corrente di un trasformatore con secondario isolato verso terra a 50.000 volt. È quindi possibile portare detto tubetto ad un potenziale positivo (che nelle mie esperienze è stato fornito sino a 25.000 volt da un elevatore con valvole raddrizzatrici di Kipp e Zonen) rispetto all'altra estremità del tubo posta a terra.

L'antianodo è costituito da un dischetto di alluminio D, disegnato nella fig. 2 in sezione trasversale, dietro al quale è posto un secondo disco munito di apertura rettangolare di mm. 3×20 .

Il diodo protonico fu sperimentato in funzione delle seguenti variabili indipendenti:

1° Corrente di riscaldamento del tubetto da 10 a 25 ampère, alla quale corrispondono temperature della parte centrale di esso da 300° a 1200° C.

2° Pressione dell'idrogeno nell'interno del tubetto da 0 a 780 mm. di Hg.

3° Distanza fra gli elettrodi da 5 a 250 mm.

4° Tensione applicata da 10 a 25 Kv.

5° Pressione attorno al tubetto da 10^{-3} a 10^{-7} mm. di Hg.

In dipendenza a queste variabili le caratteristiche di funzionamento variano come è indicato più avanti. Però entro limiti abbastanza estesi di esse, durante il funzionamento si hanno alcune caratteristiche comuni.

L'interno del tubo appare di regola oscuro ad eccezione delle pareti di vetro le quali presentano la nota fluorescenza verde dovuta ad urti elettronici, ma sempre piuttosto debole. Che tale fluorescenza sia dovuta a raggi elettronici partenti dalla parte più negativa del tubo, appare in modo indubbio anche dal gioco di luce ed ombre di essa. Attraverso il foro centrale dell'antianodo D appare pure un debole e sottile pennello di luce violacea che analizzata spettroscopicamente presenta le sole righe dell'idrogeno. Sullo schermo fluorescente posto in fondo al tubo appare inoltre una macchia luminosa: Che questa sia dovuta all'urto di un fascetto di raggi protonici è confermato dal senso del suo spostamento mediante un campo magnetico applicato fra l'antianodo D e lo schermo stesso.

Da questi dati sembra quindi confermata l'ipotesi di una emissione abbastanza intensa di protoni da parte del palladio caldo. L'emissione di elettroni da parte dell'antianodo (ed in generale da parte dell'estremo a terra del diodo) non sarebbe che un fenomeno secondario dovuto all'urto dei protoni⁽¹⁾. Questi elettroni neutralizzano una parte dei protoni in arrivo causando la predetta emissione delle righe dell'idrogeno.

L'applicazione di un campo magnetico poco esteso tra il tubetto e l'antianodo D ha effetti diversi a seconda della sua posizione. Vicino all'antianodo, tale campo fa diminuire di poco la corrente che attraversa il diodo mentre si nota un sensibile spostamento, dissimetrico rispetto al tubo di vetro, della fluorescenza di esso e nello stesso senso dello spostamento della macchia luminosa sullo schermo di fondo. Più vicino al tubetto il campo magnetico ha effetti più sensibili sulle caratteristiche elettriche del diodo diminuendo fortemente la corrente che lo attraversa. Inoltre in questo caso la fluorescenza del vetro diminuisce fortemente ma si mantiene abbastanza simmetrica rispetto alle pareti di vetro. Tale influenza del campo magnetico sulle caratteristiche del diodo è a favore dell'ipotesi della secondarietà dell'emissione elettronica.

Nella fig. 3 sono indicate alcune caratteristiche relative al diodo per una distanza degli elettrodi di cm. 20 e per una pressione di una atmosfera dell'H nell'interno del tubetto.

Data la corrente totale che attraversa il diodo (e che in alcuni casi può raggiungere qualche milliampère) restava da determinare la ripartizione di essa tra la corrente protonica e quella elettronica.

(1) M. HEALEA, E. L. CHAFFEE, «Phys. Rev.», 49, 636, 1936.

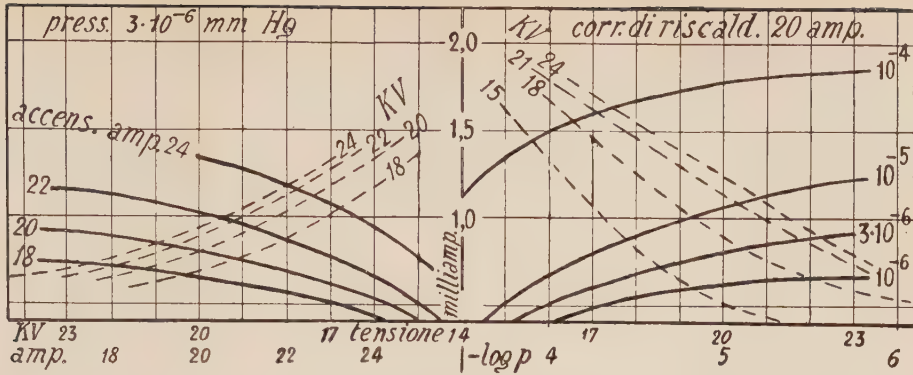


Fig. 3. — 1°) Curve continue a sinistra: Corrente nel diodo in funzione della tensione applicata, per correnti di riscaldamento di amp. 18, 20, 22, 24 e pressioni di $3 \cdot 10^{-6}$ mm. Hg.

2°) Curve continue a destra: Correnti nel diodo in funzione della tensione per pressioni di 10^{-4} , 10^{-5} , $3 \cdot 10^{-6}$, 10^{-6} mm. di Hg. e corrente di riscaldamento di 20 amp.

3°) Curve tratteggiate a sinistra: Corrente nel diodo in funzione della corrente di riscaldamento per tensioni di KV 18, 20, 22, 24 e pressione di $3 \cdot 10^{-6}$ mm. di Hg.

4°) Curve tratteggiate a destra: Corrente nel diodo in funzione della pressione per tensioni di KV 15, 18, 22, 24 e corrente di riscaldamento di 20 amp.

A tale scopo ho sostituito il secondo disco con una placchetta calorimetrica costituita da un sottile foglio di alluminio (fig. 4), da una sottile pinza Ni-Cu e da un sistema di riscaldamento in filo di tungsteno per la ripetuta taratura di essa nelle diverse condizioni di impiego. L'insieme ha le dimensioni di mm. $13 \times 12 \times 0.5$. Tale placchetta calorimetrica è accu-

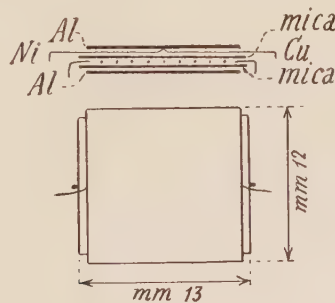


Fig. 4.

ratamente isolata dalla rimanente massa metallica in modo da poter misurare separatamente la corrente (protonica ed elettronica complessiva) che passa per essa, a mezzo di un conveniente strumento di misura, e l'energia dei protoni incidenti a mezzo del suo riscaldamento. Data la non trascurabile inerzia termica della placchetta, le misure furono sempre eseguite in condizioni di funzionamento a regime stabile del diodo.

Nella seguente tabella sono indicati alcuni dati relativi al funzionamento di esso, per una pressione d'idrogeno nell'interno del tubetto di circa una atmosfera e per una distanza degli elettrodi di cm. 20.

Pressione P	corrente di accensione I	tensione v	corrente nel diodo i	corrente sulla placca calorimetr. i'	potenza w' = vi'	potenza $w'' = \frac{\text{cal.} \times 4.18}{\text{sec}}$	corrente protonica $i'' = \frac{w''}{v}$
1	2	3	4	5	6	7	8
mm. di Hg	ampère	KV	milliamp.	milliamp.	Watt	Watt	milliamp.
10 ⁻⁴	20	14	1.15	0.58	8.1	2.1	0.150
	20	18	1.65	0.89	16.0	5.6	0.310
10 ⁻⁵	20	15	0.5	0.27	4.0	1.8	0.120
	20	22	1.2	0.68	15.0	7.0	0.320
3 · 10 ⁻⁶	18	16	0.45	0.22	3.5	1.7	0.106
	18	22	0.7	0.37	8.1	4.0	0.182
	20	16	0.5	0.26	4.2	2.0	0.125
	20	22	0.9	0.47	10.4	5.0	0.230
	22	16	0.65	0.34	5.4	2.5	0.156
	22	22	1.15	0.60	3.2	5.4	0.240
10 ⁻⁶	20	16	0.4	0.22	3.5	1.8	0.112
	20	24	0.65	0.39	9.4	4.9	0.205
	22	16	0.5	0.29	4.6	2.2	0.138
	22	24	0.7	0.41	9.8	4.8	0.200

I valori di w' della colonna 6 danno la potenza della corrente che passa attraverso la placca calorimetrica dedotta dal prodotto della tensione per la frazione della corrente totale che attraversa il diodo derivata su detta placca. Nella seguente colonna 7 è invece indicata la potenza del flusso protonico che colpisce la placca calorimetrica dedotta dal riscaldamento di questa.

Come si vede dal confronto delle due colonne, w'' è sempre più piccolo di w' sebbene in proporzione diversa. Questo si potrebbe spiegare con le due ipotesi seguenti:

1° La corrente che attraversa il circuito della placca è in parte elettronica.

2° I protoni hanno una energia minore di quella calcolabile in base alla d. d. p. applicata, in quanto invece di provenire dal tubetto di Pd sono dovuti ad ionizzazione, per urto elettronico, di atomi di H lungo il tubo e quindi hanno subito l'accelerazione di una sola parte del campo applicato.

È probabile che entrambi le cause influiscano su qualcuno dei risultati ottenuti. Però, per i vuoti più spinti, quando i valori di i'' della corrente

dedotti dalle misure calorimetriche (colonna 8) tendono ad $\frac{1}{2}$ dei valori i' (colonna 5) direttamente misurati, l'analisi del fascio protonico mediante campo magnetico rivela una buona omogeneità di esso, con una deviazione tale da far escludere la seconda ipotesi, così che, in tal caso, si avrebbe la produzione di elettroni per urto di protoni contro l'antianodo, e i valori i'' rappresenterebbero l'intensità effettiva della corrente protonica incidente sulla placca calorimetrica.

Rimane ancora imprecisata la causa dell'emissione dei protoni e cioè l'incertezza se tale emissione avviene spontaneamente insieme a quella dell'idrogeno neutro, in percentuale più o meno grande, oppure se all'emissione dei protoni concorre l'urto degli elettroni contro il palladio. In questo secondo caso, che mi sembra abbastanza attendibile, le due emissioni (di elettroni per urto di protoni al catodo, e di protoni per urto di elettroni all'anodo) verrebbero ad incrementarsi a vicenda.

Ringrazio la prof. R. Brunetti, Direttore dell'Istituto di Fisica di Pavia, per alcuni consigli datimi nell'ideazione della presente ricerca.

Biologia generale. — *Il nucleo delle ghiandole salivari delle larve di « Chironomus plumosus » studiato in campo oscuro, a luce polarizzata e con la reazione di Feulgen* ⁽¹⁾. Nota di C. GUARESCHI, presentata ⁽²⁾ dal Socio F. SILVESTRI.

È ormai universalmente accettato il concetto dell'importanza dei cromosomi nella trasmissione ereditaria; da una trentina d'anni il Morgan e tutta la schiera dei suoi valorosi allievi e collaboratori conducono, inserendole su nuove basi, ricerche numerosissime su tale questione; gli studiosi di tutto il mondo intervenuti nella discussione di tale appassionante problema sono anch'essi numerosissimi.

Vano sarebbe quindi riportare i diversi risultati ottenuti e le varie opinioni emesse, gli uni e le altre più che note; mi limiterò solo a ricordare che per la scuola americana e per molti altri ricercatori i cromosomi sono formati di cromomeri, nei quali sarebbero precisamente localizzati i geni del Mendelismo. Painter, Bridges, ed altri studiosi hanno a lungo cercato di dare una dimostrazione sperimentale di questa concezione del Morgan, senza riuscire ad appoggiarla con prove del tutto irrefutabili; Ellenhorn, Provofieva e Müller (1935) per mezzo della luce ultravioletta hanno potuto svelare l'esistenza di una fine struttura, formata di strie trasversali, all'estremità sinistra

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata « Battista Grassi » della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 20 marzo 1938.

del cromosoma X della *Drosophila melanogaster*. Questi i risultati più brillanti ottenuti in tale campo fino agli studi di Caspersson (1936).

Questi, con una tecnica complicata basata sull'assorbimento della luce ultra violetta di determinata lunghezza d'onda (2600 AE), accoppiata o no alla digestione con tripsina unita ad acetato di lantanio (si digeriscono così le proteine e le protamine e si rispetta invece l'acido nucleinico che viene trasformato in un sale insolubile di lantanio) ha potuto dimostrare come nella profase della meiosi di due specie di Acridi (*Chortippus dorsatus* e *Gomphocerus* sp?) l'acido nucleinico si localizzi elettivamente in piccoli corpicciuoli che si dispongono in file regolari e che finiscono poi per formare, nella loro totalità, i cromosomi visibili nella metafase del processo. I corpicciuoli sarebbero piccoli e isolati nello stadio di leptotene, ma confluirebbero poi, formando, prima dell'apparire delle tetradi, una massa senza struttura, nella quale ad ogni modo, dopo la telofase della prima divisione di maturazione, è possibile intravedere la permanenza della struttura a corpicciuoli allineati, specialmente dopo la digestione. Ammettendo l'identità tra tali corpicciuoli e i cromomeri, sarebbe con ciò dimostrata senza possibilità di dubbio la struttura cromomeriale dei cromosomi delle cellule sessuali durante le divisioni maturative.

Anche nei grossi reticoli cromatinici esistenti nelle ghiandole salivari di molti Ditteri, già visti da Balbiani (1881) in *Chironomus plumosus*, da Heitz e Brauer (1933) in *Bibio hortulanus* e da altri in *Drosophila*, in *Sciara* ecc., e le cui bande trasversali già Painter (1934), Heitz (1934), Morgan, Bridges e Schulz (1934), Bridges (1935) ecc., hanno ritenute rappresentare i portatori dei geni o la confluenza dei portatori dei geni di più cromosomi, e nell'ipotesi, dello stesso Caspersson, che i cromosomi in tali reticoli cromatici « in der Hauptsache nur als vergrößerte Wiedergaben der gewöhnlichen Chromosomen angesehen werden, welche Ansicht während der letzten Jahre eine stets stärkere Unterstützung bekommen zu haben scheint » si può notare, con lo stesso Autore, una successione di bande trasversali ricche, alternate con segmenti privi o poveri di acido nucleinico. Le bande trasversali, ricche di tale acido, sarebbero già dei complessi, poichè asportando i componenti poveri di esso per mezzo della digestione, appaiono formate da tante strie più sottili, distanti l'una dall'altra circa un decimo di micron. La regolare disposizione di tali strutture parla, sempre secondo l'A., contro l'ipotesi che esse siano degli artefatti.

Quando i grossi cromosomi delle ghiandole salivari, cito sempre le idee dell'A. svedese, vengono ridotti alle dimensioni di cromosomi normali, la distanza fra le bande trasversali diviene dell'ordine di grandezza di una molecola proteica. La distanza fra le fini strutture che si mettono in evidenza in una parte delle bande dopo la digestione è così minima che, dopo riduzione alla grandezza dei normali cromosomi, può trovar posto fra di esse solamente uno strato di molecole dell'ordine di grandezza dei più alti poli-

peptidi. Queste strie più sottili, inoltre, corrispondono perfettamente alle righe trasversali formate dai corpicciuoli nelle divisioni maturative di *Cor-tippus* e di *Gomphocerus*, così che è possibile omologarle alle zone formate di cromomeri.

Più recentemente la Pirocchi (1937), nel reticolo nucleare delle ghiandole salivari di *Calliphora vomitoria* ha potuto notare delle bande trasversali più colorate, formate da « granuli più o meno sottili e più o meno accollati » distribuiti alla periferia del reticolo e in numero non fisso; essa li considera come sezioni di cromosomi unitari riuniti a formare il cromosoma gigante. Baldi (1937) in *Drosophila melanogaster* riesce a risolvere le bande in granuli affiancati e suppone che il cromosoma abbia la forma di un cilindro nel quale i rosari di granuli si dispongono lungo le generatrici. Infine Barigozzi (1937) incenerendo le ghiandole salivari di *Chironomus Thomini* e di *Drosophila melanogaster* ottiene spodogrammi dai quali risulta come le bande più ricche di acido nucleinico, individuate da Caspersson, sono anche più ricche di sostanze minerali, mentre quelle povere del medesimo acido ne sono pressochè prive. Le prime hanno perciò una composizione più complessa, e ciò appoggia l'ipotesi di Caspersson e di molti altri genetisti, secondo la quale le bande scure ricche di acido nucleinico sono la sede dei geni contro quella del Metz e di altri i quali pensano che anche le bande chiare possono essere similmentè sede dei geni.

*
* *

Da quanto sopra ho riferito sorge spontanea una osservazione.

Molti genetisti, ammettendo l'identità tra i veri cromosomi e il reticolo cromatinico delle ghiandole salivari, per cui questo reticolo rappresenterebbe la riunione di modelli permanenti ed enormemente ingranditi dei cromosomi che si mettono in evidenza solo in particolari momenti della vita cellulare nelle altre cellule e specie in quelle germinali, si sono affannati a ricercarne la costituzione morfologica. Si è anche parlato, dall'uno o dall'altro A., della possibilità che nei preparati fissati e colorati si trattasse di artefatti, ed accuse di tal genere sono state scambiate tra alcuni ricercatori, ma ciò nonostante nessuno si è preoccupato di studiare, se non superficialmente, quello che tali reticoli siano *in vivo*. Il solo Caspersson ha iniziato anche tale studio, servendosi sempre del suo metodo dell'assorbimento della luce U.V. di determinata lunghezza d'onda; l'ha però abbandonato ben presto perchè i preparati fissati gli davano risultati migliori.

Con i vari mezzi tecnici a mia disposizione, cioè a luce polarizzata e in campo oscuro, e senza trascurare di completare le mie osservazioni con il confronto di quanto si osserva a luce ordinaria secondo la tecnica di Balbiani e Korschelt, ho cercato di colmare questa lacuna, studiando nel nucleo delle ghiandole salivari di *Chironomus plumosus* tanto i reticoli in

vivo che i preparati fissati e colorati, allestiti soprattutto con un metodo specifico per l'acido nucleinico, vale a dire con la reazione di Feulgen. Ed ecco le prime osservazioni eseguite.

In vivo e a luce polarizzata il reticolo si presenta tutto monorifrangente; a nicolos incrociati sia le bande scure che quelle chiare, visibili a luce ordinaria, scompaiono completamente. L'alternanza di zone chiare e di zone scure non è quindi dovuta all'alternanza di dischi mono e birifrangenti. Ciò non contraddice minimamente le idee dei precedenti AA., perchè l'acido nucleinico non è birifrangente e le sostanze minerali trovate da Barigozzi a livello delle bande scure possono anch'esse essere monorifrangenti.

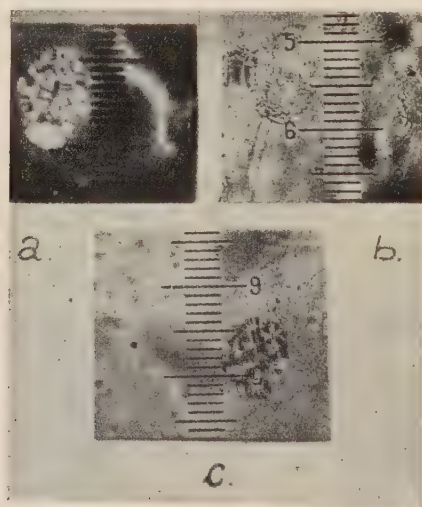


Fig. 1. — Microfotografie del medesimo reticolo cromatinico: a) in campo oscuro; b) a luce ordinaria; c) dopo fissazione e colorazione con la reazione di Feulgen.

In campo oscuro il reticolo cromatinico appare tutto intensamente luminoso sullo sfondo opalescente della cellula e su quello intensamente oscuro del resto del nucleo, il che indica che esso è in una condizione permanentemente gelificata, *anche in vivo*. È da notare infatti che, ad evitare possibili alterazioni postvitali, eseguiamo il preparato secondo la tecnica di Balbiani, con la massima rapidità, senza aggiungere alcuna soluzione fisiologica, usando invece, come liquido di sospensione, la emolinfa della larva cui la ghiandola apparteneva. All'osservazione immediata (l'allestimento del preparato può durare un 30 secondi circa) il reticolo appare luminoso e così si mantiene per un tempo sufficientemente lungo.

In campo oscuro, la luminosità del reticolo non è però omogenea; si osservano delle zone chiare separate da sottili linee più oscure il che indica che a zone fortemente gelificate si alternano zone meno gelificate.

Tale alternanza, però, non corrisponde a quella osservabile a luce ordinaria. Con l'osservazione sul medesimo reticolo, in campo chiaro, appare evidente che le bande chiare sono molto più sottili e più numerose di quelle che si vedono in campo oscuro (fig. 1, *a* e *b*).

Riprendendo il medesimo reticolo, fissandolo con alcool a 45° ed eseguendo su di esso la reazione di Feulgen, si ottiene quanto è indicato nella fig. 1, *c* ⁽¹⁾; appare cioè, così, una striatura sottile, paragonabile a quella visibile in campo chiaro, ma non a quella che si scorge in campo oscuro. Si osservi a questo proposito lo schema riportato nella fig. 2, dove uno

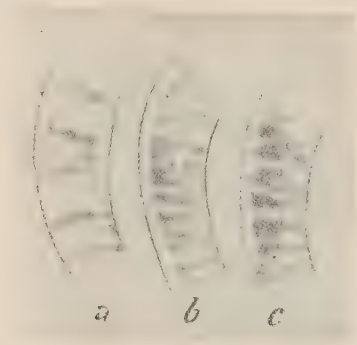


Fig. 2. — Lo stesso tratto del reticolo della figura precedente ingrandito e ripreso dalle tre osservazioni in campo oscuro (*a*), a luce ordinaria (*b*) e dopo colorazione col metodo di Feulgen.

stesso tratto del reticolo della fig. 1 è disegnato alla camera chiara riprendendolo dalle tre osservazioni in campo oscuro, in campo chiaro e dopo colorazione col metodo di Feulgen. Le bande chiare, visibili all'ultra microscopio, corrispondono a complessi di strie chiare e scure visibili a luce ordinaria e di strie più o meno ricche di acido nucleinico che si mettono in evidenza con la reazione di Feulgen.

*
* *

Già Caspersson, operando come ho detto sopra, aveva notato che le bande trasversali più ricche di acido nucleinico possono risolversi, dopo la digestione con pepsina e acetato di lantanio, in strie più sottili, del cui complesso esse sono quindi costituite. Con la reazione di Feulgen si ottiene direttamente, almeno in parte, quest'ultimo risultato: ciò è dovuto probabilmente alla minore sensibilità della reazione istologica in confronto al

(1) Notisi che in quest'ultimo caso il reticolo appare più piccolo. Ciò è dovuto all'inevitabile retrazione prodotta dal fissativo e dai reattivi della tecnica istologica.

metodo dell'assorbimento, minore sensibilità la quale fa sì che le strie intercalate a quelle ricche di acido nucleinico, e che probabilmente presentano solo tracce minime di tale sostanza, non si colorino; tale minore sensibilità ci è in tal caso utile (fig. 3).

Ed allora, se ammettiamo l'identità tra le strie così messe in evidenza e quelle di Caspersson, ne viene logico ammettere pure l'identità fra le bande (formate dalla riunione di più strie) del medesimo A. e le zone luminose (formate pur esse dalla riunione di più strie) visibili in campo oscuro. Un confronto diretto non è malauguratamente possibile, non esistendo in Roma e credo nemmeno in tutta Italia, un dispositivo sperimentale del tipo di quello usato da Caspersson, ma anche la semplice ipotesi da me ora emessa

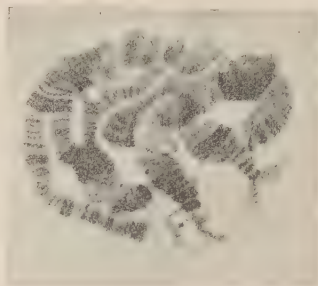


Fig. 3. — Come si presenta un reticolo cromatinico completo trattato con la reazione di Feulgen.

mi sembra presentare un certo interesse; da essa può sorgere una deduzione di notevole importanza teorica. Ammesso sempre, come ritengono ormai numerosissimi AA., molti dei quali appartengono alla scuola del Morgan, la scuola madre di tali studi, che i cromosomi giganti delle ghiandole salivari siano modelli ingranditi di quelli delle cellule germinali, si verrebbe in tal modo a provare che i vari cromomeri costituiscono dei complessi intimamente uniti, complessi che a loro volta si riuniscono fra loro, in modo più labile, a formare i diversi cromosomi. E se si ammette ancora che i cromosomi siano i portatori dei geni, tali zone di unione più labile, e quindi di minore resistenza, potrebbero essere precisamente quei *loci* di cui tanto si parla e nei quali più facilmente si verificano le rotture che danno origine a tutti i fenomeni di traslocazione di *crossing-over*, di spezzamento ecc.

Fisiologia. — *L'azione del bromo sullo sviluppo dell'organismo*⁽¹⁾. Nota di GIOVANNI MORUZZI e G. BORGATTI, presentata⁽²⁾ dal Socio M. CAMIS.

Lo studio del bromo nell'organismo animale iniziato da tempo da uno di noi⁽³⁾ aveva innanzitutto dimostrato che questo metalloide si deve ritenere un costituente normale dell'organismo ed aveva messo in evidenza lo stato in cui l'alogeno si trova nel sangue e negli organi in svariate condizioni sperimentali⁽⁴⁾. In seguito, vennero condotte ulteriori ricerche soprattutto con lo scopo di portare un contributo alla conoscenza del metabolismo ed al significato biologico dell'alogeno in questione, i quali rimanevano ancora oscuri.

Le esperienze condotte su cani e conigli allo scopo di stabilire il comportamento dei vari organi in seguito a somministrazione di bromo, sotto opportuna forma, sia per via orale che per via parenterale, hanno fatto tra l'altro chiaramente vedere che l'alogeno si accumula in un primo tempo nel sangue da cui poi passa, più o meno rapidamente, nei vari organi, i quali se ne arricchiscono in diversa misura a seconda anche delle diverse condizioni di esperimento⁽⁵⁾.

La distribuzione e lo stato del metalloide negli organi e tessuti come risulta da tali esperimenti, e particolarmente il fatto che il bromo si accumula preponderantemente in organi a secrezione interna che hanno notoriamente importanza nello sviluppo dell'organismo, ci hanno indotto a studiare direttamente l'eventuale influsso del bromo sull'accrescimento.

Premettiamo che gli animali adulti i quali ricevano composti di bromo in dosi relativamente modiche (da gr. 0.04 a gr. 0.08 di Br₂ pro chilo e pro die) non risentono alcun danno nè anatomico nè funzionale dall'accumularsi del metalloide nel loro organismo anche se la somministrazione viene prolungata per parecchi mesi. Ad esempio, una cagna tenuta in osservazione e sotto trattamento per oltre un anno, ha in questo periodo avuto i due estri regolari ed ha iniziato e condotto a termine in modo del

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia umana della R. Università di Bologna.

(2) Nella seduta del 20 marzo 1938.

(3) GIOVANNI MORUZZI e P. GUARESCHI, « Arch. Ist. Biochim. It. », 2, 229, 1936.

(4) GIOVANNI MORUZZI e P. GUARESCHI, « Boll. Soc. It. Biol. Sperim. », 11, 28, 1936; GIOVANNI MORUZZI, « Boll. Soc. It. Biol. Sperim. », 11, 725, 1936; ID., « La ricerca Scientifica », 2, n. 7-8, 1936; ID., « Boll. Soc. It. Biol. Sperim. », 11, 728, 1936; ID., « Arch. It. Sc. Farmocol. », 1937, Vol. giubil. in onore di A. Benedicenti.

(5) GIOVANNI MORUZZI, « Giorn. Clin. Med. », I, 1, 1937; ID., in corso di pubblicazione.

tutto normale una gravidanza che ha avuto esito col parto di sei cuccioli e con conseguente normale allattamento.

Invece la somministrazione del bromo, in dose e forma appropriata (in modo da non superare approssimativamente il decigrammo di alogeno pro chilo e pro die) ad animali in via di sviluppo (cane) ha effetti molto notevoli, giacchè, iniziandosi la prova al termine dell'allattamento, gli animali sottoposti al trattamento bromico restano arretrati nello sviluppo in confronto ai controlli della stessa covata. La differenza incomincia ad essere manifesta



Cani della stessa covata, dei quali il più piccolo è stato sottoposto al trattamento bromico, dopo 7 mesi d'esperimento.

dopo un mese dall'inizio della somministrazione e va sempre più accennuandosi. In una covata di sei cani, dopo nove mesi di esperimento, il controllo normale supera per grossezza e per peso i suoi fratelli trattati a bromo, di circa il doppio. Infatti, mentre il cane tenuto a dieta normale ha raggiunto il peso di Kg. 10.0 quelli trattati a bromo pesano non più di Kg. 5.0. La fotografia riprodotta mette in evidenza che tale differenza di peso non dipende da un diverso grado di nutrizione o grassezza degli animali, bensì da una cospicua diversità in tutto lo sviluppo scheletrico ed organico.

La prova è stata ripetuta su altre covate di cuccioli tuttora in osservazione ed il risultato è stato pienamente confermato, anche se, non essendo

ancora passato un tempo sufficiente, gli animali non hanno raggiunto i pesi del precedente lotto. Su queste ed altre esperienze in corso sarà riferito a suo tempo.

CONCLUDENDO: 1° L'animale trattato con composti di bromo appare assai più piccolo e più arretrato nello sviluppo in confronto al controllo come se si trattasse di un animale più giovane. Esso non presenta disarmonia delle parti.

Radiografie dello scheletro ripetute a diversa distanza di tempo dimostrano che nei cani in esperimento lo sviluppo delle ossa è alquanto rallentato in confronto a quanto accade nel controllo, senza per altro che vi sia il minimo cenno di distrofia ossea, nè di alterata calcificazione.

2° Un'osservazione esteriore che può colpire, è una certa brevità e ruvidezza del pelo; ciò si osserva in parte anche nei cani adulti trattati con bromo, per cui il fatto potrebbe essere parzialmente messo in rapporto coll'eliminazione del bromo per la cute.

Non si sono osservate manifestazioni apparenti a carico della congiuntiva e delle altre mucose.

3° Attualmente si può asserire che non vi è diminuzione sensibile nella vivacità e nell'intelligenza. L'appetito rimane integro e così le altre manifestazioni usuali della vita dell'animale appaiono normali.

4° Tre di questi cuccioli uccisi successivamente a distanze varie di tempo dall'inizio dell'esperienza per esami istologici e chimici degli organi, non hanno dimostrato alterazioni anatomo-patologiche macroscopiche e, per quanto finora abbiamo visto, neppure microscopiche; su questo punto tuttavia le ricerche continuano. Le prove chimiche confermano in massima quanto si era visto per gli organi degli animali adulti trattati col bromo secondo le medesime norme sperimentali ⁽¹⁾.

(1) GIOVANNI MORUZZI, in corso di pubblicazione.

Fisiologia (Chimica biologica). — *Sul comportamento del pH dell'urina umana durante la giornata* ⁽¹⁾. Nota di R. RUBINI, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Data l'importanza, che per ovvii motivi può assumere lo studio del pH dell'urina sia nel campo fisiologico che patologico, appare giustificato l'interesse, con cui vari Autori hanno condotto ricerche in proposito.

Limitandoci a riferire sommariamente soltanto le più affini a quelle personali, che intendiamo riassumere nella presente Nota, ricorderemo che WATSON ⁽³⁾, BAZZET, THURLOW, CROWELL e STEWART ⁽⁴⁾ notarono, dopo il risveglio, durante la mattina, un aumento del pH dell'urina; ma tale comportamento invece non è stato osservato costantemente da HUBBARD, MUNFORD e ALLEN ⁽⁵⁾, nè da CAMPBELL ⁽⁶⁾, a meno che non fossero stati ingeriti prima alimenti.

SIMPSON ⁽⁷⁾ trovò, che il valore del pH dell'urina era più basso nella notte, durante il sonno, e aumentava il mattino dopo il risveglio; sperimentando su soggetti, rimasti svegli durante la notte fino alle sette, e coricati dopo questa ora fino alle undici, non si osservò più l'aumento del pH dell'urina durante la mattina. Esperienze sono state fatte dall'Autore anche per ricercare l'influenza di alcune ore di sonno nel corso della giornata.

RANNENBERG ⁽⁸⁾ afferma, che il pH dell'urina può variare nel corso della giornata da 7,96 a 4,98, presentando due elevazioni (una il mattino e l'altra nel pomeriggio), senza dubbio in rapporto con la secrezione cloridrica dello stomaco; le oscillazioni scompaiono nel digiuno e nel caso di alimentazione carnea, con o senza grassi.

Il concetto che l'elevazione del pH dell'urina sia da riferire alla secrezione gastrica di acido cloridrico è stato sostenuto da parecchi ricercatori, ma non è stato accettato da tutti. MUNFORD e HUBBARD ⁽⁹⁾, RANNENBERG ⁽¹⁰⁾,

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica biologica della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 20 marzo 1938.

(3) E. M. WATSON, « Journ. Physiol. », 58, 14, 1923-24; « Canad. Med. Assn. Journ. », 15, 32, 1925.

(4) H. C. BAZZET, S. THURLOW, C. CROWELL e W. STEWART, « Amer. Journ. Physiol. », 70, 430, 1924.

(5) R. S. HUBBARD, S. A. MUNFORD e E. G. ALLEN, « Amer. Journ. Physiol. », 68, 207, 1924.

(6) J. A. CAMPBELL, « Bioch. Journ. », 14, 603, 1920.

(7) G. E. SIMPSON, « Journ. Biol. Chem. », 59, 107, 1924; 67, 505, 1926.

(8) E. RANNENBERG, « Arch. ges. Physiol. », 212, 601, 1926.

(9) S. A. MUNFORD e R. S. HUBBARD, « Journ. Amer. Med. Assn. », 87, 922, 1926.

(10) E. RANNENBERG, loc. cit.

DAVIES⁽¹⁾ hanno discusso la letteratura sull'argomento. Esperienze sono state fatte da WATSON⁽²⁾, e da HUBBARD e CASE⁽³⁾ su soggetti con normale o abnorme secrezione gastrica (a- ipo- ipercloridria), e mentre in effetti il più delle volte sono state riscontrate, comparativamente nei due casi, nette differenze, queste a volte sono invece mancate.

HUBBARD⁽⁴⁾ asserisce, che l'elevazione del pH del mattino dipende da due fattori: uno digestivo (secrezione gastrica di acido cloridrico), che segue il pasto e uno respiratorio (modificazione degli scambi respiratori al risveglio). Afferma ancora l'Autore, che, un'ora dopo il risveglio, si produce spesso un aumento dell'alcalinità dell'urina, anche quando il soggetto non ha ingerito alimenti, nè bevande, e che invece durante la seconda ora, dopo il risveglio, alcuni soggetti emettono un'urina più acida di quella emessa subito dopo il risveglio.

HUBBARD, MUNFORD e TYNER⁽⁵⁾ hanno studiato, ancora di recente, il rapporto tra secrezione gastrica ed elevazione dell'alcalinità urinaria, ed hanno concluso, che la secrezione dell'acido cloridrico è la principale causa dell'elevazione del pH dopo il pasto della mattina. Vi sono diversi fattori — affermano gli autori —, che possono influenzare sia la reazione dell'urina sia la secrezione cloridrica dello stomaco, e l'effetto di tali fattori spiega probabilmente la mancanza di relazione, di tempo in tempo asserita da Autori vari, tra acidità gastrica e reazione dell'urina.

BRUNTON⁽⁶⁾ ha studiato l'influenza degli alimenti sul ritmo della secrezione acida dell'urina, e NEUSCHLOSZ⁽⁷⁾ ha studiato invece l'effetto del lavoro muscolare.

Come si vede dalle ricerche ricordate, il pH dell'urina è stato più volte preso in considerazione da diversi Autori, tuttavia le indagini, oltre ad aver condotto a risultati non sempre concordanti, sono rimaste senza quell'ulteriore sviluppo, che avrebbero meritato e sarebbe stato desiderabile, a vantaggio della risoluzione di svariati problemi biologici.

In considerazione di ciò, sotto la guida del prof. V. ZAGAMI, abbiamo voluto riprendere lo studio dell'argomento, iniziando sistematiche ricerche, di cui qui riferiremo la prima serie.

Come si imponeva, abbiamo inteso anzitutto il bisogno di controllare l'effettivo comportamento del pH dell'urina durante le varie ore della giornata. Abbiamo pertanto sperimentato per diversi giorni consecutivi su un

(1) D. T. DAVIES, «Brit. Journ. Exp. Path.», 10, 1, 1929.

(2) E. M. WATSON, loc. cit.

(3) R. S. HUBBARD e CASE, «Proc. Soc. Exp. Biol. a. Med.», 27, 327, 1930.

(4) R. S. HUBBARD, «Journ. Biol. Chem.», 84, 191, 1929; «Amer. Journ. Physiol.», 91, 618, 1930.

(5) R. S. HUBBARD, S. A. MUNFORD e J. TYNER, Journ. «Biol. Chem.», 101, 781, 1933.

(6) C. E. BRUNTON, «Journ. Physiol.», 78, 65, 1933.

(7) S. M. NEUSCHLOSZ, «C. R. Soc. Biol.», 111, 514, 1932.

soggetto, giovane, affatto normale, studente di medicina, del peso di kg. 72, in ottime condizioni generali, il quale, continuando a svolgere la propria attività abituale, assumeva — con una certa regolarità d'orario — pasti, costituiti sia da alimenti misti e vari come di ordinario, sia da alimenti pressochè uniformi, ma comunque sempre quantitativamente sufficienti e qualitativamente completi.

Durante un primo periodo di 5 giorni, i pasti costituiti da alimenti misti — come qui sotto è specificato — sono stati assunti nelle ore seguenti:

ore 8: latte e caffè, un uovo, pane;

ore 13,30: pasta asciutta o minestra in brodo, o minestrone; carne o pesce; verdura o patate; formaggio; frutta; vino;

ore 21: alimentazione come sopra.

Durante un secondo periodo di 4 giorni, susseguente senza intervallo al precedente, i pasti, costituiti da alimenti pressochè uniformi — come qui sotto è specificato — sono stati assunti nelle ore seguenti:

ore 8: latte e caffè, un uovo, pane;

ore 13,30: latte, ricotta e pane;

ore 21: latte, ricotta, un uovo e pane.

Durante questo secondo periodo venivano ingeriti complessivamente ogni giorno: gr. 700 di pane, gr. 500 di ricotta, gr. 75 di zucchero, cmc. 1500 di latte e 2 uova.

Sia nel primo che nel secondo periodo sperimentale, l'urina per la determinazione del pH è stata raccolta alle ore 3, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22 e 24. Ogni volta il campione si prelevava dall'urina emessa svuotando del tutto la vescica. Rigorosamente si evitava la minzione in altre ore.

I campioni appena prelevati venivano disposti in piccoli tubi da saggio e ricoperti con olio di vasellina.

La determinazione è stata eseguita col metodo elettrometrico, evitando sempre il contatto con l'aria per impedire eventuali perdite di CO_2 e conseguente spostamento dei valori del pH.

I dati raccolti sono raggruppati nell'annessa tabella e rappresentati nel diagramma della fig. 1.

Durante il periodo di alimentazione mista e varia il pH dell'urina, emessa nelle ore sopraindicate, ha subito forti oscillazioni, potendosi notare, pure nello stesso giorno, valori compresi tra 5,15 e 6,71.

Le oscillazioni si sono rivelate assai regolari per ritmo, nel senso che sono state sempre nette e distinte, durante le 24 ore, tre elevazioni e tre depressioni del pH. In genere, i vertici delle elevazioni si sono manifestati alle ore 3, alle ore 14 e alle ore 18, mentre i vertici delle depressioni si sono manifestati alle ore 10, alle ore 16 e alle ore 22. Di guisa che, a partire dalle ore tre del mattino, la concentrazione degli ioni H^+ nell'urina è andata aumentando sempre più fino alle ore dieci. Da questa ora ha avuto inizio una diminuzione di $[\text{H}^+]$, che è continuata fino alle ore 14; il valore

di $[H^+]$ ha presentato poi un nuovo aumento fino alle ore 16 e una nuova diminuzione fino alle ore 18; infine un ultimo aumento fino alle ore 22, e un'ultima diminuzione fino alle ore tre.

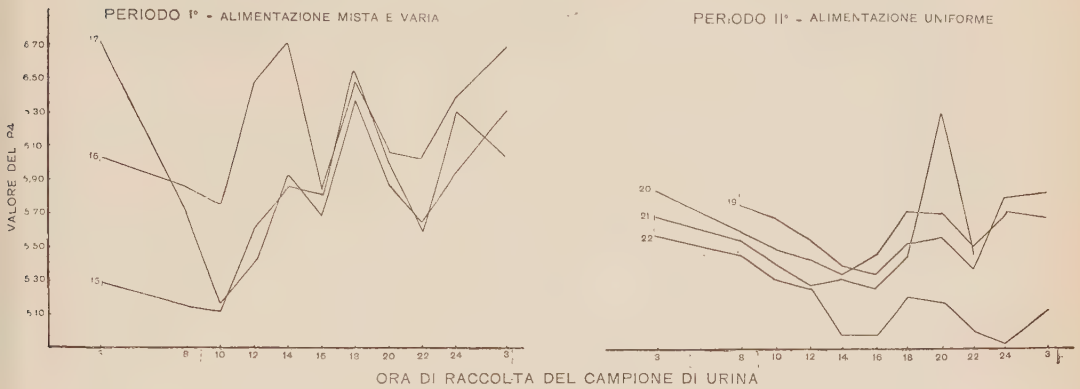


Fig. 1.

Tenendo presente che i pasti sono stati consumati alle ore 8, alle ore 13,30 e alle 21, e volendo ammettere un rapporto tra essi e il valore della concentrazione idrogenionica dell'urina, risulterebbe che i pasti, nel nostro caso, hanno determinato come effetto immediato (durante la prima ora dall'assunzione) un aumento di $[H^+]$, e come effetto ulteriore (da una a quattro ore dall'assunzione) una diminuzione di $[H^+]$.

Ora di raccolta del campione	VALORI DEL pH DELL'URINA									
	Alimentazione mista e varia					Alimentazione uniforme				
	14-2	15-2	16-2	17-2	18-2	19-2	20-2	21-2	22-2	23-2
3	5.90	5.29	6.04	6.71	6.32	—	5.82	5.69	5.57	5.15
8	5.63	5.14	5.86	5.70	5.66	5.76	5.58	5.55	5.45	5.07
10	5.45	5.10	5.74	5.15	5.40	5.69	5.50	5.41	5.31	—
12	5.48	5.60	6.48	5.41	—	5.56	5.42	5.29	5.28	—
14	5.23	5.85	6.71	5.91	—	5.41	5.35	5.32	4.97	—
16	5.11	5.80	5.83	5.68	—	5.35	5.48	5.25	4.97	—
18	5.44	6.54	6.50	6.39	—	5.54	5.74	5.45	5.20	—
20	5.60	5.98	6.07	5.88	—	5.56	5.73	6.31	5.18	—
22	5.14	5.57	6.04	5.63	—	5.39	5.51	5.48	4.99	—
24	5.41	6.30	6.38	5.93	—	5.81	5.75	—	4.91	—

Alquanto diverso, ma pur sempre regolare, è stato il comportamento del pH dell'urina durante il periodo di alimentazione uniforme a base di latte, latticini, pane ed uova.

In questo caso infatti le oscillazioni tra il massimo e il minimo valore del pH sono state sensibilmente più ridotte, che nel caso precedente di alimentazione mista e varia, e in genere la concentrazione in ioni H^+ si è mantenuta più elevata.

Inoltre, l'aumento della concentrazione idrogenionica, che in genere inizia verso le tre del mattino, è continuato graduale fino alle ore sedici; dipoi l'andamento è stato identico come ritmo a quello già descritto.

In complesso adunque, durante questo secondo periodo sperimentale, oltre alle oscillazioni più ristrette del pH e al valore più elevato di $[H^+]$, è mancata la diminuzione della concentrazione idrogenionica che di norma si era avuta dalle ore 10 alle ore 14.

Dunque il pH dell'urina, nel nostro soggetto, durante le varie ore della giornata ha mostrato di subire notevoli oscillazioni con ritmo assai regolare e netto. Talune di queste oscillazioni devono essere indubbiamente in rapporto coll'attività muscolare e col fattore respiratorio, altre in rapporto con l'ingestione degli alimenti, nonchè con la quantità e qualità di essi. Ne segue che ogni ricerca basata sul valore del pH dell'urina, non può essere limitata a pochi saggi, saltuari ed isolati, ma deve essere perseguita sistematicamente bene analizzando l'azione dei diversi fattori.

Con successive indagini ci proponiamo di dare anzitutto una esatta ed esauriente interpretazione sia delle oscillazioni orarie del pH, sia delle variazioni riscontrate coi due differenti tipi di dieta; per procedere quindi, sulla base di tali preliminari accertamenti (d'altra parte indispensabili), allo studio e allo svolgimento di altre questioni, che meritano di essere imposte e risolte.

Fisiologia. — *Sul ritmo normale di alcune secrezioni.* Nota di V. FARMIANI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia (Chimica fisiologica). — *Sulla perdita percentuale di peso nella morte per inanizione e per ipoalimentazione*⁽¹⁾.
Nota di D. GIGANTE, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Lavorando intorno alla fase critica dell'inanizione⁽³⁾, potemmo confermare per i colombi adulti la nota regola dello Chossat⁽⁴⁾, secondo cui sostanzialmente gli animali adulti muoiono per inanizione dopo aver perduto i $2/5$ del peso originario; ma inoltre notammo, che in due colombi ipoalimentati con 10 gr. di grano fino alla morte, questa invece coincise con una perdita di peso notevolmente superiore.

Questo fatto ci sembrò meritare ulteriori ricerche. Ci siamo proposti pertanto non solo di controllare su colombi adulti, se effettivamente la perdita di peso differisse nella inanizione, in confronto con la ipoalimentazione ma anche se il *deficit* di peso risultasse diverso, a seconda che l'ipoalimentazione si determinasse rapidamente, somministrando subito razioni molto scarse, ovvero lentamente con razioni decrescenti di alimento, adottando in proposito la tecnica già da noi impiegata in altre esperienze⁽⁵⁾.

Inoltre abbiamo estese le osservazioni anche ai ratti albin, sperimentando sempre su animali adulti.

Essendoci riservati di studiare l'ipoalimentazione solo dal punto di vista quantitativo, ai colombi abbiamo somministrato sempre grano, che, da precedenti ricerche eseguite nel nostro Laboratorio, si è dimostrato adatto a questo tipo di esperienze su animali adulti. I ratti sono stati alimentati con pane secco. In entrambi i casi si è lasciata acqua a volontà.

Per ciò che riguarda i colombi ci limitiamo a riferire solo di ventotto, tutti adulti, d'ambo i sessi, non tenendo conto dei molti messi in esperimento e morti per cause intercorrenti, facili a verificarsi, dato il genere di esperienze comportanti una progressiva diminuzione di resistenza degli animali.

Mentre dieci colombi si sono sottoposti a digiuno, altri diciotto si sono ipoalimentati, e precisamente otto con 10 gr. di grano pro die, i restanti dieci prima con 15 gr. di grano giornalieri, diminuendo questa dose — quando diveniva di mantenimento per il peso corporeo raggiunto⁽⁵⁾ — prima a 10 gr. di grano, infine a 5 gr.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica biologica della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 20 marzo 1938.

(3) D. GIGANTE, *Contributo sperimentale alla conoscenza della fase critica del digiuno secondo Luciani*. «Riv. di Pat. sper.», vol. V, nn. 1-3, 1936.

(4) CHOSSAT, *Memoires presentées par divers savants a l'Academie Royale des Sciences de l'Institut de France*. 8, 438, 1843.

(5) D. GIGANTE, *Rapporto tra razione alimentare e peso corporeo*. «Quaderni della nutrizione», vol. IV, nn. 3-4, 1937.

Dopo un lungo periodo di osservazione necessario a fissare il massimo di peso, i colombi venivano isolati in gabbia, e si assumeva, come peso iniziale, quello dell'animale a ingluvie completamente vuota, e come peso finale quello accertato alla morte.

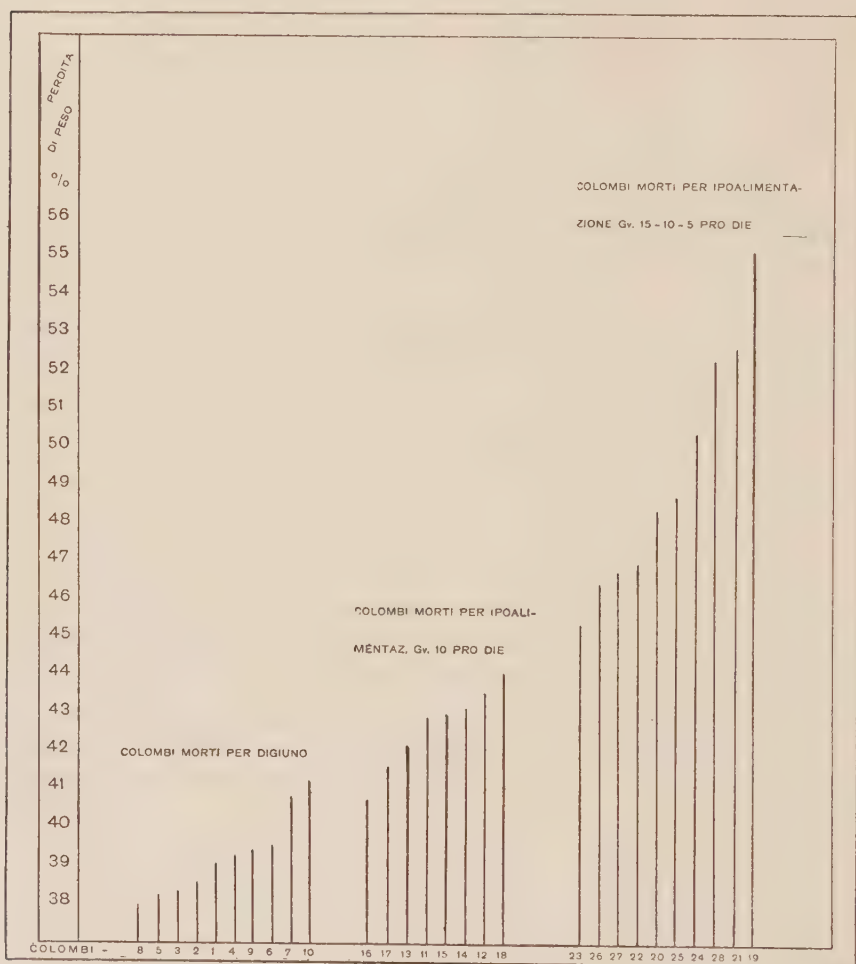


Fig. 1.

I sessanta ratti presi in esame, tutti adulti d'ambo i sessi, provenienti da tre diversi stipiti, sono stati divisi in tre lotti, di venti ciascuno. Degli animali di ciascun lotto, mentre dieci si lasciavano a digiuno, gli altri dieci si ipoalimentavano con circa 10 gr. di pane secco pro die. Il peso iniziale era assunto dopo circa 12 ore dall'isolamento in gabbia, senza cibo. Il peso finale era accertato alla morte. Nei complessivi trenta ratti così ipoalimentati, abbiamo seguito sostanzialmente la stessa tecnica impiegata nei primi otto colombi ipoalimentati: cioè somministrazione, sin dall'inizio, di

una razione alimentare — mantenuta invariata — molto più ridotta di quella che sarebbe stata necessaria pel mantenimento del peso iniziale.

Per brevità riportiamo in grafici e in tabelle i risultati delle esperienze.

Dall'esame dei dati riguardanti i colombi, confrontando fra loro le tre serie di esperienze, appare nettissima una notevole differenza nella perdita di peso. Infatti mentre i dieci colombi digiunanti sono morti dopo perdite di peso oscillanti tra un minimo del 38.4 % (colombo 8°) e un massimo

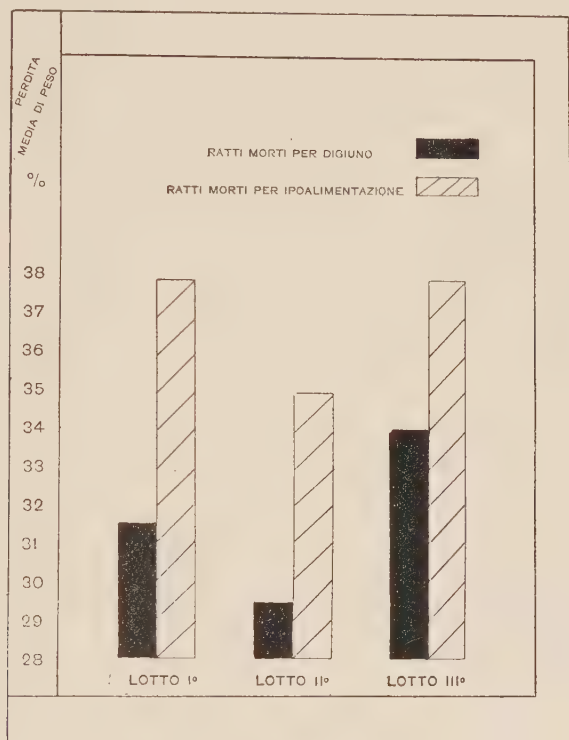


Fig. 2.

del 41.7 % (colombo 10°) — media 39-40 % —; gli otto colombi ipoalimentati con 10 gr. di grano sono invece morti con perdite di peso oscillanti tra il 41.3 % (colombo 16°) e il 44.6 % (colombo 18°) — media 42-43 % —; infine i dieci colombi ipoalimentati con dosi decrescenti di grano sono morti con perdite di peso ancora superiori, oscillanti tra il 45.8 % (colombo 23°) e il 55.5 % (colombo 19°) — media 48-49 % —.

Anche i ratti hanno avuto analogo comportamento. Ciò appare chiaro dall'esame dei tre lotti, confrontando fra loro quelli morti per digiuno con quelli morti per ipoalimentazione. Le differenze fra i tre lotti sono spiegabili con la provenienza dei ratti da stipiti diversi.

TABELLA I.

Colombi digiunanti						Colombi ipoalimentati con 10 gr. di grano pro die						Colombi ipoalimentati con 15-10-5 gr. di grano pro die					
Colombo	Peso iniziale in gr.	Peso finale in gr.	Peso perduto in gr.	Perdita di peso %	Durata dell'espe- rienza in giorni	Colombo	Peso iniziale in gr.	Peso finale in gr.	Peso perduto in gr.	Perdita di peso %	Durata dell'espe- rienza in giorni	Colombo	Peso iniziale in gr.	Peso finale in gr.	Peso perduto in gr.	Perdita di peso %	Durata dell'espe- rienza in giorni
1°	530	320	210	39.6	18	11°	440	250	190	43.2	25	19°	540	240	300	55.5	69
2°	460	280	180	39.1	15	12°	500	280	220	44.	18	20°	400	205	195	48.7	65
3°	360	220	140	38.8	16	13°	480	275	205	42.7	21	21°	370	174	196	52.9	68
4°	460	278	182	39.7	12	14°	465	263	202	43.6	27	22°	535	282	253	47.4	64
5°	310	190	120	38.7	10	15°	530	300	230	43.3	30	23°	480	260	220	45.8	61
6°	350	210	140	40.	19	16°	520	305	215	41.3	28	24°	485	238	247	50.9	73
7°	380	223	157	41.3	18	17°	460	266	194	42.1	35	25°	530	270	260	49.	71
8°	455	280	175	38.4	12	18°	535	297	238	44.2	32	26°	490	260	230	46.9	66
9°	500	355	235	39.8	16							27°	460	242	218	47.3	77
10°	510	297	213	41.7	15							28°	380	180	200	52.6	72

TABELLA II.

Ratti morti per inanizione						Ratti morti per ipoalimentazione					
RATTO	Peso iniziale in gr.	Peso finale in gr.	Peso perduto in gr.	Perdita di peso %	Durata dell'espe- rienza in giorni	RATTO	Peso iniziale in gr.	Peso finale in gr.	Peso perduto in gr.	Perdita di peso %	Durata dell'espe- rienza in giorni

LOTTO I.

1°	158	104	54	34.1	7	11°	120	75	45	37.5	18
2°	148	98	50	33.8	6	12°	165	108	57	34.5	20
3°	248	168	80	32.2	8	13°	200	123	77	38.5	22
4°	180	120	60	33.3	7	14°	200	118	82	41.	26
5°	240	166	74	30.8	6	15°	160	104	56	35.	18
6°	270	190	80	29.6	6	16°	158	93	65	41.1	27
7°	220	152	68	30.8	5	17°	196	112	84	42.8	28
8°	250	175	75	29.4	6	18°	204	132	72	35.2	21
9°	203	142	61	30.	7	19°	208	129	79	37.9	19
10°	209	144	65	31.2	7	20°	194	125	69	35.5	22

LOTTO II.

21°	215	153	62	28.8	6	31°	195	122	73	37.4	18
22°	194	139	55	28.3	6	32°	210	127	83	39.5	22
23°	170	122	48	28.2	7	33°	240	163	77	32.	15
24°	236	162	74	31.3	6	34°	235	158	77	32.7	14
25°	195	138	57	29.2	5	35°	193	126	67	34.6	15
26°	196	140	56	28.5	6	36°	218	145	73	33.4	18
27°	170	118	52	30.5	7	37°	168	103	65	38.6	20
28°	205	158	67	32.6	7	38°	180	120	60	33.3	15
29°	244	172	72	29.5	4	39°	212	138	74	34.9	16
30°	206	145	61	29.6	5	40°	250	168	82	32.8	16

Segue TABELLA II.

Ratti morti per inanizione						Ratti morti per ipoalimentazione					
RATTO	Peso iniziale in gr.	Peso finale in gr.	Peso perduto in gr.	Perdita di peso %	Durata dell'espe- rienza in giorni	RATTO	Peso iniziale in gr.	Peso finale in gr.	Peso perduto in gr.	Perdita di peso %	Durata dell'espe- rienza in giorni

LOTTO III.

41°	195	130	65	33.3	6	51°	195	125	70	36.9	21
42°	175	108	67	38.2	8	52°	194	124	70	36.	18
43°	205	137	68	33.2	7	53°	156	102	54	34.6	15
44°	175	116	59	33.7	8	54°	195	115	80	41.	24
45°	194	128	66	34.	7	55°	186	107	79	42.4	34
46°	204	135	69	34.	6	56°	170	105	65	38.2	20
47°	178	121	57	32.	5	57°	194	112	82	42.2	25
48°	150	98	52	34.6	7	58°	172	106	66	38.3	27
49°	175	118	57	32.5	5	59°	164	108	56	34.1	16
50°	158	105	53	33.5	6	60°	192	120	72	37.5	18

Nel primo lotto, gli animali sono morti per digiuno con perdite di peso oscillanti tra il 29.4 % e il 34.1 % — media 31.5 % —, e per ipoalimentazione con perdite tra il 34.5 e il 42.8 % — media 38 % —; quelli del secondo lotto sono morti per inanizione con perdite di peso tra il 28.2 % e il 32.6 % — media 29.5 % —, e per ipoalimentazione con perdite tra il 32 % e il 39.5 % — media 35 % —; e infine i ratti del terzo lotto sono morti per inanizione con perdite di peso tra il 32 % e il 38.2 % — media 34 % —, e per ipoalimentazione con perdite tra il 34.1 % e il 42.4 % — media 38 % —.

Le differenze di peso tra i ratti morti per digiuno e quelli per ipoalimentazione sono, come appare chiaro, notevoli: ma crediamo, che, somministrando razioni alimentari all'inizio solo lievemente insufficienti, e decrescendole gradualmente durante l'esperimento, analogamente a ciò che notammo nei colombi, si devono raggiungere perdite di peso ancor più elevate.

Altre esperienze in corso ci hanno già fornito buoni elementi per ritenere, che i fatti accertati su colombi e ratti si verificano anche in altre specie di animali; e nulla induce finora ad escludere, che essi abbiano carattere e significato affatto generale.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 3 aprile 1938 — Anno XVI

Presidenza del prof. F. MILLOSEVICH

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Astronomia (Astrofisica). — *Altezza della cromosfera nel 1937 e andamento del ciclo solare.* Nota⁽¹⁾ del Corrisp. G. ABETTI.

I risultati delle osservazioni dell'altezza della cromosfera eseguiti ad Arcetri nel 1937, come usualmente, di 30° in 30° di latitudine, sono raccolti nella seguente tabella.

Le condizioni del tempo non hanno permesso nel corso dell'anno che 69 osservazioni nelle giornate più favorevoli; esse furono in maggioranza eseguite dal dott. P. Cipriani.

Arcetri

Latitudine	Altezza	Latitudine	Altezza
+ 90° N	10".62	— 90° S	10".64
+ 60 E	10 .49	— 60 W	10 .64
+ 30 E	10 .38	— 30 W	10 .50
o E	10 .45	o W	10 .45
— 30 E	10 .67	+ 30 W	10 .37
— 60 E	10 .67	+ 60 W	10 .40

(1) Presentata nella seduta del 3 aprile 1938.

Da queste si ricava l'altezza media generale per il 1937: $10''.52$. Facendo il confronto con il precedente anno si ha:

$$1937 - 1936 = -0''.05.$$

Si può quindi concludere che l'altezza della cromosfera non è variata, e di più che la sua distribuzione attorno al globo solare è rimasta uniforme.

L'area totale delle protuberanze, dedotta dalle stazioni di Arcetri, Catania, Tashkent, Zurigo risulta nel 1937 di 22 unità di protuberanza inferiore a quella del 1936, quindi per il fenomeno delle protuberanze si deve ritenere che l'attività nel ciclo solare è rimasta costante nei due anni passati.

I massimi principali delle aree delle protuberanze sono avvenuti: nell'emisfero nord a 67° , e in quello sud a 75° , continuando così lo spostamento verso i poli delle protuberanze ad alta latitudine rispettivamente di 10° e 13° . I minimi secondari sono ora ben definiti nei due emisferi: a 32° in quello Nord, a 37° in quello Sud, quasi alla stessa latitudine del 1936.

Dagli spettroeliogrammi in luce monocromatica di calcio e di idrogeno, presi alla torre solare durante il 1937, si rileva che l'attività dei flocculi chiari ed oscuri è aumentata, da 2.5 a circa 3.0 nella scala dei numeri caratteristici dell'attività solare (0 = attività nulla; 5 = massima attività), come sono notevolmente aumentate le eruzioni cromosferiche osservate con lo spettroelioscopio.

Poichè si è visto che nelle protuberanze l'attività del 1937 è rimasta costante rispetto al 1936 si dovrebbe concludere, salvo un più accurato esame da farsi quando tutte le osservazioni saranno pubblicate, che mentre l'alta cromosfera in generale è stata perturbata in egual misura nei due anni passati, invece nella cromosfera più bassa l'attività è ancora notevolmente aumentata nel 1937.

Per i dettagli di queste osservazioni si veda il fascicolo 56 delle Pubblicazioni del R. Osservatorio di Arcetri.

Biologia. — *Le caratteristiche biologiche del lago Tana.*
Nota⁽¹⁾ del Corrisp. G. BRUNELLI e di G. CANNICCI.

Pochi mesi dopo la conquista dell'Etiopia la R. Accademia d'Italia organizzava sotto la Presidenza di S. E. De Stefani, il Centro Studi A. O. I. affidando all'Accademico Dainelli, per la sua nota competenza, l'esplorazione totalitaria del bacino imbrifero del Tana.

Avendo il Ministero dell'Agricoltura poco tempo prima formulato per iniziativa del R. Laboratorio Centrale di Idrobiologia il programma di una esplorazione biologica del Tana, venivano perciò stabiliti accordi tra le Loro Eccellenze De Stefani e Dainelli e il R. Laboratorio Centrale di Idrobiologia per realizzare tale spedizione alla quale il R. Laboratorio contribuì con mezzi, con uomini (i dottori Bini e Morandini) e con metodi già in uso in precedenti campagne limnologiche. Si espongono qui alcuni risultati preliminari relativi al plancton, coordinandoli alle ricerche fisico-chimiche d'altri collaboratori (Bini e Morandini).

Come dalle indagini geologiche e geografiche della Missione italiana, che confermò le ricerche della spedizione egiziana, il lago Tana è un lago di sbarramento dovuto a colate laviche, e di formazione relativamente recente, al massimo pliocenica; ma secondo altri autori, e più probabilmente, postpliocenica.

Dagli scandagli eseguiti dal dott. Morandini di questo R. Laboratorio, il lago Tana, contrariamente alle opinioni correnti e anche a quanto pubblicato in qualche opera straniera, è di scarsa profondità, come del resto si spiega per la sua anzidetta origine, e precisamente esso ha una profondità media di circa 8 metri, con un massimo di m. 14.15 ad oriente dell'isola Deck, mentre, come è noto, grande è la sua estensione (kmq. 3060) con uno sviluppo di riva intorno a km. 500.

Si attenderebbe perciò che la sua microflora, come nei laghi di scarso fondale, fosse molto più abbondante, e che cioè, secondo la classificazione di Naumann-Thienemann, si trattasse di un lago eutrofico, mentre dai risultati si deve piuttosto considerare un lago oligotrofico, come dimostrano anche le analisi chimiche eseguite nel R. Laboratorio Centrale di Idrobiologia.

Tutto ciò sembrerebbe contrario ai caratteri generali di tale bacino lacustre, se non si trattasse di una regione eminentemente vulcanica. Per la natura infatti del fondo e delle prode, che sembrano quasi banchinate da rocce vulcaniche, la vegetazione coronale del Tana è molto scarsa

(1) Presentata nella seduta del 3 aprile 1938.

e in ciò è il carattere determinante la sua oligotrofia. Vi è, è vero, una zona di papiri (specialmente in relazione ai corsi d'acqua) che in qualche punto penetra in una certa profondità — specialmente vicino alla foce dell'Abbai — e che è seguita in alcune pochissime zone dal lamineto delle ninfee, come in corrispondenza all'emissario, il grande Abbai, o Nilo Azzurro, e non manca qualche rara prateria a *Potamogeton*.

La natura geologica del fondo determinata in massima parte dal disfacimento di lave vulcaniche, la scarsa vegetazione coronale — dovuta alla natura basaltica e trachitica delle prode — spiegano così l'oligotrofia del Tana.

Dopo questa premessa esponiamo qui sommariamente le caratteristiche del plancton.

La raccolta dei saggi planctonici è stata ripetuta in un numero di stazioni abbastanza grande, in relazione alle trasversali sulle quali vennero compiuti gli scandagliamenti, dei quali si parla più estesamente da altri collaboratori (Morandini).

Metodiche ricerche di differenti stazioni hanno confermato quello che già era apparso da un'analisi sommaria. Non si può dire che il lago Tana sia ricco di plancton, ciò che è in relazione colla scarsità di sali nutritivi, specialmente azotati, perchè i fosfati sono invece piuttosto abbondanti. D'altra parte, relativamente, abbondano nel Tana le diatomee, ciò che è, come vedremo, in relazione sia con la ricchezza di silicati del fondo, sia con la colonizzazione di origine potamica del lago.

Ammettendo che esso sia un lago di sbarramento relativamente recente, dobbiamo pure ammettere che la sua colonizzazione fondamentale sia per la massima parte dovuta al potamoplancton senza escludere quella dovuta agli stagni di gronda e al trasporto degli uccelli acquatici.

In realtà le diatomee e le cloroficee predominanti, i crostacei, i rotiferi, testimoniano che le forme potamoplanctoniche sono le più diffuse. Anche la specie di *Cyclops* più frequente, cioè il *Cyclops albidus*, è stato trovato nei fiumi dell'Africa e precisamente nel Congo (Van Oye).

Tra i piccoli crostacei planctonici i copepodi sono dunque rappresentati dal già ricordato *Cyclops albidus* e dal *Diaptomus mixtus* che può ascriversi al nuovo genere *Thermodiaptomus* (Kiefer); non abbiamo potuto identificare finora nessun'altra specie, per cui è molto probabile che se anche in seguito potessimo arrivare a classificarne sarebbero molto vicine a quelle sopra dette, le quali si presentano con una grande ricchezza di individui e in piena attività riproduttiva. La povertà in sali delle acque del Tana può già spiegare il predominio, tra gli entomostraci, dei cladoceri, tra i quali alcune specie sono veramente caratteristiche di acque tropicali, come la *Ceriodaphnia rigaudi* e la *C. cornuta*; nei saggi finora studiati, però, queste due specie si sono riscontrate molto rare; comune ma non abbondante la *Daphnia longispina*, mentre frequentissime la *Ceriodaphnia reticulata*, la *C. laticauda*, la *Moina dubia*, il *Diaphanosoma excisum*, con la *Bosmina longirostris* che domina

su tutte le altre forme. I cladoceri presentano uova ed embrioni, e gli individui adulti abbondano maggiormente nelle pescate verticali, eccettuati *Bosmina* e *Dhiaphanosoma* che non rifuggono dalle acque di superficie. Rarissimi esemplari di *Alona affinis* (tra i quali una femmina con embrione) abbiamo potuto osservarli soltanto in saggi di pescate verticali.

Il rotifero più comune e anche piuttosto abbondante è la cosmopolita *Keratella quadrata* nella var. *valga* caratteristica delle acque tropicali, e altre due specie tropicali frequenti nel Tana, specialmente il primo, sono il *Brachionus falcatus* e il *B. forficula* var. *divergens*; non è raro incontrare la *Tetramastix opoliensis*, la *Keratella cochlearis*, il *Pedalion oxyure*, *Pompholix complanata* e *P. sulcata*; qualche specie appartenente al genere *Synchaeta*, non ancora classificata per lo stato di conservazione, non si incontra ovunque, ma è frequente in alcune stagioni, così come la *Trichocerca capucina*. Una specie mal conservata di *Colurus*, la *Notholca foliacea* e il *Dinocharis pocillum* sono stati reperti del tutto occasionali finora.

I protozoi nel plancton del Tana sono rappresentati dalle *Diffugia*, dalla *Vorticella*, in elegante simbiosi con l'*Anabaena*, da qualche *Arcella vulgaris*; occasionalmente abbiamo riscontrato l'*Arcella dentata*, il *Phacus longicauda*, e il *Peridinium africanum*, ognuna delle due ultime specie soltanto una volta.

Tra le diatomee ricorderemo *Surirella elegans*, *S. robusta*, *S. Fülleborni* var. *elliptica*, *Cymatopleura elliptica*, *C. solea*, *Melosira italica* var. *tenuissima*, *M. ambigua*, *M. varians*, *Pleurosigma attenuatum*, *Gyrosigma Kützingerii*, *Synedra ulna*, *Epithemia turgida*, *Fragilaria virescens*, l'*Amphora ovalis* e l'*A. coffeiformis*, *Gomphonema* sp. e alcune altre specie ancora da studiare specialmente di *Synedra*, *Navicula*, *Cymbella*.

Tra le cloroficee appartenenti ai vari gruppi il *Pediastrum simplex* compare come forma dominante e vicino ad esso l'*Oocystis Borgei*, l'*Eudorina elegans*, il *Closterium polysticticum* e il *C. aciculare*, lo *Staurastrum gracile*, *S. leptocladium* e *S. sebaldi*, il *Botryococcus Brauni* sono specie assai frequenti, specialmente *Oocystis*, *Eudorina* e *Staurastrum*.

La *Microcystis aeruginosa*, tra le cianoficee, è molto diffusa in tutta la superficie del lago, mentre l'*Anabaena* che forma in alcune stazioni (specialmente presso Bahar Dar) una abbondante fioritura, manca in altre zone; ancora più rara è la *Microcystis flos-aquae*; altri generi di cianoficee non abitualmente planctoniche, come *Oscillatoria*, *Lyngbia*, *rivulariacee* ecc., compaiono in alcuni saggi insieme ad altre ancora oggetto di studio. In genere non si può dire che queste alghe dominino in nessuna delle stazioni studiate, se si eccettua la fioritura di *Anabaena*.

Dicendo che il plancton del Tana è in gran parte di origine potamoplanctonica, vogliamo precisare il concetto di potamoplancton.

Come è noto da un primo scritto dello Zacharias nel 1898 il quale ha discusso i risultati di Schütt sul plancton del Rio delle Amazzoni, vi sono forme potamoplanctoniche che hanno origine dalle acque stagnanti dalle

quali il fiume si alimenta. Ma vi sono anche forme che si riproducono nei fiumi a lento decorso. Anzi, secondo gli studi di Schröder sull'Oder, la produzione planctonica dei fiumi come è logicamente da attendersi, varia in ragione inversa alla velocità della corrente.

Schröder e Zimmer hanno poi chiamato ticopotamiche le forme derivanti dagli stagni ed eupotamiche quelle proprie che si riproducono nei fiumi. Vi sono poi forme bentopotamiche, come ricorda Carpenter, in relazione colla vita di fondo, e tali sono in generale le Oscillatorie, e tra i protisti l'*Arcella*.

Cosicchè in sostanza ha ragione il Brehm nell'ammettere che il cosiddetto potamoplancton rappresenti un insieme di forme eterogenee rispetto alla sua origine.

Lauterbon poi, nei suoi studi sul Reno, nota giustamente che la fauna dei fiumi è influenzata dagli accessi di quella dei laghi e dei torrenti.

In un suo più recente interessante studio sulla vita del Volga, con una introduzione sulla biologia fluviale, il Behning torna su questi problemi.

Il Behning precisando le esposizioni di precedenti autori ha cercato di meglio individuare i caratteri del potamoplancton in un fiume a lungo decorso per vasto tratto in cui la corrente non è forte. Egli ha trovato che nel Volga le diatomee sono tra le forme predominanti.

In seguito tra le alghe vengono le clorofcee. Tra gli animali, secondo Behning, i rotiferi hanno un'importanza pari alle diatomee tra le piante. Anche i cladoceri e in minor grado i copepodi non sono da trascurare.

Se si osservano complessivamente i caratteri del Tana si riscontrano essenzialmente generi menzionati dal Zacharias, dal Behning e dal Thienemann per il potamoplancton. Così il predominio delle diatomee e delle clorifcee e quello dei cladoceri e dei rotiferi. I cladoceri hanno però più importanza dei rotiferi. Questo si spiega perchè mancando in generale una flora sommersa dominano solo alcuni generi di rotiferi e mancano quelli che conducono una vita in parte legata a quella delle piante. D'altra parte la ricchezza dei cladoceri è anche in rapporto con la gronda soggetta a sommersioni per i suoi caratteri ticoplanctonici, ossia di plancton di stagno.

Non solo non c'è tra i risultati dello studio del plancton e quelli dei geologi alcuna contraddizione, ma invece lo studio del plancton del Tana per il suo carattere suffraga l'origine del Tana da uno sbarramento fluviale, che ha determinato un lago oligotrofo di scarso fondale.

Vi è da rilevare tra le caratteristiche del plancton del Tana una interessante simbiosi tra la *Anabaena* e la *Vorticella*. Essa è molto diffusa e credevamo anzi potesse servire come un'indice caratteristico per il plancton di questo lago, senonchè da un accurato esame della bibliografia è risultato che tale simbiosi è già nota nelle acque della Svezia, mentre nel lago Rodolfo le Vorticelle vivono in simbiosi con un protista (*Thuricola loricae*). Ciò non toglie costituisca una particolarità degna di nota.

Naturalmente può trattarsi di una convergenza e per quanto riguarda il Tana la frequenza di questa simbiosi può anche avere origine della scarsità della vegetazione sommersa.

Se paragoniamo i risultati dello studio del plancton del Tana, che era del tutto sconosciuto, a quello di maggiori laghi africani come il Tanganica, si vede subito che si tratta per il Tana di un lago assai povero di forme, ciò che è in relazione alla sua minore estensione, alla più piccola profondità, alla minore ricchezza di sali nutritivi, alla origine certamente più recente.

Lo studio del Tana colma perciò una lacuna nello studio della limnologia tropicale, rappresentandoci un tipo caratteristico ed eccezionale di lago oligotrofico tropicale. Disgraziatamente la durata della missione fu troppo breve per avere il ciclo completo delle osservazioni e delle raccolte di un anno, per poter costruire delle curve sui massimi e minimi di plancton. Questa deficienza è attenuata dal fatto già osservato da Busahkiel nei laghi tropicali olandesi, che nelle acque dei tropici la differenza di troficità — nel caso esistesse — dovrebbe essere più in relazione col periodo della siccità e delle piogge che con quello delle temperature stagionali.

Nel Congresso di Limnologia del 1927, Brunelli richiamò l'attenzione degli studiosi sulla necessità che le grandi Nazioni procedessero a sistematiche ricerche sui laghi tropicali, voto che fu accolto e dopo poco attuato dalla grande spedizione tedesca per lo studio dei laghi tropicali delle Indie Olandesi, condotta con sistematiche ricerche da eminenti limnologi che hanno permesso al Thienemann di trarre alcune conclusioni fondamentali sulla eutrofia dei laghi tropicali. Per le Indie olandesi riteniamo giusta questa conclusione del Thienemann, l'oligotrofia del Tana essendo legata a circostanze assai peculiari della sua origine della quale abbiamo accennato.

Siamo lieti che non appena conquistata l'Etiopia anche l'Italia abbia potuto portare un notevole contributo a tali studi, contributo che deve però segnare solo una tappa nello sviluppo di successive e sistematiche ricerche.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla riduzione a forma normale delle equazioni gravitazionali dell'Einstein.* Nota di A. FINZI, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Le equazioni gravitazionali di Einstein (col ben noto significato dai vari simboli)

$$(1) \quad E_{ik} \equiv G_{ik} - \frac{1}{2} G g_{ik} = -\kappa T_{ik}$$

costituiscono un sistema di dieci equazioni differenziali del 2° ordine nelle dieci funzioni incognite g_{ik} delle quattro variabili indipendenti X^0, X^1, X^2, X^3 dove le g_{ik} sono i coefficienti del:

$$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik} dx^i dx^k$$

che definisce la metrica del cronotopo.

È noto (e lo richiamai, con qualche complemento, nella mia dissertazione di laurea, testè presentata alla facoltà di Scienze di Roma) che il sistema (1) non è riducibile a forma normale senza introdurre qualche relazione supplementare.

Questo è del resto conseguenza del carattere invariantivo delle equazioni gravitazionali di fronte a qualsivoglia trasformazione delle variabili indipendenti.

È stato mostrato dal matematico ungherese Lanczòs⁽²⁾, ora professore alla Purdue University (Lafayette, Indiana), come, mediante un'opportuna particolarizzazione delle variabili, esposta anche nel trattato dello Chazy⁽³⁾ si passi dalle (1) a un sistema, che ne è necessaria conseguenza e consta sostanzialmente di un sistema normale e di quattro ulteriori equazioni.

Qui mi propongo di dimostrare come queste ultime siano compatibili con il sistema normale, nel senso che, se esse si suppongono verificate, assieme alle loro derivate prime, dai valori iniziali del problema (assegnati, cioè, per un particolare valore della variabile x^0 , che ha carattere temporale), esse rimangono soddisfatte per qualsiasi x^0 .

(1) Nella seduta del 3 aprile 1938.

(2) « Physikalische Zeitschrift », p. 537, 1922.

(3) CHAZY, *Théorie de la relativité*. Vol. II. Paris, Gauthier-Villars, 1930.

Questo dimostra rigorosamente (almeno nel campo analitico) la risolubilità del problema di Cauchy per le equazioni gravitazionali di Einstein, purchè si imponga qualche vincolo ai valori iniziali delle g_{ik} e delle loro derivate prime.

2. Cominciamo con l'esporre il criterio del Lanczòs: a questo scopo giova dapprima scrivere le equazioni gravitazionali in una forma lievemente diversa.

Introduciamo l'invariante lineare del tensore energetico

$$T = \sum_{ik}^3 g^{ik} T_{ik},$$

indi moltiplichiamo le (1) per g^{ik} e sommiamo rispetto ai due indici; otteniamo così

$$\mathfrak{S} - \frac{1}{2} \mathfrak{S} \cdot 4 = -\kappa T$$

cioè

$$(2) \quad \mathfrak{S} = \kappa T,$$

che permette di scrivere le (1) nella forma equivalente:

$$\mathfrak{S}_{ik} = -\kappa \left(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T \right) = -\kappa T_{ik} \quad (i, k = 0, 1, 2, 3).$$

Ricordiamo ora dal calcolo differenziale assoluto, che, dato un sistema semplice covariante f_k (momenti di un vettore funzione del posto), l'espressione invariante:

$$\Theta = \sum_{ik}^3 g^{ik} f_{k|i}$$

prende il nome di divergenza del sistema: con opportune trasformazioni essa si può portare a prendere l'altra forma equivalente:

$$\Theta = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_i^3 \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{-g} \sum_k^3 g^{ik} f_k \right).$$

In particolare le f_k possono essere le componenti del gradiente di una funzione invariante f : in tal caso l'annullarsi della divergenza esprime per la f una proprietà che può considerarsi come un'estensione del carattere di armonicità in una metrica euclidea.

È chiaro che, assegnata comunque una metrica, sarà sempre possibile trovare quattro funzioni indipendenti, che soddisfacciano alla proprietà sopra enunciata, siano cioè soluzioni di una certa equazione a derivate parziali

del 2° ordine; potremo allora assumere le quattro funzioni come nuove coordinate: siffatte coordinate si diranno *isometriche*.

Le condizioni di isometria per un sistema di coordinate

$$x^j \quad (j = 0, 1, 2, 3)$$

sono in conformità

$$\Theta x^j = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_0^3 \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{-g} g^{ij}) = \sum_0^3 \frac{\partial \log \sqrt{-g}}{\partial x^i} g^{ij} + \sum_0^3 \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^i} = 0$$

$$(j = 0, 1, 2, 3).$$

Poniamo poi:

$$(3) \quad Z_k = \sum_0^3 g_{jk} \Theta x^j = \frac{\partial \log \sqrt{-g}}{\partial x^k} + \sum_0^3 g_{jk} \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^i}$$

con che, in coordinate isometriche, le Z_k sono tutte nulle:

$$(4) \quad Z_k = 0 \quad (k = 0, 1, 2, 3).$$

Dalle identità

$$\sum_0^3 g_{kj} g^{ij} = \delta_k^i,$$

per derivazione, si ottiene:

$$\sum_0^3 \left(-\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} g^{ij} + g_{kj} \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^i} \right) = 0$$

e si può così attribuire alle espressioni delle Z_k la forma

$$(5) \quad Z_k = \frac{\partial \log \sqrt{-g}}{\partial x^k} - \sum_0^3 g^{ij} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}.$$

Giovandosi di questa, si può, con semplice verifica, provare che il sistema

$$(6) \quad \mathfrak{G}_{ik} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial Z_k}{\partial x^i} + \frac{\partial Z_i}{\partial x^k} \right) = -x T_{ik}$$

è normale.

Cominciamo col ricordare che è

$$(7) \quad \left\{ \begin{matrix} i & k \\ l & \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \sum_0^3 g^{lh} \left(\frac{\partial g_{hk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{hi}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^h} \right).$$

Inoltre è

$$(8) \quad \mathfrak{G}_{ik} = \sum_0^3 g^{jh} (ij, hk) = \sum_0^3 g^{jh} \left(\frac{\partial \left[\begin{matrix} i & h \\ j & \end{matrix} \right]}{\partial x^k} - \frac{\partial \left[\begin{matrix} i & k \\ j & \end{matrix} \right]}{\partial x^h} + \dots \right) =$$

$$= \sum_0^3 \left(\frac{\partial \left\{ \begin{matrix} i & h \\ & h \end{matrix} \right\}}{\partial x^k} - \frac{\partial \left\{ \begin{matrix} i & k \\ & h \end{matrix} \right\}}{\partial x^h} + \dots \right),$$

dove i termini che si trascurano non contengono derivate seconde e sono di secondo grado nelle derivate prime delle g_{ik} .

Dalle (7) si ricava poi

$$(9) \quad \sum_h^3 \left\{ \begin{matrix} i & h \\ h & h \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \sum_{jh}^3 g^{jh} \frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i} = \frac{\partial \log \sqrt{-g}}{\partial x^i}.$$

Tenendo conto delle identità (7), (8) e (9) si ottiene:

$$\mathcal{S}_{ik} = \frac{\partial^2 \log \sqrt{-g}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{1}{2} \sum_{hj} g^{hj} \left(\frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^h} + \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^h \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^h} \right) + \dots$$

Usufruendo di quest'ultima relazione e delle (5), si può attribuire alle (6) (che, in variabili isometriche, non differiscono dalle equazioni gravitazionali di Einstein) la forma:

$$(10) \quad \mathcal{S}_{ik} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial Z_k}{\partial x_i} + \frac{\partial Z_i}{\partial x^k} \right) + x \tau_{ik} = \frac{1}{2} \sum_{jh}^3 g^{jh} \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^h} + x \tau_{ik} + q_{ik} = 0,$$

dove con q_{ik} si è indicato l'insieme dei termini di secondo grado nelle derivate prime delle g_{ih} (o delle g^{ik}), che, per brevità, avevamo accennato con puntini in talune delle formule precedenti.

Si vede facilmente che, in generale, le (10) costituiscono, come avevamo asserito, un sistema normale: risolvendole, per esempio, rispetto alle derivate seconde rapporto a x^0 si ottiene:

$$(10^*) \quad \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^{02}} = \frac{-1}{g^{00}} \sum_{(h+j>0)}^3 g^{hj} \left(\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^h} + 2 q_{ik} + 2 x \tau_{ik} \right) \\ (i, k = 0, 1, 2, 3),$$

il caso di eccezione presentandosi soltanto per $g^{00} = 0$, il che è da escludere, allorchando x^0 sia una effettiva variabile temporale.

In generale si può verificare, che, quando si assegnino i valori iniziali del problema su di una varietà della famiglia $f(x^0, x^1, x^2, x^3) = \text{cost.}$, le caratteristiche del sistema (10) risultano definite dalla classica equazione di Jacobi-Hamilton:

$$(11) \quad \frac{1}{2} \sum_{ik}^3 g^{ik} p_i p_k = 0$$

dove, secondo l'uso, si sono indicate con p_i le derivate $\frac{\partial f}{\partial x^i}$.

Per compiere questa verifica⁽¹⁾ basta sostituire nelle (10) le derivate $\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^h}$ con $\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial Z^2} p_j p_h + \dots$: la condizione perchè si annulli il deter-

(1) Cfr. LEVI-CIVITA, *Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa*. Bologna-Zanichelli, pp. 10-16, 1931.

minante delle derivate seconde rapporto a Z sarà allora data appunto dalla (11).

Notiamo che il risultato del Lanczòs non permette ancora, di per se stesso, di studiare la propagazione ondosa relativa alle equazioni di Einstein; esso non assicura neppure l'esistenza di soluzioni dell'originario sistema (1), ma dice soltanto che queste soluzioni, se esistono, sono soluzioni anche di un particolare sistema normale.

In altri termini il calcolo fatto stabilisce l'equivalenza del sistema costituito dalle (1) e dalle (4) con le equazioni (10) alle quali siano pure associate le condizioni (4).

Occorre però ora mostrare come le (4) siano effettivamente compatibili con il sistema normale (10): ne risulterà, come si voleva, l'esistenza di soluzioni per le equazioni gravitazionali.

Cominciamo col notare che dalle (2) e dalle (10) si ottiene:

$$(12) \quad E_{ik} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial Z_k}{\partial x^i} + \frac{\partial Z_i}{\partial x^k} \right) + \kappa T_{ik} = 0.$$

È d'uopo ora ricordare una proprietà delle equazioni (1): che soddisfano identicamente alle quattro relazioni:

$$(13) \quad \sum_k^3 (E_{ik} + \kappa T_{ik})|{}^k = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3),$$

dove il simbolo $|{}^k$ di derivazione contravariante è un operatore la cui parte differenziale si riduce a:

$$(14) \quad \sum_0^3 g^{hk} \frac{\partial}{\partial x^h}.$$

Dalle (12) e dalle (13) si ricavano le quattro equazioni:

$$(15) \quad \sum_k \left(\frac{\partial Z_k}{\partial x^i} + \frac{\partial Z_i}{\partial x^k} \right)|{}^k = 0$$

le quali costituiscono (e lo si può verificare senza difficoltà tenendo presente che la parte differenziale dell'operatore $*$ è fornita dalla (14)) un sistema differenziale del 2° ordine nelle quattro funzioni Z , di tipo normale.

Ciò premesso, arriviamo al punto fondamentale della nostra deduzione, che consiste nel rilevare che il sistema normale (10), o (10*), associato alle equazioni (4) di isometria, equivale allo stesso sistema (10) con le condizioni *iniziali*

$$(16) \quad Z_k = 0 \quad ; \quad \frac{\partial Z_k}{\partial x^0} = 0$$

debitamente interpretate.

Di queste le $Z_k = 0$ sono direttamente, in virtù della espressione (5) delle Z_k , relazioni fra le g_{ik} e le loro derivate prime; invece le $\frac{\partial Z_k}{\partial x^0} = 0$, implicano apparentemente anche le derivate seconde delle g_{ik} .

Fra queste tuttavia quelle che si ottengono derivando due volte le g rapporto a x^0 , si possono sostituire con le loro espressioni fornite dalle (10*), le altre invece si possono ricavare per derivazione dai dati iniziali del problema.

Il risultato di questo calcolo è che le condizioni per le g_{ik} e le loro derivate prime sono:

$$\begin{aligned} Z_k &= \frac{\partial \log \sqrt{-g}}{\partial x^k} - \sum_{ij}^3 g^{ij} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, 3) \\ -\frac{\partial Z_k}{\partial x^0} &= \sum_{ij}^3 \left(\frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^0} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^0} + \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^0} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \right) + \\ &+ \sum_j^3 \sum_i^3 g^{ij} \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^0} - \frac{1}{g^{00}} \sum_j^3 g^{0j} \sum_{i+h>0}^{ih} \left(g^{ih} \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^h} + 2 q_{jk} + 2 x \tau_{jk} \right) = 0 \\ &\quad (k = 1, 2, 3) \\ -\frac{\partial Z_0}{\partial x^0} &= \sum_{ij}^3 \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0} \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^0} + \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^0} \frac{\partial g_{0j}}{\partial x^i} \right) + \sum_j^3 \sum_i^3 g^{ij} \frac{\partial^2 g_{j0}}{\partial x^i \partial x^0} - \\ &- \frac{1}{g^{00}} \sum_j^3 g^{0j} \sum_{i+h>0}^{ih} \left(g^{ih} \frac{\partial^2 g_{0j}}{\partial x^i \partial x^h} + 2 q_{j0} + 2 x \tau_{j0} \right) - \\ &- \frac{1}{2 g^{00}} \sum_{ij}^3 g^{ij} \sum_{h+l>0}^{hl} \left(g^{hl} \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^h \partial x^l} + 2 q_{ij} + 2 x \tau_{ij} \right) \end{aligned}$$

che costituiscono dunque otto relazioni fra le venti quantità g_{ik} e $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^0}$.

Per dimostrare l'annunciata equivalenza basta rilevare che:

1) il sistema normale (10), associato alle condizioni iniziali (16) (il che vuol dire semplicemente sotto condizioni iniziali che verifichino le (16)), definisce univocamente, per x^0 sufficientemente piccolo, le funzioni g_{ik} ;

2) le Z , definite, mediante le loro espressioni (5), da questi valori delle g_{ik} , soddisfano al sistema normale del secondo ordine (15), il quale le determina univocamente a partire dai valori iniziali di esse e delle loro derivate rapporto a x^0 .

In particolare essendo le (15) stesse lineari e omogenee nelle Z e loro derivate, si ha identicamente:

$$Z_k = 0 \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

a partire dai valori iniziali nulli delle Z_k e loro derivate prime.

Da quanto precede risulta che le determinazioni delle g_{ik} , fornite dalle (10), con le condizioni iniziali (16) rendono soddisfatte le $Z_k = 0$ in tutto il campo di applicabilità dei teoremi di esistenza: rimangono quindi anche verificate le originarie equazioni di Einstein.

In definitiva possiamo ritenere:

Sta di fatto, come già dimostrò il Lanczòs, che, associando le condizioni di isometria (delle ipersuperficie coordinate) alle equazioni gravitazionali dell'Einstein, queste si riducono a forma normale [(10) o (10*)]; ma non si può viceversa asserire che tale forma normale includa senz'altro la specificazione isometrica; nè che questa si riduca a quattro condizioni da imporre ai valori iniziali delle g e loro derivate prime. In realtà si richiedono soltanto condizioni iniziali, ma queste sono in numero di otto [le nostre equazioni (16)], e non soltanto di quattro.

Matematica. — *Sulla unirazionalità dell'ipersuperficie algebrica del quinto ordine.* Nota di U. MORIN, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. A. COMESSATTI.

In questa Nota verifico che l'ipersuperficie generale del quinto ordine di uno spazio lineare S_r , $r \geq 17$, è unirazionale; cioè che l'equazione

$$f(x_1, x_2, \dots, x_r) = 0,$$

in cui f è un polinomio di quinto grado ed $r \geq 17$, può essere risolta con delle funzioni razionali di $r - 1$ parametri

$$x_i = F_i(y_1, y_2, \dots, y_{r-1}) \quad (i = 1, \dots, r),$$

in generale non razionalmente invertibili.

Acquista così maggiore interesse la domanda che ho posta in una precedente Nota⁽²⁾, cioè se, per r opportunamente grande, l'ipersuperficie generale di qualunque ordine sia unirazionale.

1. Si consideri l'ipersuperficie algebrica generale del quinto ordine, $M_{r-1}^{(5)}$, di uno spazio lineare S_r , con $r \geq 17$. Nella $M_{r-1}^{(5)}$ sono contenuti degli spazi lineari S_3 e la dimensione dell'insieme di questi spazi, come si rileva con un computo di costanti che dà, come ho avuto altrove occasione di rilevare⁽³⁾, un risultato esatto, è $4(r - 17)$.

(1) Nella seduta del 3 aprile 1938.

(2) U. MORIN, *Sulla unirazionalità delle ipersuperficie algebriche del quarto ordine.* Questi «Rendiconti», to. XXIV (6), 1936.

(3) U. MORIN, *Sull'insieme degli spazi lineari contenuti in un'ipersuperficie algebrica.* Questi «Rendiconti», to. XXIV (6), 1936.

2. Si consideri uno degli spazi S_3 della $M_{r-1}^{(5)}$, che indichiamo con Σ . Si fissino inoltre un iperpiano generico Π dell' S_r , e in questo iperpiano uno spazio lineare S_{r-6}^* ed un piano α , generici. Indichiamo con τ il piano comune agli spazi Σ e Π , e fissiamo in questo piano un punto generico A .

3. Siano Y un punto generico dello spazio Σ ed y_1, y_2, y_3 coordinate proiettive non omogenee di Y in Σ . Consideriamo il cono K (col vertice in Y) formato dalle rette g che hanno coll'ipersuperficie $M_{r-1}^{(5)}$ un contatto quadripunto in Y . Questo cono ha, come noto ⁽¹⁾, la dimensione $r-3$ (cioè come insieme delle generatrici g la dimensione $r-4$), appartiene allo spazio S_{r-1} tangente alla $M_{r-1}^{(5)}$ in Y , ed è la intersezione completa di un cono quadrico Q e di un cono cubico T (contenuti nell' S_{r-1} tangente e ad $r-2$ dimensioni).

Il cono K ha in comune con la $M_{r-1}^{(5)}$ una varietà M_{r-4} , ad $r-4$ dimensioni, che è riferita *prospettivamente* all'insieme delle generatrici g di K , poichè una g ha in comune con la $M_{r-1}^{(5)}$, fuori del punto Y , un solo punto.

Dell'insieme delle g di K , e quindi della M_{r-4} , daremo una rappresentazione unirazionale che dipende razionalmente anche da Y . Assumendo allora in questa rappresentazione* come parametri anche le coordinate y_1, y_2, y_3 di Y si ottiene la cercata rappresentazione unirazionale della $M_{r-4}^{(5)}$ nell' S_{r-1} .

4. Per ottenere la rappresentazione unirazionale dell'insieme delle g di K , seghiamo l' S_{r-1} tangente in Y ed il cono K in esso contenuto coll'iperpiano Π (n. 2). Otteniamo così in Π un S_{r-2}^* e una varietà M_{r-4}^* (che contiene il piano τ) prospettiva alla M_{r-4} (n. 3). La M_{r-4}^* è l'intersezione completa di una forma quadratica e di una forma cubica, sezioni coll' S_{r-2}^* dei coni Q e T (n. 3).

Lo S_{r-2}^* ha in comune con lo spazio S_{r-6}^* che abbiamo fissato in Π (n. 2) uno spazio S_{r-7}^* . Le coordinate di un punto generico P di questo S_{r-7}^* si possono esprimere con funzioni razionali di $r-7$ parametri (non omogenei) y_4, \dots, y_{r-4} e delle coordinate y_1, y_2, y_3 del punto Y che individua l' S_{r-7}^* .

5. Consideriamo lo spazio S_5 individuato dentro all' S_{r-2}^* (n. 4) dal piano τ , dalla retta a intersezione del piano α (n. 2) coll' S_{r-2}^* e dal punto P dell' S_{r-7}^* .

Questo S_5 sega la M_{r-4}^* (o ciò che è lo stesso il cono K) secondo una varietà algebrica M_3 , a tre dimensioni, intersezione completa di una

(1) E. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*. G. Principato. Messina, 1923, p. 202.

forma quadrica Q^* ed una forma cubica T^* dell' S_5 (sezioni dei coni Q e T coll' S_5).

6. La M_3 dell' S_5 , intersezione di una forma quadratica ed una forma cubica generiche, è la celebre varietà della quale Fano ha provata la irrazionalità ed Enriques la unirazionalità ⁽¹⁾.

Riguardando la semplice ed elegante costruzione del riferimento unirazionale della M_3 all' S_3 ⁽²⁾, si vede che le irrazionalità (nei coefficienti) di questo riferimento dipendono esclusivamente dalla determinazione di un punto A della M_3 e di una delle due schiere di ∞^3 piani contenute nella quadrica per la M_3 . Ed è pure immediato che quella costruzione non cade in difetto per la nostra M_3 del n. 5, la quale presenta unicamente la particolarità, rispetto al caso generale, di contenere un piano (cioè il piano τ) ⁽³⁾.

7. Della nostra M_3 (n. 5) è conosciuto il punto A (n. 2) ed il piano τ individua, dentro alla forma quadrica Q^* per la M_3 , quella schiera di ∞^3 piani che lo contiene.

Dunque, in base al n. 6, non solo potremo esprimere le coordinate del punto generico della M_3 con funzioni razionali F_i di tre parametri non omogenei $y_{r-3}, y_{r-2}, y_{r-1}$ ma queste funzioni saranno razionali anche rispetto ai parametri che individuano la M_3 , cioè saranno funzioni razionali anche dei parametri y_1, y_2, y_3 e y_4, \dots, y_{r-4} che individuano i punti Y e P (n. 4).

Se infine nelle F_i interpretiamo come parametri simultaneamente tutti gli y_1, y_2, \dots, y_{r-1} otteniamo una rappresentazione unirazionale della $M_{r-1}^{(5)}$.

(1) Cioè la rappresentazione birazionale della M_3 sopra un'involuzione dello spazio lineare S_3 , fornendo così l'esempio di un'involuzione non razionale dello spazio.

(2) F. ENRIQUES, *Sopra una involuzione non razionale dello spazio*. Questi «Rendiconti», to. XXI (5), 1912.

(3) Per sviluppare il ragionamento di ENRIQUES (loc. cit., p. 82, riga 13) a partire dal nostro punto A della M_3 , basterà che la M_3 possenga un numero finito di piani (come il piano τ); ciò che è immediato ove si pensi che una $M_{16}^{(5)}$ di un S_{17} ha solo un numero finito di spazi S_3 (n. 1).

Matematica. — *Sulla geometria proiettivo-differenziale delle famiglie di superficie.* Nota di I. POPA, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. E. BOMPIANI.

1. In due Note Lincee ⁽²⁾, il prof. Bompiani ha presentato la geometria delle varietà anolonome sotto un punto di vista naturale e ne ha fatto uno studio quasi esauriente. Alla fine della seconda Nota, sono accennati diversi problemi che si collegano a quest'ordine di ricerche.

È noto — ed è questo uno dei primi risultati interessanti della geometria delle varietà anolonome ⁽³⁾ — che gli intorni del 2° ordine delle curve integrali di un'equazione di Pfaff, passanti per un punto, si distribuiscono sopra una calotta superficiale (*calotta osculatrice* secondo Bompiani). Vale a dire che la stessa equazione fa corrispondere ad ogni punto dello spazio proiettivo a tre dimensioni una calotta superficiale del 2° ordine. Ed allora si potrebbe pensare di fare lo studio proiettivo-differenziale di una famiglia di superficie — non soltanto di calotte del 2° ordine — dipendenti da un parametro e tali che, almeno in una conveniente regione dello spazio, per ogni punto ne passi una sola. È appunto questo il problema che mi propongo di studiare in questa Nota; a qualche altro mi contenterò di accennare alla fine.

2. Siano

$$(1) \quad x = x(u, v; \omega)$$

le equazioni parametriche di una superficie Σ_ω della famiglia Ω . Supposta l'esistenza di tutte le derivate occorrenti delle funzioni x rispetto ad u, v ed ω , la condizione imposta più sopra mostra che i punti x, x_u, x_v, x_ω sono linearmente indipendenti. È lecito, dunque, considerare lo spazio proiettivo riferito al tetraedro avente questi punti come vertici; rispetto ad esso, un punto P qualunque avrà delle coordinate $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ cioè che vuol dire

$$(P) \equiv \alpha_1 x + \alpha_2 x_u + \alpha_3 x_v + \alpha_4 x_\omega.$$

(1) Nella seduta del 3 aprile 1938.

(2) E. BOMPIANI, *Sulle varietà anolonome, e in particolare sulle V_3^2 di S_3 proiettivo.* «Rend. Acc. Naz. dei Lincei», vol. XXVII, Nota I e II, pp. 37-52, 1938.

(3) A. VOSS, *Zur Theorie der allgemeinen Punktebenensysteme.* «Math. Annalen», Bd. 23, pp. 45-81, 1884.

Particolarmente, si possono rappresentare nello stesso modo i punti derivati secondi, cioè

$$(2) \quad x_{uu} = \lambda_1 x + \lambda_2 x_u + \lambda_3 x_v + \lambda_4 x_\omega \equiv \{\lambda x\} \quad ; \quad x_{uv} = \{\mu x\} \quad ; \\ x_{vv} = \{\nu x\} \quad ; \quad x_{u\omega} = \{\rho x\} \quad ; \quad x_{v\omega} = \{\sigma x\}.$$

Sia O' un punto infinitamente vicino ad O , non situato nel piano tangente alla corrispondente superficie Σ_0 ; esso sarà rappresentato da

$$x + dx = x + x_u du + x_v dv + x_\omega d\omega \quad (\text{con } d\omega \equiv 0)$$

dunque avrà le coordinate locali $(1, du, dv, d\omega)$.

Il piano tangente alla superficie $\Sigma_{O'}$ nel punto O' stesso ha l'equazione

$$(\pi') \equiv \begin{vmatrix} \alpha_2 - \alpha_1 du & \alpha_3 - \alpha_1 dv & \alpha_4 - \alpha_1 d\omega \\ 1 + A_2 - A_1 du & A_3 - A_1 dv & A_4 - A_1 d\omega \\ B_2 - B_1 du & 1 + B_3 - B_1 dv & B_4 - B_1 d\omega \end{vmatrix} = 0,$$

dove

$$A_i = \lambda_i du + \mu_i dv + \rho_i d\omega \quad ; \quad B_i = \mu_i du + \nu_i dv + \sigma_i d\omega \quad \text{per } i = 1, 2, 3, 4.$$

Tralasciando gli infinitesimi di ordine superiore al primo, si ha:

$$(\pi') \equiv \alpha_1 d\omega + \alpha_2 A_4 + \alpha_3 B_4 - \alpha_4 (1 + A_2 + B_3) = 0$$

e il limite della sua intersezione col piano tangente a Σ_0 in O (cioè col piano di equazione $\alpha_4 = 0$) è la retta di equazioni

$$(3) \quad \alpha_1 d\omega + \alpha_2 A_4 + \alpha_3 B_4 = \alpha_4 = 0.$$

Dunque: Ad ogni retta $\frac{\alpha_2}{du} = \frac{\alpha_3}{dv} = \frac{\alpha_4}{d\omega}$ corrisponde quella rappresentata dalle equazioni (3). Questa omografia è un caso particolare di quella che Bompiani chiama, nel caso anolonomo, *proiettività di cella*.

Nel piano tangente π a Σ_0 si possono prendere come spigoli $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$, $\alpha_2 = \alpha_4 = 0$ le tangenti asintotiche della superficie Σ_0 . Ed allora $\lambda_4 = \nu_4 = 0$.

Per trovare una retta per O uscente dal piano tangente — ed allora la precedente omografia ne determinerà una nel piano tangente π — adopereremo la seguente costruzione dovuta pure al prof. Bompiani: siano t_1, t_2 le tangenti asintotiche a Σ_0 in O e t'_1, t'_2 quelle di $\Sigma_{O'}$ in O' . Le rette t_1 e t'_1 sono generalmente sghembe fra di loro. La condizione affinché queste rette s'incontrino è che la retta OO' descriva il cono quadrico

$$(4) \quad A_3 d\omega = A_4 dv \quad \text{cioè} \quad (\lambda_3 \alpha_2 + \mu_3 \alpha_3 + \rho_3 \alpha_4) \alpha_4 = (\mu_4 \alpha_3 + \rho_4 \alpha_4) \alpha_3.$$

Nello stesso modo, le rette t_2 e t'_2 sono incidenti se la retta OO' appartiene al cono

$$(5) \quad B_4 du = B_2 d\omega \quad \text{cioè} \quad (\mu_2 \alpha_2 + \nu_2 \alpha_3 + \sigma_2 \alpha_4) \alpha_4 = (\mu_4 \alpha_2 + \sigma_4 \alpha_4) \alpha_2.$$

Si potrebbe prendere come spigolo del riferimento una delle quattro rette comuni ai coni (4) e (5). Per evitare tali indeterminazioni, seguiremo un suggerimento dovuto al prof. Enea Bortolotti: il piano polare della tangente t_1 ($\alpha_2 = \alpha_4 = 0$) rispetto al cono (4) ha l'equazione

$$(\mu_3 - \rho_4) \alpha_4 = 2 \mu_4 \alpha_3;$$

quello polare di t_2 ($\alpha_3 = \alpha_4 = 0$) rispetto al cono (5) ha l'equazione

$$(\mu_2 - \sigma_4) \alpha_4 = 2 \mu_4 \alpha_2.$$

Prendiamo come spigolo $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ l'intersezione n di questi piani; ne segue

$$\mu_3 = \rho_4, \quad \mu_2 = \sigma_4.$$

A questa retta, l'omografia (3) fa corrispondere la retta:

$$\alpha_1 + \alpha_2 \rho_4 + \alpha_3 \rho_4 = \alpha_4 = 0.$$

Presa, questa retta, come ulteriore spigolo nel piano tangente π , segue $\rho_4 = 0$, $\sigma_4 = 0$.

Dunque questa scelta del riferimento porta: $\lambda_4 = \nu_4 = \mu_2 = \mu_3 = \sigma_4 = \rho_4 = 0$.

La retta n così definita dipende dall'intorno di 2° ordine tanto della superficie Σ_0 quanto di quella infinitamente vicina $\Sigma_{0'}$. Per trovare un punto su essa (e finire la determinazione del riferimento) si deve ricorrere ad un intorno di ordine superiore. Si potrebbe introdurre l'intorno pure del 2° ordine ma di una superficie $\Sigma_{0''}$ — cioè facendo comparire le derivate seconde $x_{\omega\omega}$ —. Invece di far così, consideriamo l'intorno del 3° ordine di Σ_0 . Come vedremo, questo intorno di 3° ordine di Σ_0 insieme con quello di 2° ordine di $\Sigma_{0'}$ basta per definire il riferimento. Invece, per una superficie sola occorre, com'è noto, considerare l'intorno del 4° ordine.

A tale scopo, consideriamo la congruenza \mathfrak{N} delle rette n .

Un punto generico di n , differente da O , ha delle coordinate

$$ax + x_\omega, \quad \text{con } a \text{ arbitrario.}$$

La retta n_1 relativa al punto $O_1(du, dv; d\omega \equiv 0)$ sarà descritta dal punto

$$\begin{aligned} a dx + dx_\omega &= a(x_u du + x_v dv) + x_{u\omega} du + x_{v\omega} dv \\ &= a(x_u du + x_v dv) + \{\rho x\} du + \{\sigma x\} dv \end{aligned}$$

La retta n_1 incontra n se du/dv soddisfa l'equazione

$$(6) \quad (\rho_3 du + \sigma_3 dv) du = (\rho_2 du + \sigma_2 dv) dv.$$

Questa equazione rappresenta perciò le sviluppabili della congruenza \mathfrak{N} . Si vede subito che i fuochi, situati su n , sono dati dall'equazione

$$(7) \quad (a + \rho_2)(a + \sigma_3) = \rho_3 \sigma_2.$$

Prenderemo come ulteriore vertice del tetraedro di riferimento il coniugato armonico di O rispetto alla coppia di questi fuochi. Ne segue

$$\rho_2 + \sigma_3 = 0.$$

Rimane, per definire un riferimento proiettivo, trovare un punto unità (non situato sulle faccie del precedente tetraedro). Si può procedere così:

Consideriamo la conica del piano tangente involupata dalle rette corrispondenti per l'omografia (3) alle generatrici del cono quadrico (4). Essa è rappresentata dall'equazione

$$(8) \quad 4(\lambda_3 \alpha_1 - \mu_4 \rho_3 \alpha_3) \alpha_3 = \lambda_3^2 \alpha_2^2.$$

Nello stesso modo, partendo dal cono (5), si troverà una seconda conica:

$$(9) \quad 4(\nu_2 \alpha_1 - \mu_4 \sigma_2 \alpha_2) \alpha_2 = \nu_2^2 \alpha_3^2.$$

La conica (8) è incontrata dalla tangente asintotica $\alpha_2 = \alpha_4 = 0$, all'infuori di O , in un punto che prenderemo come punto unità su questo spigolo. Ne segue:

$$\lambda_3 = \mu_4 \rho_3.$$

Similmente, si troverà un punto unità sull'altro spigolo ($\alpha_3 = \alpha_4 = 0$) e sarà:

$$\nu_2 = \mu_4 \sigma_2.$$

Abbiamo dunque un punto unità nel piano tangente. Per trovarne uno nello spazio basta trovare un piano non passante per n . Si può trovarne uno, nel modo seguente: il piano $\alpha_2 = 0$ sega il cono (5), all'infuori della tangente $\alpha_2 = \alpha_4 = 0$, lungo la retta rappresentata dalle equazioni:

$$(10) \quad \nu_2 \alpha_3 + \sigma_2 \alpha_4 = \alpha_2 = 0.$$

L'intersezione del piano $\alpha_3 = 0$ e del cono (4) fornirà la retta:

$$(11) \quad \lambda_3 \alpha_2 + \rho_3 \alpha_4 = \alpha_3 = 0.$$

Il piano contenente le due rette (10) e (11) ha l'equazione:

$$\mu_4 (\alpha_2 + \alpha_3) + \alpha_4 = 0.$$

Si può prendere come punto unità cercato l'intersezione di questo piano con la retta $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$ che ha già un significato geometrico. Ne segue

$$\mu_4 = -\frac{1}{2}.$$

Con questo, il riferimento proiettivo risulta definito. Rispetto ad esso le coordinate x soddisfano il sistema di equazioni a derivate parziali:

$$x_{uu} = \lambda_1 x + \lambda_2 x_u - \frac{1}{2} \rho_3 x_v$$

$$x_{uv} = \mu_1 x - \frac{1}{2} x_w$$

$$x_{vv} = \nu_1 x - \frac{1}{2} \sigma_2 x_u + \nu_3 x_v$$

$$x_{uw} = \rho_1 x + \rho_2 x_u + \rho_3 x_v$$

$$x_{vw} = \sigma_1 x + \sigma_2 x_u - \rho_2 x_v.$$

3. Senza fare lo studio completo degli invarianti proiettivi della famiglia Ω , possiamo segnalare l'esistenza di due di essi.

Uno è l'invariante della coppia di coniche rappresentati da (8) e (9). Esso vale $\rho_3 \sigma_2$ e sarà designato per $4I$.

Un altro è il birapporto delle tangenti asintotiche e di quelle rappresentate dall'equazione (6) e vale $\frac{2\rho_2 + \sqrt{4\rho_2^2 + 1}}{2\rho_2 - \sqrt{4\rho_2^2 + 1}}$. Dall'invarianza di I segue anche quella di ρ_2 .

Segue di qui che, fin tanto che $\rho_2 \neq 0$, le sviluppabili della congruenza \mathfrak{U} segano Σ_0 lungo una rete che *non* è armonica a Σ_0 . È da prevedere che il caso in cui questo fatto si presentasse può avere qualche interesse.

Un'altra classe di famiglie Ω , suggerita dal prof. Bompiani, sarebbe quella per la quale la congruenza \mathfrak{U} fosse la stessa per tutte le superficie della famiglia.

Matematica. — *Sur les congruences de droites normales à une même surface.* Nota di O. PYLARINOS, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

On sait, d'après un théorème donné par Beltrami, que, si l'on considère sur une surface une famille de géodésiques et leurs trajectoires orthogonales et l'on mène par les différents points de la surface des droites normales aux trajectoires faisant un angle constant avec la surface sur chaque trajectoire mais pouvant varier quand on passe de l'une trajectoire à la suivante, les droites ainsi obtenues seront normales à une même surface⁽²⁾.

Nous allons déterminer dans ce qui suit l'équation de la famille des surfaces normales aux droites d'une telle congruence, dans le but d'établir dans le cas spécial où l'angle de ces droites avec la surface reste partout constant, une relation géométrique simple entre ces surfaces et les surfaces normales aux tangentes des géodésiques considérées; ensuite nous allons donner une propriété relative à cette question des surfaces moulures, c'est-à-dire des surfaces ayant une famille des lignes de courbure géodésiques.

1. Soit

$$(1.1) \quad M = P(u, v) + t\bar{a}(u, v)$$

l'équation d'une congruence de droites;

$$(2.1) \quad P = P(u, v)$$

est l'équation de la surface de départ rapportée, pour plus de simplicité, à un réseau paramétrique orthogonal et $\bar{a}(u, v)$ le vecteur unitaire, qui définit la direction de la droite de la congruence, qui passe par le point correspondant de la surface (2.1).

Si l'on désigne par \bar{e}_1 et \bar{e}_2 les vecteurs unitaires qui définissent les directions positives des tangentes des lignes paramétriques en chaque point de la surface (2.1) et par l leur produit vectoriel, qui définit la direction positive de la normale à la surface en ce point, on a

$$(3.1) \quad \bar{e}_1 = \frac{\frac{\partial P}{\partial u}}{\sqrt{E}}, \quad \bar{e}_2 = \frac{\frac{\partial P}{\partial v}}{\sqrt{G}}, \quad l = \frac{\frac{\partial P}{\partial u} \wedge \frac{\partial P}{\partial v}}{\sqrt{EG}},$$

(1) Nella seduta del 3 aprile 1938.

(2) G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, to. III, p. 349.

avec $E = \left(\frac{\partial P}{\partial u}\right)^2$ et $G = \left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)^2$; et les dérivées des ces vecteurs par rapport aux deux variables u et v seront d'après des formules connues⁽¹⁾

$$(4.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial u} = \left(\frac{\bar{e}_2}{\rho_{1g}} + \frac{l}{\rho_{1n}}\right) \sqrt{E} & \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial u} = \left(-\frac{\bar{e}_1}{\rho_{1g}} + \frac{l}{\tau_g}\right) \sqrt{E} \\ \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial v} = \left(-\frac{\bar{e}_2}{\rho_{2g}} + \frac{l}{\tau_g}\right) \sqrt{G} & \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial v} = \left(\frac{\bar{e}_1}{\rho_{2g}} + \frac{l}{\rho_{2n}}\right) \sqrt{G}, \\ \frac{\partial l}{\partial u} = -\left(\frac{\bar{e}_1}{\rho_{1n}} + \frac{\bar{e}_2}{\tau_g}\right) \sqrt{E} \\ \frac{\partial l}{\partial v} = -\left(\frac{\bar{e}_1}{\tau_g} + \frac{\bar{e}_2}{\rho_{2n}}\right) \sqrt{G}, \end{cases}$$

où $\frac{l}{\rho_{1g}}, \frac{l}{\rho_{2g}}, \frac{l}{\rho_{1n}}, \frac{l}{\rho_{2n}}$ désignent respectivement les courbures géodésiques et normales des lignes paramétriques au point considéré de la surface et $\frac{l}{\tau_{1g}} = -\frac{l}{\tau_{2g}} \equiv \frac{l}{\tau_g}$ leurs torsions géodésiques en ce point.

2. Supposons maintenant que la droite de la congruence qui passe par chaque point de la surface (2.1) soit située sur le plan normal de la surface défini par la tangente à la courbe $v = \text{const.}$ en ce point; en désignant par φ l'angle que le vecteur \bar{a} fait avec la direction positive de cette tangente on a

$$(1.2) \quad \bar{a} = \cos \varphi \bar{e}_1 + \sin \varphi l$$

et l'équation de la congruence constituée par ces droites sera

$$(2.2) \quad M = P(u, v) + t(\cos \varphi \bar{e}_1 + \sin \varphi l).$$

Si l'on suppose de plus que les courbes $v = \text{const.}$ sont des géodésiques de la surface (2.1) tandis qu'en même temps l'angle φ est une fonction de la seule variable u , les droites de cette congruence seront, d'après le théorème de Beltrami que nous venons de mentionner, normales à une même surface, dont l'équation sera de la forme

$$M = P(u, v) + t(u, v) \{ \cos \varphi \bar{e}_1 + \sin \varphi l \},$$

où t est une fonction des deux variables u, v définie par les équations

$$\frac{\partial M}{\partial u} \times \bar{a} = \left(\frac{\partial P}{\partial u} + t \frac{\partial \bar{a}}{\partial u} + \frac{\partial t}{\partial u} \bar{a} \right) \times \bar{a} = \frac{\partial P}{\partial u} \times \bar{a} + \frac{\partial t}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial v} \times \bar{a} = \left(\frac{\partial P}{\partial v} + t \frac{\partial \bar{a}}{\partial v} + \frac{\partial t}{\partial v} \bar{a} \right) \times \bar{a} = \frac{\partial P}{\partial v} \times \bar{a} + \frac{\partial t}{\partial v} = 0,$$

(1) Voir, par ex., M. LAGALLY, *Vektor-Rechnung*, s. 90 (Leipzig 1934).

vu que l'on a $\bar{a} \times \bar{a} = 1$ et $\bar{a} \times \frac{\partial \bar{a}}{\partial u} = \bar{a} \times \frac{\partial \bar{a}}{\partial v} = 0$.

En remplaçant dans ces équations \bar{a} par sa valeur (1.2), on obtient

$$(3.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial t}{\partial u} = -\sqrt{E} \cos \varphi \\ \frac{\partial t}{\partial v} = 0 \end{cases}$$

et, comme les courbes $v = \text{const.}$ sont des géodésiques sur la surface (1.2), E est une fonction de la seule variable u , et la condition d'intégrabilité étant remplie, on a

$$t = -\int \sqrt{E} \cos \varphi du + c.$$

L'équation de la famille des surfaces normales aux droites de la congruence considérée sera donc

$$(4.2) \quad M = P(u, v) + \left(-\int \sqrt{E} \cos \varphi du + c \right) (\cos \varphi \bar{e}_1 + \sin \varphi \bar{l}).$$

Si en particulier, l'angle φ est indépendant de u , l'équation (4.2) devient

$$(5.2) \quad M = P(u, v) + \left(-\cos \varphi \int \sqrt{E} du + c \right) (\cos \varphi \bar{e}_1 + \sin \varphi \bar{l})$$

et en posant $\varphi = 0$ dans cette équation on obtient l'équation de la famille des surfaces normales aux tangentes des géodésiques $v = \text{const.}$:

$$(6.2) \quad M = P(u, v) + \left(-\int \sqrt{E} du + c_1 \right) \bar{e}_1.$$

La simple comparaison des deux équation (5.2) et (6.2) montre qu'il est possible, en déterminant convenablement c en fonction de c_1 , de faire correspondre à chaque point d'une surface de la famille (6.2) un point d'une surface de la famille (5.2) comme projection orthogonale sur la droite correspondante de la congruence considérée.

On peut donc énoncer le théorème suivant:

A chaque surface normale aux tangentes des géodésiques $v = \text{const.}$ correspond une surface normale aux droites de la congruence (2.2), dans le cas où φ est constant, comme lieu des projections orthogonales des points de cette surface sur les droites correspondantes de la congruence.

3. Considérons enfin une droite fixe par rapport au triedre constitué par les tangentes des courbes paramétriques et la normale en chaque point de la surface (2.1) située dans le plan normal de la surface défini par la tangente à la courbe $v = \text{const.}$

L'équation de la congruence constituée par ces droites sera de la forme

$$(1.3) \quad M = P(u, v) + \lambda \bar{e}_1 + t(\cos \varphi \bar{e}_1 + \sin \varphi \bar{l}),$$

λ et φ étant des constantes et la condition nécessaire et suffisante pour que ces droites soient normales à une même surface est dans ce cas

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial P}{\partial u} + \lambda \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial u} \right) \times \left(\cos \varphi \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial v} + \sin \varphi \frac{\partial \bar{l}}{\partial v} \right) &= \left(\frac{\partial P}{\partial v} + \lambda \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial v} \right) \times \\ &\times \left(\cos \varphi \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial u} + \sin \varphi \frac{\partial \bar{l}}{\partial u} \right), \end{aligned}$$

où, en vertu des formules (4.1),

$$\frac{\cos \varphi}{\rho_{1g}} + \lambda \frac{\sin \varphi}{\rho_{1g} \rho_{2n}} + \lambda \frac{\sin \varphi}{\rho_{2g} \tau_g} = 0.$$

Il en résulte que, si les lignes paramétriques sont les lignes de courbure de la surface (2.1), tandis qu'en même temps les courbes $v = \text{const.}$ sont des géodésiques sur cette surface, en d'autres termes si la surface (2.1) est une surface moulure, les droites de la congruence (1.3) seront normales à une même surface quelles que soient les deux constantes λ et φ .

Il est à remarquer que les seules surfaces qui possèdent cette propriété sont les surfaces moulures, si l'on tient compte du fait que les surfaces développables peuvent être considérées aussi comme des surfaces moulures.

En effet: si l'on veut que la relation (2.3) soit remplie quelles que soient les constantes λ et φ , il faut que l'on ait à la fois

$$\frac{1}{\rho_{1g}} = 0, \quad \frac{1}{\rho_{2g} \tau_g} = 0;$$

si $\frac{1}{\rho_{2g}} = 0$ les courbes paramétriques sont des géodésiques et la surface, ayant deux familles des géodésiques orthogonales, est une développable; si

$\frac{1}{\tau_g} = 0$, les lignes paramétriques sont les lignes de courbure de la surface

et comme on a aussi $\frac{1}{\rho_{1g}} = 0$, les courbes $v = \text{const.}$ sont des géodésiques et la surface est une surface moulure.

On peut facilement reconnaître si l'on tient compte de la manière de génération d'une surface moulure⁽¹⁾, que les développantes d'une telle surface, qui correspondent à ses lignes de courbure géodésiques, sont aussi des surfaces moulures. De ce fait, il résulte aisément que les droites qui projettent les points d'une développante d'une telle surface sur les droites de la congruence (2.2) dans le cas où φ est constant, sont aussi normales à une même surface.

(1) L. BIANCHI, *Lezioni di Geometria Differenziale*, vol. I₂, p. 511.

Algebra. — *Sui sistemi di risultanti.* Nota di G. DANTONI, presentata dal Socio G. SCORZA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli sforzi.* Nota I di C. CATTANEO, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Se due corpi elastici, che supponiamo dotati di attrito, sono premuti (anche obliquamente) l'uno contro l'altro, essi vengono a toccarsi in una piccola zona σ nella quale si generano sforzi normali e tangenziali; determinare la distribuzione di tali sforzi costituisce il problema del « contatto tra solidi elastici ».

H. Hertz ha risoluto completamente la questione nell'ipotesi che i corpi siano premuti *normalmente* ⁽²⁾ e la sua teoria, ormai classica, esaurisce lo studio del contatto elastico *in assenza di attrito*.

Nella presente Nota prendo in esame il caso generale della compressione obliqua, nel quale l'attrito ha ovviamente una funzione essenziale.

Considerata la generica coppia di punti che, inizialmente distinti, vengono a coincidere per lo schiacciamento dei due solidi, esamino lo spostamento relativo da essi subito a seguito della deformazione elastica.

Le condizioni geometriche dei due corpi bastano (Hertz) a individuare completamente la componente normale di tale spostamento in tutta l'areola σ nella quale avviene il contatto. Quanto alle due componenti tangenziali, l'ipotesi assunta della presenza di attrito, permette di ritenerle ivi identicamente nulle, eccezion fatta solamente in una zona anulare periferica nella quale tuttavia, se nulla può dirsi *a priori* sul valore degli scorrimenti relativi, si può in compenso presumere che lo sforzo tangenziale (non più capace d'impedire lo scorrimento) si espliciti colla massima intensità consentitagli dalle leggi empiriche dell'attrito. Ciò equivale, nelle condizioni specifiche in cui noi ci porremo, ad assumere direttamente noti, in dipendenza delle pressioni normali, gli sforzi tangenziali.

Classiche formule di elasticità consentono poi di tradurre le tre relazioni cinematiche stabilite in altrettante equazioni integrali fra le incognite componenti degli sforzi, le quali risultano così individuate in tutta la zona di contatto.

(1) Nella seduta del 3 aprile 1938.

(2) Cfr. A. E. H. LOVE, *The Mathematical Theory of Elasticity*. Ed. 1934. p. 193 e sgg.

In una Nota successiva esaminerò il sistema di equazioni trovate (del tipo di Fredholm di prima specie) e mostrerò come si giunga elementarmente alla loro risoluzione.

I. PRELIMINARI GEOMETRICI. — Si abbiano due corpi elastici C_1 e C_2 , nel loro stato naturale, a contatto geometrico in un punto O regolare per il contorno S_1 e S_2 di ciascuno di essi.

Riferiamo C_1 a una terna di assi ortogonali $Oxy\chi_1$, ove l'asse χ_1 è diretto secondo la normale comune in O ai due corpi e orientato verso l'interno del primo di essi. Analogamente riferiamo C_2 a una terna $Oxy\chi_2$, coincidente con la precedente, salvo che per il verso del terzo asse.

Le superficie S_1 e S_2 , riferite ciascuna alla propria terna, potranno, nell'intorno del punto O , essere rappresentate dalle equazioni:

$$(1) \quad \begin{cases} \chi_1 = A_1 x^2 + B_1 y^2 + H_1 xy \\ \chi_2 = A_2 x^2 + B_2 y^2 + H_2 xy. \end{cases}$$

Una scelta opportuna degli assi x e y nel piano tangente comune alle superficie S_1 e S_2 permette di ritenere:

$$H_1 = -H_2,$$

cosicchè la distanza tra due punti P_1 e P_2 aventi la stessa proiezione normale sul piano tangente e che noi conveniamo di chiamare punti *corrispondenti*, sarà data da:

$$(2) \quad \chi = \chi_1 + \chi_2 = Ax^2 + By^2,$$

dove:

$$A = A_1 + A_2 > 0 \quad \text{e} \quad B = B_1 + B_2 > 0.$$

In quel che segue immagineremo che ciascuna delle due terne di assi ora considerate $xy\chi_1$ e $xy\chi_2$ si mantenga solidale al baricentro del primo e rispettivamente del secondo solido.

2. CINEMATICA DEL CONTATTO CON ATTRITO. — Scelti così i sistemi di riferimento, supponiamo che i due corpi vengano premuti, obliquamente, l'uno contro l'altro: per fissare le idee intorno al meccanismo di questa compressione, possiamo immaginare che i due corpi siano in un primo tempo premuti normalmente, entrando in giuoco successivamente l'azione tangenziale.

Chiameremo (u_1, v_1, w_1) il generico spostamento elastico prodotto in C_1 e riferito alla terna $xy\chi_1$; analogamente diremo (u_2, v_2, w_2) lo spostamento elastico in C_2 riferito alla terna $xy\chi_2$.

Per effetto della compressione normale i due corpi si schiacceranno e il loro contatto, che già avveniva nel punto isolato O , si estenderà ora a tutta un'areola σ , che diremo *zona di contatto*; in questa prima fase punti

corrispondenti (vedi n. 1) sono venuti a coincidere ⁽¹⁾ (Hertz), cosicchè adottando le notazioni introdotte e tenuto conto della (2), otteniamo una prima relazione cinematica valida in tutta la σ :

$$w_1 + w_2 = \gamma - Ax^2 - By^2,$$

dove si è indicato con γ il valore di $w_1 + w_2$ nel punto O, oppure, ciò che è lo stesso, lo spostamento normale relativo dei baricentri dei due corpi.

Quando all'azione normale si aggiunge l'azione tangenziale, la quale non superi una certa intensità, entra in giuoco l'attrito a impedire lo scorrimento mutuo dei due corpi. Se riteniamo valido anche localmente il comportamento globale dell'attrito, siamo portati ad ammettere che due punti *corrispondenti*, una volta venuti a contatto per effetto dello schiacciamento normale, vi permangono anche dopo l'applicazione dell'azione tangenziale.

Si prevedono in tal modo verificate in σ le due ulteriori relazioni cinematiche

$$u_1 - u_2 = \alpha$$

$$v_1 - v_2 = \beta$$

essendo come sopra

$$\alpha = u_1(0, 0) - u_2(0, 0)$$

e

$$\beta = v_1(0, 0) - v_2(0, 0)$$

due costanti il cui significato meccanico è quello di componenti tangenziali dello spostamento relativo dei due baricentri.

Considerazioni successive, che esporremo nella prossima Nota II, mostreranno tuttavia che le ultime due relazioni scritte non possono sussistere in tutta l'area di contatto, dovendosi escludere dal loro campo di validità σ^* una conveniente zona marginale τ .

Rimangono pertanto stabilite in definitiva le tre seguente relazioni:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1 - u_2 = \alpha \\ v_1 - v_2 = \beta \end{array} \right\} \text{ valide in } \sigma^* \text{ (ancora indeterminata)}$$

$$w_1 + w_2 = \gamma - Ax^2 - By^2 \text{ valida in tutta la } \sigma.$$

3. RICHIAMO DI ALCUNE FORMULE SUI SUOLI ELASTICI. — La teoria classica dei suoli elastici permette di esprimere in forma finita lo spostamento provocato in un generico punto di un semispazio elastico isotropo da una distribuzione di sforzi agenti sul piano di confine. Riferito il suolo elastico a una terna $Oxyz$ che abbia l'origine sul piano limite e il terzo asse normale ad esso e diretto verso l'interno della massa elastica, e chiamate con

(1) Il fatto è rigorosamente vero quando i due corpi sono costituiti dello stesso materiale; in caso contrario esso è da ritenersi verificato solo in prima approssimazione: ved. in proposito LOVE, op. cit., p. 195, nota.

L, M, N le componenti del generico sforzo applicato, le componenti degli spostamenti elastici sono espresse dalle formule (1):

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} u(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z} - \frac{1}{4\pi(\lambda + \mu)} \frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{z}{4\pi\mu} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \mathfrak{M}'}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{L}'}{\partial y} \right) \\ v(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial z} - \frac{1}{4\pi(\lambda + \mu)} \frac{\partial \chi}{\partial y} - \frac{z}{4\pi\mu} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \\ &\quad - \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathfrak{M}'}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{L}'}{\partial y} \right) \\ w(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z} + \frac{\psi}{4\pi(\lambda + \mu)} - \frac{z}{4\pi\mu} \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{aligned} \right.$$

nelle quali si è posto:

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}$$

$$\mathfrak{L} = \int L \lg(z + r) d\sigma, \quad \mathfrak{M} = \int M \lg(z + r) d\sigma, \quad \mathfrak{N} = \int N \lg(z + r) d\sigma$$

$$\mathfrak{L}' = \int L [\chi \lg(z + r) - r] d\sigma, \quad \mathfrak{M}' = \int M [\chi \lg(z + r) - r] d\sigma,$$

$$\mathfrak{N}' = \int N [\lg(z + r) - r] d\sigma$$

$$\psi = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z}, \quad \chi = \frac{\partial \mathfrak{L}'}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}'}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{N}'}{\partial z}.$$

Con λ e μ si sono indicate le costanti elastiche del suolo; le integrazioni si intendono estese alla porzione σ del piano limite nella quale sono applicati gli sforzi.

Le formule scritte restano valide anche per un corpo di dimensioni finite, quando gli sforzi applicati agiscano in una zona molto ristretta della sua superficie.

4. MECCANICA DEL PROBLEMA. — Nel caso che ci interessa chiamiamo L, M, N le componenti secondo gli assi $xy\chi_1$ del generico sforzo trasmesso dal secondo corpo al primo; esse sono funzioni di x e di y dato che l'areola di contatto si può ritenere giacente sul piano $\chi_1 = 0$.

Non sarà superfluo far notare espressamente che le analoghe componenti degli sforzi trasmessi dal primo corpo al secondo, ma riferiti agli assi $xy\chi_2$ sono

$$-L(x, y), \quad -M(x, y), \quad N(x, y);$$

(1) Cfr., per es., CESÀRO, *Teoria Matematica dell'elasticità*, pp. 125 e 126.

e che inoltre, detto f il coefficiente d'attrito relativo ai due corpi, in tutta l'area di contatto deve essere soddisfatta la limitazione seguente:

$$(5) \quad L^2 + M^2 \leq f^2 N^2.$$

Ciò posto, le formule del numero precedente consentono di esprimere, in dipendenza della distribuzione incognita di sforzi, gli spostamenti in ciascuno dei due corpi rispettivamente riferiti alla terna $xy\zeta_1$ e alla terna $xy\zeta_2$.

Se tali spostamenti consideriamo per l'uno e per l'altro solido esclusivamente nella zona superficiale di contatto, abbiamo a calcoli fatti:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} u_1(x, y, \zeta) &= \frac{1}{2\pi\mu} \int_{\sigma} \frac{L}{r} d\sigma - \frac{\lambda}{4\pi\mu(\lambda + \mu)} \int_{\sigma} L \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} d\sigma - \\ &\quad - \frac{\lambda}{4\pi\mu(\lambda + \mu)} \int_{\sigma} M \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} d\sigma - \frac{1}{4\pi(\lambda + \mu)} \int_{\sigma} N \frac{\partial}{\partial x} \lg r d\sigma \\ v_1(x, y, \zeta) &= \frac{1}{2\pi\mu} \int_{\sigma} \frac{M}{r} d\sigma - \frac{\lambda}{4\pi\mu(\lambda + \mu)} \int_{\sigma} M \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} d\sigma - \\ &\quad - \frac{\lambda}{4\pi\mu(\lambda + \mu)} \int_{\sigma} L \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} d\sigma - \frac{1}{4\pi(\lambda + \mu)} \int_{\sigma} N \frac{\partial}{\partial y} \lg r d\sigma \\ w_1(x, y, \zeta) &= \frac{\lambda + 2\mu}{4\pi\mu(\lambda + \mu)} \int_{\sigma} \frac{N}{r} d\sigma + \frac{1}{4\pi(\lambda + \mu)} \int_{\sigma} L \frac{\partial}{\partial x} \lg r d\sigma + \\ &\quad + \frac{1}{4\pi(\lambda + \mu)} \int_{\sigma} M \frac{\partial}{\partial y} \lg r d\sigma \\ u_2(x, y, \zeta) &= -\frac{1}{2\pi\mu} \int_{\sigma} \frac{L}{r} d\sigma + \frac{\lambda}{4\pi\mu(\lambda + \mu)} \int_{\sigma} L \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} d\sigma + \\ &\quad + \frac{\lambda}{4\pi\mu(\lambda + \mu)} \int_{\sigma} M \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} d\sigma - \frac{1}{4\pi(\lambda + \mu)} \int_{\sigma} N \frac{\partial}{\partial x} \lg r d\sigma \\ v_2(x, y, \zeta) &= -\frac{1}{2\pi\mu} \int_{\sigma} \frac{M}{r} d\sigma + \frac{\lambda}{4\pi\mu(\lambda + \mu)} \int_{\sigma} M \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} d\sigma + \\ &\quad + \frac{\lambda}{4\pi\mu(\lambda + \mu)} \int_{\sigma} L \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} d\sigma - \frac{1}{4\pi(\lambda + \mu)} \int_{\sigma} N \frac{\partial}{\partial y} \lg r d\sigma \\ w_2(x, y, \zeta) &= \frac{\lambda + 2\mu}{4\pi\mu(\lambda + \mu)} \int_{\sigma} \frac{N}{r} d\sigma - \frac{1}{4\pi(\lambda + \mu)} \int_{\sigma} L \frac{\partial}{\partial x} \lg r d\sigma - \\ &\quad - \frac{1}{4\pi(\lambda + \mu)} \int_{\sigma} M \frac{\partial}{\partial y} \lg r d\sigma. \end{aligned} \right.$$

Non resta ora che sostituire nelle relazioni cinematiche (3) le espressioni ora scritte di $u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2$ per giungere alle preannunciate equazioni integrali nelle componenti di sforzo:

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} (7) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\pi\mu} \int_{\sigma} \frac{L}{r} d\sigma - \frac{\lambda}{2\pi\mu(\lambda+\mu)} \int_{\sigma} L \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} d\sigma - \frac{\lambda}{2\pi\mu(\lambda+\mu)} \int_{\sigma} M \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} d\sigma = \alpha \\ \frac{1}{\pi\mu} \int_{\sigma} \frac{M}{r} d\sigma - \frac{\lambda}{2\pi\mu(\lambda+\mu)} \int_{\sigma} M \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} d\sigma - \frac{\lambda}{2\pi\mu(\lambda+\mu)} \int_{\sigma} L \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} d\sigma = \beta \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{in } \sigma \\ \text{valide} \end{array} \right. \\ (8) \quad \frac{\lambda + 2\mu}{2\pi\mu(\lambda + \mu)} \int_{\sigma} \frac{N}{r} d\sigma = \gamma - Ax^2 - By^2 \quad \text{valida in tutta la } \sigma. \end{array} \right.$$

In quel che precede si è supposto che i due corpi siano costituiti dello stesso materiale: e a tale circostanza è dovuta la relativa semplicità del sistema (S) il quale peraltro può ritenersi valido in prima approssimazione, previa modifica delle costanti, anche nel caso di corpi formati da materiale diverso ⁽¹⁾.

(1) In tal caso le equazioni esatte avrebbero la forma:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\omega}{2\pi\nu} \int_{\sigma} \frac{L}{r} d\sigma - \frac{\lambda_1 \mu_2 \rho_2 + \lambda_2 \mu_1 \rho_1}{4\pi\nu\rho} \int_{\sigma} L \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} d\sigma - \frac{\lambda_1 \mu_2 \rho_2 + \lambda_2 \mu_1 \rho_1}{4\pi\nu\rho} \int_{\sigma} M \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} d\sigma + \\ &\quad + \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho} \int_{\sigma} N \frac{\partial}{\partial x} \lg r d\sigma \\ \beta &= \frac{\omega}{2\pi\nu} \int_{\sigma} \frac{M}{r} d\sigma - \frac{\lambda_1 \mu_2 \rho_2 + \lambda_2 \mu_1 \rho_1}{4\pi\nu\rho} \int_{\sigma} M \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} d\sigma - \frac{\lambda_1 \mu_2 \rho_2 + \lambda_2 \mu_1 \rho_1}{4\pi\nu\rho} \int_{\sigma} L \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} d\sigma + \\ &\quad + \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho} \int_{\sigma} N \frac{\partial}{\partial y} \lg r d\sigma \\ \gamma - Ax^2 - By^2 &= \frac{\mu_2 \rho_2 (\lambda_1 + 2\mu_1) + \mu_1 \rho_1 (\lambda_2 + 2\mu_2)}{4\pi\nu\rho} \int_{\sigma} \frac{N}{r} d\sigma + \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho} \int_{\sigma} L \frac{\partial}{\partial x} \lg r d\sigma + \\ &\quad + \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho} \int_{\sigma} M \frac{\partial}{\partial y} \lg r d\sigma; \end{aligned}$$

dove abbiamo posto:

$$\begin{aligned} \omega &= \mu_1 + \mu_2 \\ \nu &= \mu_1 \mu_2 \\ \rho_1 &= \lambda_1 + \mu_1 \\ \rho_2 &= \lambda_2 + \mu_2 \\ \rho &= \rho_1 \rho_2. \end{aligned}$$

Tuttavia l'aver ammesso che durante la compressione normale punti corrispondenti vengono a contatto, equivale a ritenere trascurabile in ogni caso l'ultimo termine delle due prime equazioni, e di conseguenza anche gli ultimi termini della terza.

Vedremo in una prossima Nota come, tenendo conto del risultato già stabilito da Hertz, e di una spontanea schematizzazione delle circostanze di fatto, si riesca a caratterizzare la zona σ^* degli scorrimenti nulli, e il comportamento degli sforzi tangenziali nella rimanente regione anulare.

In una terza Nota darò la risoluzione esplicita delle equazioni integrali che, in base ai criteri suaccennati, mi sembrano costituire l'esatta traduzione del problema meccanico.

Meccanica (Idraulica). — *Propagazioni ondose e trasmissione d'energia in una rete idraulica.* Nota di G. KRALL, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

È nozione di dominio generale fra gli idraulici come la teoria dell'Alievi renda conto delle propagazioni di onde di pressione (colpi d'ariete) in una condotta conseguenti a variazioni della velocità di efflusso prodotte da chiusure od aperture più o meno *rapide*.

Il *rapido* è riferito ad un tempo caratteristico definito dal periodo T di oscillazione propria della condotta

$$T = \frac{2L}{V}$$

con L lunghezza della condotta e V velocità di propagazione dell'onda, velocità che vale press'a poco quella del suono nel liquido immesso, precisamente, ove le caratteristiche elastiche e geometriche sieno costanti,

$$(1) \quad V = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{E_l} + \frac{2R}{E_f d}\right)\rho}}$$

E_l ed E_f essendo i moduli d'elasticità del liquido e del materiale che costituisce il tubo, R il raggio del tubo, d lo spessore, ρ la densità normale del liquido.

Velocità u e pressione p variano da sezione a sezione, che penseremo riferita ad una coordinata x contata lungo l'asse, secondo la classica equazione dei piccoli moti,

$$(2) \quad \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

desunta sotto note ipotesi quantitative, praticamente soddisfatte nel caso specifico. Per queste ipotesi l'equazione di Eulero nella u e p si riduce all'aspetto lineare:

$$(2') \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} .$$

(1) Nella seduta del 3 aprile 1938.

Integrali delle due equazioni (2) sono dati, in virtù della (2'), pel tramite delle *stesse* funzioni arbitrarie tanto per la u quanto per la p ; si ha precisamente u_0 , p_0 essendo costanti arbitrarie,

$$(3) \quad \begin{cases} u = F(x - V \cdot t) + F_1(x + V \cdot t) + u_0 \\ p = \rho V \{ -F(x - V \cdot t) + F_1(x + V \cdot t) \} + p_0. \end{cases}$$

Dalla legge $\lambda = \lambda(t)$ con cui si fa variare il *coefficiente di riduzione* dell'area dell'orifizio si determinano le variazioni dal valore di regime della u ad un estremo. All'altro, è noto o il valore di u o, in generale, di p ; si ha quanto basta, per i teoremi d'esistenza ed unicità, per ricavare la F e la F_1 a partire da assegnate condizioni iniziali.

Sulla costruzione più appropriata di queste funzioni esiste tutta una letteratura per cui non è qui certamente il caso di intrattenersi.

Rileveremo però che il metodo classico presenta difficoltà quando $\lambda = \lambda(t)$ è una funzione, non limitata ad un piccolo intervallo di tempo dell'ordine di T , ma è, ad es.: periodica; sicchè occorre allora considerare uno *stato di regime*. Altrettanto, ed anzi in più forte misura, si può dire quando si tratta di una *rete idraulica* sottoposta a perturbazioni periodiche oppure, ove agli estremi siano assegnate condizioni più complesse che non sieno quelle della pressione costante, quali intervengono, ad esempio, se, in questi, sono applicati sistemi oscillanti propriamente detti o meccanismi oscillanti nell'intorno di *soluzioni statiche* o *stazionarie*.

In vista di una trattazione generale, riservata ad una prossima Nota, dei problemi della *regolazione delle macchine idrauliche inserite in una rete*, mi permetto di esporre qui una soluzione del problema d'integrazione delle (2) che mi è tornata utile in molti casi, particolarmente nello studio dei *ripartitori*, informata allo spirito del *metodo delle piccole oscillazioni*. Come vedremo si riesce a dare, anche per le condizioni ai limiti più complicate, soluzioni concise o, quanto meno, messe al punto da poterle passare direttamente al calcolo numerico.

Senza dilungarmi più oltre passo a considerare subito alcuni esempi molto generali che servono ad illustrare efficacemente il procedimento.

I. CONDOTTE CONCORRENTI IN UN NODO.

Sia data una rete del tipo indicato in fig. 1.

Le sezioni terminali delle condotte \overline{OA}_r ($r = 1, 2, \dots, n$) sono tenute a pressione costante p_0 , la terminale della \overline{OA}_0 , invece, è sede di perturbazioni dovute ad una variazione di velocità del tipo

$$(4) \quad u_0^-(0, t) = \bar{u}_0 \sin vt$$

prodotta (salvo l'introduzione di un'armonica superiore) ad esempio da un dispositivo a stantuffo quale interviene in certi sistemi di trasmissione che sostituiscono, con notevole rendimento, a parte altri svantaggi, l'aria compressa.

Dalla forma sinusoidale (4) si può ovviamente passare per la linearità del fenomeno, al caso generale di una variazione periodica di cui sia data una espressione approssimata trigonometrica

$$(5) \quad u(t) = \sum_i \bar{u}_i \sin(i \nu t + \alpha_i)$$

con le \bar{u}_i, α_i definienti ampiezze e fasi dei singoli moti.

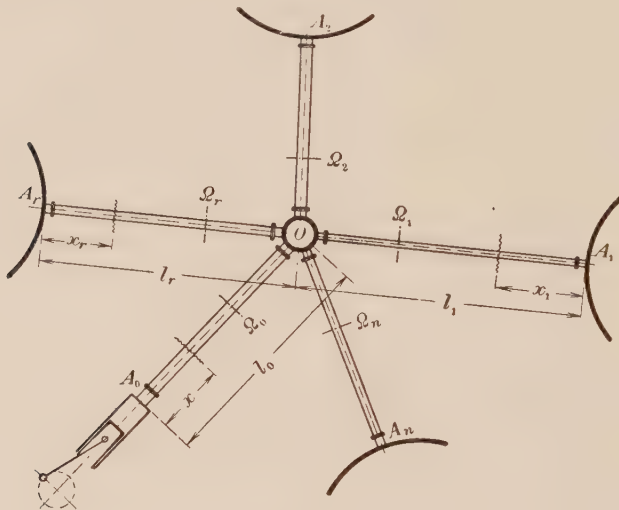


Fig. 1.

Ove sia data, invece, la legge di variazione di λ , poichè la relazione che lega la velocità $u(t)$ a $\lambda(t)$ e $p(t)$ è nota dalla teoria dell'Allievi, basterà calcolarla e farne lo sviluppo trigonometrico, ma la valutazione dei coefficienti A, B, presenta difficoltà notevoli.

Ciò posto, si tratta di studiare lo stato idrodinamico della rete a regime raggiunto, se con ciò si vuole alludere alla circostanza in cui l'integral generale delle (2) si riduce, per virtù della dissipazione, qui non considerata che come agente alla lunga, alla sovrapposizione delle soluzioni (sincrone con le componenti della perturbazione), di frequenze $i \nu (i = 1, 2, \dots)$.

Scriviamo, per ogni ramo della rete, le soluzioni delle (2) per una perturbazione (4) nella forma, ben nota nello studio delle corde vibranti,

$$(6) \quad \begin{cases} u_r = \left(A_r \cos \nu \frac{x}{V_r} + B_r \sin \nu \frac{x}{V_r} \right) \sin(\nu t + \alpha), \\ p_r = \left(A'_r \cos \nu \frac{x}{V_r} + B'_r \sin \nu \frac{x}{V_r} \right) \sin(\nu t + \alpha') + p_0; \end{cases}$$

A, B, A', B' , essendo costanti arbitrarie, α ed α' le fasi, V_r la velocità di propagazione data dalla (1), salvo a specificare, con riferimento al tratto che si considera, i valori di R, d , ed eventualmente E_f . La coordinata x è contata per ogni ramo a partire da un estremo.

Per la (2) le A', B' si esprimono in termini delle A, B e si ha, posto $\alpha = 0$, $\alpha' = \frac{\pi}{2}$ come risulta immediatamente,

$$(6a) \quad \begin{cases} u_r = \left(A_r \cos v \cdot \frac{x}{V_r} + B_r \sin v \frac{x}{V_r} \right) \sin vt, \\ p_r = \left(-B_r \rho V_r \cos v \cdot \frac{x}{V_r} + A_r \rho V_r \sin v \frac{x}{V_r} \right) \cos vt + p_0. \end{cases}$$

Intervengono in tutto $2(n+2)$ costanti arbitrarie che le condizioni agli estremi ed al nodo O determinano in modo univoco.

Si ha infatti:

All'estremo A_0 , per $x = 0$, la velocità u coincide con quella sostenuta dall'azione perturbante, dunque

$$(7) \quad A_0 = \bar{u}_0.$$

Agli estremi $A_1, A_2 \dots A_n$, per $x = 0$, poichè per ogni tratto l'ascissa x si conta dall'estremo libero, se è, poniamo,

$$p = p_0$$

seguono le n equazioni,

$$(7a) \quad B_r \rho V_r = 0 \quad (r = 1, 2 \dots, n).$$

Al nodo O deve esser soddisfatta, se Ω_r è l'area della sezione del ramo generico, l'equazione di continuità, quindi

$$(7b) \quad \sum_0^n \Omega_r u_r = 0.$$

Per l'eguaglianza al nodo O delle pressioni in ogni tubo, poichè tutte le B_r per $r = 1, 2, \dots, n$; sono nulle, seguono le n equazioni nelle $n+1$ costanti $A_1, A_2, \dots, A_r; B_0$;

$$(7c) \quad A_r \rho V_r \sin v \frac{l}{V_r} = A_s \rho V_s \sin v \frac{l_s}{V_s}$$

$$(r, s = 1, 2, \dots, n)$$

$$-B_0 \rho V_0 \cos v \frac{l}{V_0} + A_0 \rho V_0 \sin v \frac{l}{V_0} = A_s \rho V_s \sin v \frac{l_s}{V_s}.$$

Le (7), (7 a, b, c) costituiscono un sistema di $1 + n + 1 + n = 2(n + 1)$ equazioni nelle $2(n + 1)$ incognite A_r, B_r .

Le soluzioni di questo sistema sono date, secondo la regola ordinaria, dalle relazioni ⁽¹⁾

$$A_i = \frac{D_i}{D},$$

dove D è il determinante dei coefficienti del sistema, D_i il determinante che si ottiene da D sostituendo la colonna i^{ma} con la colonna dei coefficienti della perturbazione $\bar{u}_0, 0, \dots, 0$.

Ove risulti $D = 0$ si presenta il caso della *risonanza*. È questo offerto da tutti i valori v_0 di v radici dell'equazione cosidetta *delle frequenze o secolare*

$$(8) \quad D(v) = 0.$$

Il problema di determinarle rigorosamente non è dei più agevoli ma si presta a illustrazioni ed applicazioni interessanti: la scrittura del determinante è immediata, il suo sviluppo in generale non faticoso per il numero dei coefficienti nulli. Le radici v_1, v_2, \dots (interessa in generale la prima) si ottengono assumendo alcuni valori v_r di v , onde disegnare il diagramma $D = D(v_r)$ dal quale scendono per via grafica le frequenze che portano alla risonanza. Senza soffermarci oltre sulla questione passiamo al

2. CASO DI UNA CONDOTTA PERTURBATA AD UN ESTREMO CON SISTEMA VIBRANTE ALL'ALTRO ESTREMO.

Interviene in alcune applicazioni della trasmissione idraulica d'energia o nella correzione del periodo fondamentale di una rete con dispositivi meccanici.



Fig. 2.

Fissiamo l'attenzione su una condotta unica come è indicato in fig. 2; il sistema oscillante connesso all'estremo è costituito da una massa solida

(1) Le A_i stando ora a designare, per $i = 1, 2, \dots, 2(n + 1)$, una delle $2(n + 1)$ incognite $A_0, A_1, \dots, A_n; B_0, B_1, \dots, B_n$; scritte in ordine progressivo.

M richiamata da una molla. Sulla massa, per un dispositivo a stantuffo, agisce (nella sezione terminale $x = l$) su un'area Ω la pressione p .

Sia q l'elongazione di M dalla condizione di equilibrio, — kq la forza di richiamo ($k > 0$), infine

$$u(0, t) = \bar{u}_0 \sin \nu t$$

la velocità all'estremo $x = 0$.

Si avrà per la velocità u ,

$$\dot{u} = \left(\bar{u}_0 \cos \nu \frac{x}{V} + B \sin \nu \frac{x}{V} \right) \sin \nu t$$

e per la pressione p

$$p = \rho V \left(-B \cos \nu \frac{x}{V} + \bar{u}_0 \sin \nu \frac{x}{V} \right) \cos \nu t.$$

L'equazione del moto della massa è

$$M \ddot{q} + kq = \bar{p} \Omega \cos \nu t$$

ovvero

$$\ddot{q} + \sigma^2 q = \frac{\bar{p} \Omega}{M} \cos \nu t$$

essendo

$$(9) \quad \sigma^2 = \frac{k}{M}, \quad \bar{p} = \rho V \left(-B \cos \nu \frac{l}{V} + \bar{u}_0 \sin \nu \frac{l}{V} \right).$$

Una soluzione che, ad avvenuta *estinzione* del moto dovuto alle circostanze iniziali, dà il moto effettivo è

$$q = \frac{\frac{\bar{p} \Omega}{M}}{\sigma^2 - \nu^2} \cos \nu t,$$

la velocità vale quindi

$$\dot{q} = - \frac{\frac{\bar{p} \Omega}{M} \nu}{\sigma^2 - \nu^2} \sin \nu t$$

e questa deve coincidere con la u ; ne segue,

$$\bar{u}_0 \cos \nu \frac{l}{V} + B \sin \nu \frac{l}{V} = - \frac{\frac{\bar{p} \Omega}{M} \nu}{\sigma^2 - \nu^2}.$$

Esprimendo \bar{p} pel tramite della (9) si ha in definitiva

$$B = \frac{\bar{u}_0 \left\{ \cos \nu \frac{l}{V} + \frac{\frac{\Omega}{M} \nu}{\sigma^2 - \nu^2} \rho V \sin \nu \frac{l}{V} \right\}}{- \sin \nu \frac{l}{V} + \frac{\frac{\Omega}{M} \nu}{\sigma^2 - \nu^2} \rho V \cos \nu \frac{l}{V}}.$$

L'equazione delle frequenze è in conformità

$$\operatorname{tg} \nu \frac{l}{V} = \frac{\frac{\Omega}{M} \nu}{\sigma^2 - \nu^2} \rho V.$$

Questa consente una facile discussione dell'influenza di Ω, M, k sulle corrispondenti radici, cioè sulle frequenze fondamentali del sistema.

Con ciò la soluzione del problema è raggiunta.

Si constata agevolmente come la condizione di risonanza porta alla possibilità di trasmissioni molto efficaci di energia (Brevetti *Dorman*).

3. CONDOTTA A CARATTERISTICHE VARIABILI IN SERIE

CON PERTURBAZIONE INDOTTA AD UN ESTREMO E SERBATOIO ALL'ALTRO.

Consideriamo il caso della fig. 3.

Si hanno manifestamente, per ogni tratto a caratteristiche costanti, ancora le (6).

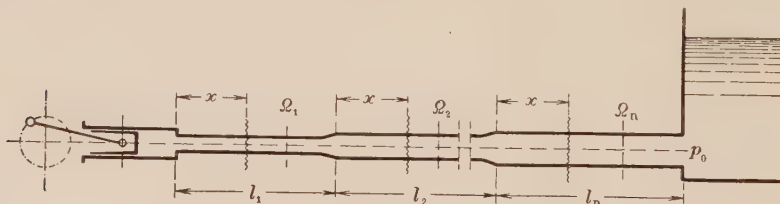


Fig. 3.

Sia $u_0 = \bar{u}_0 \sin \nu t$ ad un estremo, $p = p_0$ all'altro; per l'eguaglianza delle portate ad ogni raccordo deve essere

$$\begin{aligned} (10) \quad \Omega_{r-1} \left(A_{r-1} \cos \nu \frac{l_r}{V_r} + B_{r-1} \sin \nu \frac{l_r}{V_r} \right) &= \\ &= \Omega_r \left(A_r \cos \nu \frac{l_r}{V_r} + B_r \sin \nu \frac{l_r}{V_r} \right), \quad (r = 1, 2, \dots, n); \end{aligned}$$

per l'eguaglianza delle pressioni ad ogni raccordo

$$-B_{i-1} \rho V_{i-1} \cos \nu \frac{l_{i-1}}{V_{i-1}} + A_{i-1} \rho V_{i-1} \sin \nu \frac{l_{i-1}}{V_{i-1}} = -B_i \rho V_i$$

ed infine, poichè all'estremo dell'ultimo tratto $p = p_0$,

$$-B_n \rho V_n \cos \nu \frac{l_n}{V_n} + A_n \rho V_n \sin \nu \frac{l_n}{V_n} = 0.$$

Risulta così un sistema di $2n + 1$ (oltre alla $A_0 = \bar{u}_0$) equazioni di scrittura immediata. L'equazione delle frequenze non è di sviluppo complicato poichè molti elementi di D sono nulli.

Sono interessanti le discussioni di casi estremi quali l'effetto di un *restringimento* per un breve tratto, o di una *plasticizzazione* (senza che avvenga ancora perdita di liquido) per cui $E_f \rightarrow 0$ in un certo tratto ecc.

Per la trattazione analitica da applicare in questi casi cfr. una Nota mia e del prof. Tricomi ⁽¹⁾.

La valutazione della prima frequenza ha interesse per il calcolo del periodo T (che altrimenti si usa valutare con criteri di media) che è dato molto significativo nell'ordinaria teoria del colpo d'ariete.

4. INTRODUZIONE DI UNA CAPACITÀ.

Si consideri il caso indicato in fig. 4; in una condotta ad un ramo è inserito un recipiente R chiuso, completamente pieno, che chiameremo, togliendo la locuzione all'Elettrotecnica, *capacità*.

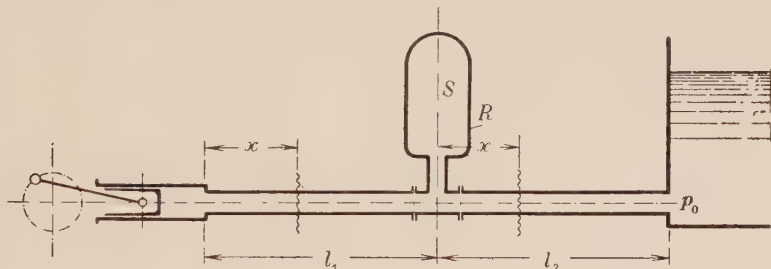


Fig. 4.

Definiamola come aumento di quantità di liquido nel recipiente che la realizza corrispondente ad un aumento unitario della pressione.

Sarà quindi l'aumento di liquido proporzionale: *a)* al volume S di R , *b)* all'incremento di pressione $p - p_0$, *c)* ad una costante κ dipendente dalle dimensioni di R , dal modulo di elasticità del materiale e da quello del liquido, infine *d)* dalla densità ρ ; dunque

$$\Delta Q = (p - p_0) \kappa S \rho.$$

Ne segue che, se all'estremo trasmettente si ha la perturbazione $u = u \sin vt$ si dovrà avere, oltre alla solita eguaglianza $A_0 = \bar{u}_0$, l'equazione di continuità all'attacco di R ,

(1) *Intorno ai carichi di punta per aste a momento d'inerzia variabile con discontinuità.* Questi « Rendiconti », vol. XI, 1930.

$$\left(A_0 \cos \nu \frac{l_1}{V_1} + B_1 \cos \nu \frac{l_1}{V_1} \right) \Omega_1 - \left(A_2 \cos \nu \frac{l_2}{V_2} + B_2 \cos \nu \frac{l_2}{V_2} \right) \Omega_2 = \\ = (p - p_0) \kappa S = - B_2 \rho V_2 \kappa S.$$

Infine l'eguaglianza delle pressioni in $x = l_1$ del primo tratto e $x = 0$ del secondo, dunque

$$- B_1 \rho V \cos \nu \frac{l_1}{V_1} + A_1 \rho V_1 \sin \nu \frac{l_1}{V_1} = - B_2 \rho V_2.$$

In $x = l_2$ si à $p_0 = p_0$ e quindi

$$- B_2 \rho V_2 \cos \nu \frac{l_2}{V_2} + A_2 \rho V_2 \sin \nu \frac{l_2}{V_2} = 0.$$

Anche qui l'equazione delle frequenze si scrive immediatamente e l'effetto di una capacità risulta determinabile attraverso calcoli agevolmente eseguibili.

Vedremo in alcuni lavori successivi quanto torni utile questo criterio risolutivo delle equazioni dell'Allievi, particolarmente nello studio della *stabilità di soluzioni stazionarie* di una rete idraulica con turbine inserite e *regolate* automaticamente.

Astronomia. — *La radiazione del Sole a Roma dal 1933 al 1936.*
Nota di G. ANDRISSI, presentata dal Socio G. ARMELLINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Astronomia. — *Nuove ricerche sull'« ammasso del Sole ».* Nota II di L. GIALANELLA, presentata dal Socio G. ARMELLINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Elettrochimica. — *Influenza degli ultrasuoni sul « potenziale di scarica » dell'idrogeno* ⁽¹⁾. Nota di R. PIONTELLI, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. L. CAMBI.

In una recente Memoria ⁽³⁾ G. Schmid e L. Ehret hanno esposto i risultati di alcune esperienze sull'azione degli ultrasuoni, della frequenza di 280 kilocicli, sui potenziali di scarica dei gas.

Nel caso della liberazione dell'idrogeno, alle basse intensità sonore, è stata riscontrata una debole azione polarizzante, che si stabilisce lentamente, permane qualche tempo dopo l'eliminazione degli u. s., e dipende dalla natura del catodo.

Tale azione sarebbe causata da alterazioni superficiali dell'elettrodo, eliminabili mediante pulimentatura.

Alle alte intensità sonore, è stata invece riscontrata un'azione fortemente depolarizzante, e, nel passaggio dall'una all'altra condizione, una brusca variazione, pressochè indipendente dalla densità della corrente polarizzante e dal metallo catodico (ad eccezione del magnesio), la quale in Na_2SO_4 0,465 n., è di circa 0,8 Volt.

Nel caso della scarica di ossigeno e cloro, si sono riscontrati effetti analoghi, benchè meno netti per l'ossigeno. Secondo gli AA. citati, l'azione depolarizzante sarebbe dovuta al fenomeno di cavitazione che sottrae l'idrogeno al catodo.

Dato il notevolissimo interesse teorico di questi risultati, mi sono proposto di studiare l'azione degli ultrasuoni, facendo variare, anzichè l'intensità sonora, l'intensità della corrente polarizzante, a partire da valori compresi nel campo della corrente residua.

Le esperienze sono state effettuate utilizzando un generatore di ultrasuoni a quarzo, tarato per 1196 kilocicli (cioè di frequenza notevolmente superiore a quella usata dagli AA. citati), della potenza di 250 Watt all'ingresso, alimentato con corrente alternata a 42 periodi, non raddrizzata.

Nel corso di saggi preliminari ho potuto controllare il fatto prevedibile che la circolazione dell'elettrolita ha una notevole influenza sulla tensione agli elettrodi, soprattutto alle basse densità di corrente. Questa influenza, diversa per i diversi gas, e nelle diverse condizioni, è risultata assai difficilmente controllabile, e, inoltre, analoga a quella degli u. s.

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica industriale della R. Università di Milano.

(2) Nella seduta del 3 aprile 1938.

(3) « Zs. f. Elektrochemie », 43, 597 (1937).

Ho ritenuto, quindi, conveniente ovviare agli aumenti di temperatura, anzichè mediante circolazione dell'elettrolita, come dagli AA. citati, con raffreddamento esterno.

I massimi aumenti di temperatura riscontrati nella cella, durante le esperienze, sono stati di 3° C. Ho però potuto accertare che aumenti anche più rilevanti esercitano una influenza trascurabile sugli effetti studiati.

La disposizione adottata in definitiva è stata la seguente: l'elettrodo in istudio era un elettrodo tipo Hildebrand, con lamina di platino speculare quadrata, disposta verticalmente. Sulla sua superficie era appoggiata l'estremità di un capillare di Luggin, il quale, attraverso ad opportune connessioni, realizzate in modo da evitare ogni diffusione, effettuava il collegamento con un elettrodo a calomelano 0,1 n. KCl. L'altro elettrodo era un anello orizzontale di filo di platino abbracciante l'estremo superiore della campana di vetro dell'elettrodo di Hildebrand. La cella era costituita da un tubo di vetro cilindrico (diam. 2,45 cm.), leggermente svasato alla base (diam. 2,6 cm.), chiuso inferiormente con gomma para finissima (fissata pure con anelli di gomma), ed era separata del quarzo orizzontale da una colonna d'acqua costituente uno degli elettrodi di eccitazione del quarzo.

Il bordo inferiore della lamina di Pt distava dal quarzo di cm. 12. Il volume utilizzato della cella era di circa cmc. 30.

Si è fatto uso soltanto di prodotti chimici di alta purezza, si è molto curato il trattamento della cella e degli elettrodi. I potenziali sono stati determinati mediante potenziometro e galvanometro di precisione ($2,1 \times 10^{-8}$ A/div.) e le correnti con milliamperometro Weston ($0 \div 15$). Il circuito di alimentazione comprendeva una batteria di accumulatori al piombo da 6 Volt., e varie cassette di resistenza, per la regolazione della corrente polarizzante.

I diagrammi riportati sono stati ottenuti facendo crescere, con un serie di piccole variazioni, la corrente polarizzante, e misurando, in ogni condizione, la tensione di regime all'elettrodo.

Raggiunto l'equilibrio, si applicavano gli ultrasuoni (con intensità nel circuito oscillante, mantenuta sempre al valore di 32 m A), e riportata la corrente polarizzante al valore primitivo, si determinava il nuovo valore della tensione.

Questo valore, meno ben definito del precedente, si è dimostrato, in generale, assai sensibile alle variazioni nel regime del generatore, per cui, per la regolarità e riproducibilità dei risultati, era necessario assicurarsi con cura delle condizioni del generatore. Allo stesso scopo, si è dimostrato assai importante permettere agli elettrodi di raggiungere le condizioni di completo regime, il che, specie per elettrodi nuovi, e per i primi punti, richiedeva, in generale, tempi di polarizzazione notevolissimi.

I valori assoluti delle tensioni sono risultati fortemente dipendenti dai trattamenti precedentemente subiti dagli elettrodi, ma l'andamento delle curve, con le precauzioni esposte, è risultato assai regolare e riproducibile.

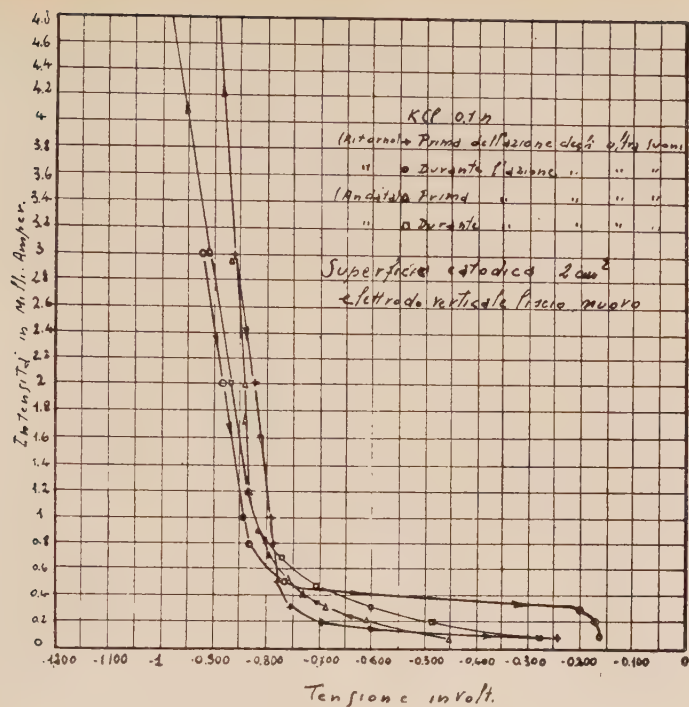


Fig. 1.

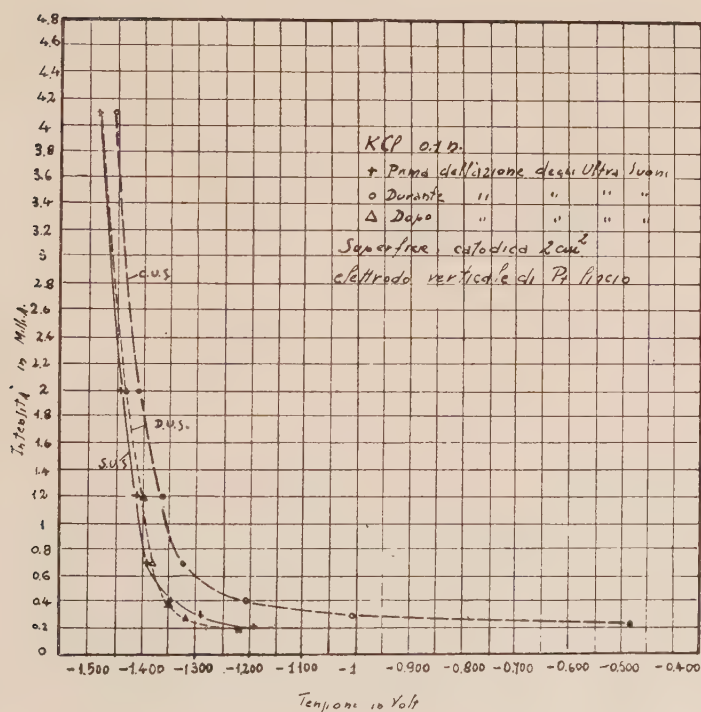


Fig. 2.

Dopo l'azione degli u. s., la tensione riprende, più o meno lentamente, valori, in generale assai prossimi a quelli primitivi.

Le figg. 1, 2 e 3 mostrano i risultati ottenuti in soluzioni rispettivamente di HCl, KCl, NaOH, tutte 0,1 n.

La temperatura era di circa 25°C. in tutte le esperienze, con un leggero aumento verso la fine di ciascuna serie di misure.

L'esperienza con KCl è stata effettuata con un elettrodo usato per la prima volta, mentre quelle con HCl e NaOH con uno stesso elettrodo, as-

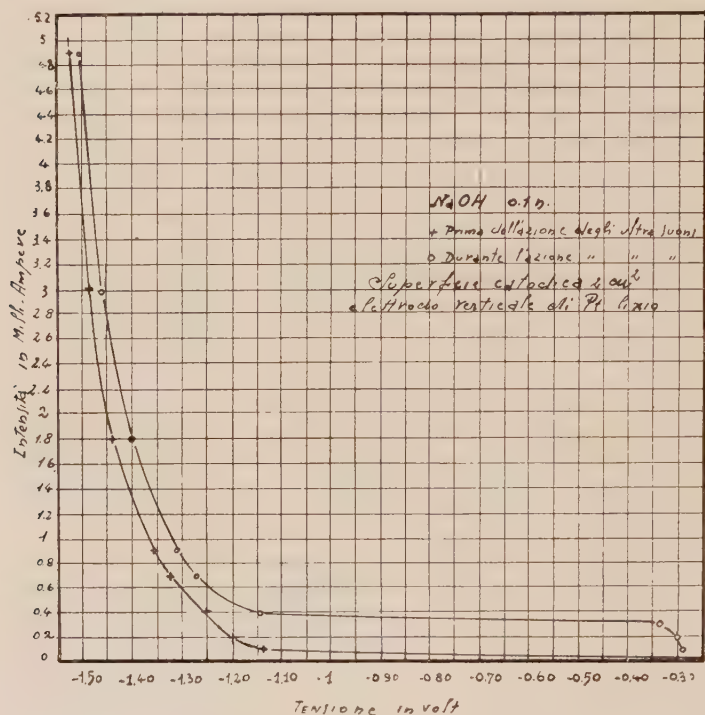


Fig. 3.

soggettato a vari trattamenti di polarizzazione anodica (con cloro e ossigeno) e catodica.

Come è evidente, la tensione catodica di regime, in assenza di ultrasuoni, presenta, in ogni caso, la classica forma logaritmica.

L'azione degli ultrasuoni si manifesta, in tutte le condizioni, con una fortissima depolarizzazione (dell'ordine di 0,8 Volt) alle più basse densità di corrente studiate.

La depolarizzazione diminuisce fortemente, oltrepassato il « gomito » della curva tensione-corrente, e tende ad annullarsi con l'ulteriore aumentare della densità di corrente.

Nel caso della soluzione di NaOH, non si è potuto ottenere l'annullamento, neppure con le più alte densità di correnti studiate (15 mA su 2 cm²). Nel caso di KCl, l'annullamento, sembra pure non accessibile; ed infine, nel caso di HCl, l'effetto degli ultrasuoni, non solo perviene ad annullarsi, ma addirittura si inverte.

Si riscontra quindi, sotto questo riguardo, una netta influenza della soluzione. È importante osservare che, anche nella regione in cui l'effetto degli ultrasuoni, a regime, è polarizzante, all'atto dell'inserzione, la tensione subisce un impulso nel senso di diminuire leggermente, rispetto al valore primitivo, che viene, però, più o meno, rapidamente superato.

Viceversa, al cessare degli ultrasuoni, si ha un impulso nel senso dell'aumento di tensione, seguito, in generale, da un ritorno a valori vicini a quelli prima dell'azione degli ultrasuoni. L'applicazione degli ultrasuoni altera profondamente l'andamento visibile dello svolgimento di gas.

In soluzione alcalina, applicando gli ultrasuoni, si passa da uno svolgimento di bolle di idrogeno assai minute, alla formazione di grosse bolle, che si staccano rapidamente dal catodo, mentre la soluzione si libera da tutte le bollicine.

Anche in soluzione acida, dove, peraltro, le bolle sono già di dimensioni notevoli, il fenomeno è assai vistoso.

Poichè l'azione degli ultrasuoni può alterare sia la soluzione (per progressivo degasamento), sia l'elettrodo (benchè, nelle esperienze finora effettuate, la superficie catodica si sia conservata perfettamente speculare), ho compiuto anche misure (v. fig. 1) ripassando, per valori decrescenti della corrente depolarizzante (subito dopo ultimata la curva ascendente), per i punti già studiati.

Nonostante i netti effetti di « isteresi », che mettono, ancora una volta, in rilievo l'influenza della « storia » degli elettrodi sul loro comportamento, anche le curve discendenti dei potenziali, con e senza ultrasuoni, conservano andamento perfettamente analogo.

Attualmente sono in corso esperienze con elettrodi di platino platinato e di altri metalli, con soluzioni saturate di ossigeno, idrogeno, azoto e previamente degasate, ed altre riguardanti l'influenza della giacitura dell'elettrodo.

Dalle esperienze preliminari su elettrodi orizzontali risulterebbe che la giacitura ha influenza trascurabile, ma sarà interessante stabilire l'eventuale ripetersi dell'inversione di effetto.

Per quanto riguarda quest'ultima, è in istudio nelle diverse condizioni, una determinazione più accurata in funzione del tempo delle variazioni della tensione all'inizio, e dopo la fine dell'azione degli ultrasuoni.

Per quanto ogni definitiva interpretazione dei risultati sia prematura, finchè non è completo il quadro delle esperienze in corso, è fin d'ora possibile scegliere tra le numerose ipotesi prospettabili *a priori*.

È anzitutto evidente che l'ipotesi di una rilevante influenza della cosiddetta « resistenza al passaggio elettrodo elettrolita » è inconciliabile con i risultati precedenti, dato che, proprio alle più elevate densità di corrente, allorché l'eliminazione, visibilmente operata degli ultrasuoni, di ogni residuo gassoso dalla superficie dell'elettrodo dovrebbe dare, secondo questa ipotesi, la massima depolarizzazione, l'effetto è, invece, piccolo o addirittura negativo. Improbabile sembra pure l'intervento delle forze di capillarità. È tuttavia probabile che la profonda alterazione delle condizioni di formazione, accrescimento e liberazione delle bolle possa spiegare la tendenza iniziale a diminuire, all'atto dell'inserzione degli ultrasuoni, e ad aumentare alla fine della loro azione, tendenza che si riscontra anche nel campo in cui l'effetto di regime è polarizzante, alla scomparsa ed al ritorno delle bolle sull'elettrodo.

Poco probabile sembra pure un'azione chimica del tipo varie volte riscontrato per gli ultrasuoni, ad esempio, con soluzioni contenenti ossigeno disciolto, nelle quali si origina formazione di acqua ossigenata.

Infatti l'andamento dei fenomeni non muta neppure in soluzioni completamente degasate dall'azione prolungata degli ultrasuoni.

La spiegazione dei fenomeni riscontrati sembra piuttosto da ricercarsi nelle più recenti vedute sulla sovratensione dell'idrogeno ⁽¹⁾.

Secondo queste, sui metalli dotati di elevato potere adsorbente (Pd, Pt attivi), il processo più agevole è quello di adsorbimento dei protoni nei centri attivi della superficie.

In queste condizioni, la velocità di liberazione dell'idrogeno è essenzialmente definita dal processo di disadsorbimento dell'idrogeno molecolare dalla superficie, il quale si svolge praticamente senza ostacoli solo su elettrodi di elevatissima attività ⁽²⁾, che si comportano come reversibili. Su questi elettrodi, il passaggio di corrente produce un continuo scambio di protoni tra la soluzione e la superficie elettrodica, da un lato, e di idrogeno tra lo strato adsorbito e l'atmosfera di idrogeno gassoso dall'altro, per cui il potenziale è legato alla velocità di diffusione.

Sul platino ordinario, a densità di corrente relativamente basse, è probabilmente il processo di disadsorbimento quello che decide il potenziale catodico.

Oltrepassata la regione di completa saturazione della superficie, il processo di scarica si trasforma, probabilmente, in quello di Gurney, cioè, almeno in soluzione acida, nel trapasso di elettroni dalla superficie dell'elettrodo ai protoni idratati, ed è questo il processo che decide il valore del potenziale catodico.

(1) BUTLER, « Proc. Roy. Soc. London » (A), 157, 423 (1936); « Zs. f. Elektroch. », 44, 55 (1938); St. v. NARAY SZABÓ, « Zs. f. Phys. Ch. » (A), 178, 355 (1937); id., 181, 372 (1938); KANDLER, KNORR, SCHWITZER, id., 180, 281 (1937).

(2) Sugli elettrodi attivi di KANDLER, KNORR, SCHWITZER « Zs. f. Phys. Ch. » (A), 180, 281 (1937), questa condizione è da ritenersi verificata e il processo diviene reversibile.

Le vedute precedenti, eventualmente integrate prendendo in considerazione l'occlusione di idrogeno da parte dell'elettrodo (cioè la sua saturazione interna, oltrechè, superficiale) e lo stato di saturazione della soluzione, permettono di chiarire l'influenza degli ultrasuoni. Questa può esercitarsi sull'idrogeno sia occluso nell'elettrodo, sia adsorbito alla sua superficie, sia disciolto in soluzione, ed è, in parte, analoga a quella della circolazione dell'elettrolita.

Nella regione in cui la tensione catodica, in assenza di ultrasuoni, si sposta rapidamente al crescere della corrente polarizzante per l'accumularsi dei prodotti della scarica, l'azione degli ultrasuoni si fa sentire assai fortemente, in quanto provvede ad eliminare i prodotti stessi dall'elettrodo, oltre che dalla soluzione, ed impedisce, quindi, lo stabilirsi del regime di saturazione corrispondente alla corrente circolante. Tale azione diviene sempre meno efficace al crescere della velocità di scarica.

Raggiunta la regione di libero svolgimento di gas, la formazione delle bolle provvede sempre più attivamente ad eliminare i prodotti della scarica, per cui l'azione ausiliaria degli ultrasuoni si fa sentire in misura sempre più ridotta.

Il fatto che questa azione arrivi ad invertirsi, oltrechè ad annullarsi, in soluzione di HCl, non sembra attribuibile ad alterazioni della superficie degli elettrodi, dato l'andamento delle curve di ritorno, e dato che la superficie dell'elettrodo conserva il suo aspetto speculare.

Si potrebbe invece pensare ad una influenza degli ultrasuoni sulle condizioni del doppio strato, o, infine ad un particolare tipo di azione chimica.

In conclusione, lo studio dell'azione degli ultrasuoni sui fenomeni di polarizzazione catodica ha rivelato effetti di sorprendente regolarità, la cui discussione fornisce un importante contributo chiarificatore sulla natura della sovratensione di idrogeno, su elettrodi di platino liscio.

Mi è grato il dovere di ringraziare il prof. L. Cambi per avermi incoraggiato in questo studio, e per avermi concesso i mezzi per effettuarlo ⁽¹⁾.

(1) Nel corso delle esperienze sono stato validamente aiutato dallo studente J. Orshansky.

Geologia storica. — *Probabile esistenza del Paleolitico nelle isole Egee e vicende geologiche di queste durante il Quaternario*⁽¹⁾.
Nota di P. PEOLA, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. G. ROVERETO.

Il capitano D'Albertis raccolse nell'isola di Milo, durante la Crociera del *Violante*, da lui eseguita nel Mediterraneo nel 1876, un coltellino di ossidiana, che passò nella raccolta dell'Istituto geologico della R. Università di Genova, dove rimase dimenticato, e solo ultimamente è stato ritrovato dal prof. Rovereto.



Il coltellino raccolto a Milo lungo il sentiero, che dal villaggio di Trippiti conduce a Festo, è di ossidiana grigia, nerastra, opaca. La sua lunghezza è di 77 mm., la sua maggior larghezza è di 23 mm. e lo spessore massimo è di 8 mm. Esso è dato da una lamina staccata da un nucleo; una sua superficie, quella di stacco, è piana, non lavorata; l'altra è fatta a tetto ed è data da precedenti superfici di stacco di altre lamine, ed in essa non traspare lavorazione posteriore allo stacco; alla base presenta un'appendice

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Geologico della R. Università di Genova.

(2) Nella seduta del 3 aprile 1938.

quasi a foggia di manico, lungo poco meno di un cm., che credo si sia formata naturalmente dallo stacco della lamina e non prodotta da ulteriore lavorazione. Solo ai bordi laterali presenta alcuni ritocchi, che danno una serie di dentini pochissimo pronunciati, i quali rendono lo strumento molto tagliente, specialmente se usato a mo' di sega. È largamente appuntito. La superficie liscia di stacco è concava, concavità dovuta alla forma del nucleo, e quindi la superficie opposta è convessa.

Tali piccoli ritocchi ai margini fanno riferire il coltellino all'*aurignacciano*.

Gli archeologi, che hanno studiato i reperti dei numerosi scavi eseguiti nelle isole Egee, sono invece unanimi nell'escludervi il paleolitico e nell'ammettervi, al massimo, il neolitico in qualche località.

Il DUSSAUD in *Les civilisations préhelleniques dans le bassin de la mer Egée*, pur ammettendo di aver scritto che « nelle Cicladi lo strato neolitico propriamente detto manca » crede che « lo strato neolitico di Knosso contenga utensili di ossidiana, e numerose schegge siano state trovate nella stazione neolitica di Magasa » e che del primitivo popolamento del mare Egeo non si possa dir altro che ha cominciato durante il neolitico, e che l'industria attesti un'origine europea più o meno mediterranea.

Il SERGI, in *Le prime e più antiche civiltà*, scrive che di età paleolitica non vi è indizio alcuno nell'Egeo, e conclude che le vicende geologiche delle terre egee debbono essere state di ostacolo alla loro occupazione da parte dell'uomo di tal tempo. Ed a tali vicende geologiche si riferisce pure J. DE MORGAN (*Préhistorique orientale*) per asserire che « all'epoca dell'Egeide i paesi dell'Ellade erano molto più elevati di quello che lo siano oggidì, le loro montagne, coperte di neve, possedevano i loro ghiacciai, chè Otto Maull ha trovato sulle alte montagne della Grecia le tracce di due fasi glaciali. Ora nell'isola di Delo si è trovato (Cayeux) un molare di *Elephas antiquus*, il quale prova che, all'epoca chelleense, Delo apparteneva ancora al continente Egeo, e poteva essere visitata dai grandi erbivori di questo continente (Negris) ⁽¹⁾.

È dopo l'epoca delle industrie paleolitiche dei nostri paesi che si è prodotta l'immersione dell'Egeide. L'uomo ha dunque potuto vivere su quella terra.... Sembra adunque che, se l'Egeide fosse stata popolata quando l'isola di Creta, il Peloponneso e la Tracia ne facevano ancora parte, essa non

(1) Recentemente Jean PETROCHILOS (*Découverte de l'Elephas antiquus dans l'île Cythère (au sud du Peloponèse) et âge de sa dernier séparation du continent* in « Compte-rendu sommaire des Séances de la Société géologique de France », fasc. 4°, del 21 febbraio 1938) ha dato notizia di aver trovato nell'isola Citera ossa e denti di *E. antiquus* e di essere venuto alla conclusione che « essendo l'isola piccola, gli elefanti non potevano vivere senza il collegamento con il continente, quindi l'esistenza di tale collegamento era ormai certa, e la separazione dell'isola sarebbe avvenuta dopo il *rissienne* » cioè durante il paleolitico superiore.

sarebbe stata abitata che su qualche raro punto...» e conclude che «da tutti questi studi risulta che il più grande disordine ed indecisione regnano ancora in tutto ciò che riguarda gli inizi dell'Egeide e della Siria».

Discutendo poi delle stazioni archeolitiche e neolitiche della Siria, del Caucaso e della Mesopotamia ecc., conclude affermando che «si deve solamente dedurre che gli strati profondi sono stati rimescolati in parecchi punti e le selci scheggiate si sono trovate trasportate vicino ad oggetti e monumenti che non hanno nulla in comune con loro».

È la soluzione di un problema paleontologico che dipende in gran parte dalla soluzione di un problema geologico. La geologia ha difatti dimostrato che il contorno del Mediterraneo, ancora in tempi del quaternario antico, non era quale lo è al giorno d'oggi; al posto delle isole Egee esisteva un continente, l'Egeide, il quale metteva in comunicazione la Grecia e la penisola balcanica con l'Asia Minore e, mediante questa, con l'Egitto.

Il NEUMAYR è stato uno dei primi a dire che, durante il miocene, non esisteva il mare Egeo, ma una terra cosparsa di numerosi laghi di acqua dolce. La parte meridionale dell'Egeo si abbassò solo alla fine dell'era terziaria in «epoca così tarda che si può dubitare che l'uomo abbia assistito all'ultima fase di esso». Anzi più recentemente asserì che «la presenza di ippopotami diluviali a Creta e le condizioni di Cos provavano che lo sprofondamento aveva avuto luogo dopo la fine del terziario, in un'epoca in cui l'uomo già esisteva, e perciò il preistorico deve studiare seriamente la questione se i primi abitatori della Grecia non siano immigrati dall'Asia Minore per il ponte continentale sopradescritto ed ora scomparso».

Secondo il SUESS, è solamente al sud che si trova il Mediterraneo, e fino allora l'Europa fu sempre unita all'Asia in questa direzione mediante un largo istmo continentale. «Dopo, la parte sud di questo continente si sprofonda, ed il quarto strato mediterraneo penetra fino a Milo, a Rodi ed all'est dell'isola di Cos, dove depositi marini riposano su formazioni di acqua dolce levantini (del pliocene). Verosimilmente è l'epoca della formazione di una larga zona di frattura scaglionata lungo la linea vulcanica delle Cicladi, di Nisino, Santorino, Milo, Poros, Metana ed Egina; è in questa zona che sono continuati fino a questi giorni i terremoti e le eruzioni vulcaniche. Pare che le fratture si prolunghino fino verso il golfo di Corinto, dove, secondo le osservazioni del Fuchs, l'istmo presenta tutti i caratteri di una grande fossa di affondamento. Molto più tardi infine tutto il continente Egeo si sprofonda; potenti depositi di acque dolci levantine, tagliate a picco, designano le nuove spiagge; il Mediterraneo si avvanza, penetra nel bacino pontico e nel mare d'Azof, e anche al di là del contorno così regolare di questo mare. Un nuovo ordine di cose si stabilisce, al posto di alte montagne si trova il mare profondo, in numerosi punti, di parecchie migliaia di piedi; questo fenomeno si è effettuato in un'epoca molto recente, in ogni caso dopo l'epoca glaciale. Può dirsi che l'uomo vi fosse stato testimone».

Il BOULE in *Les Grottes de Grimaldi*, vol. I, *Géolog. et Paleont.* (1896), trattando delle linee di spiaggia, che si osservano lungo le coste del Mediterraneo, come conclusione scrive: « Il fenomeno di spostamento delle spiagge durante le ultime epoche geologiche è un fenomeno generale per il Mediterraneo. È questa la prima conclusione che emana dalle nostre osservazioni. Dallo stretto di Gibilterra alle coste siriane non vi è un paese del litorale del Mediterraneo che non presenti la sua ghirlanda di depositi marini emersi ad altezze variabili sopra il livello del mare attuale... Dopo la trasgressione pliocenica, il livello del mare si è abbassato progressivamente attorno ai continenti allora ancora molto instabili... Il risultato finale è che alla fine del pliocene il livello generale relativo del mare nelle regioni mediterranee era inferiore a quello che esso aveva raggiunto in certi momenti del pliocene inferiore e medio... I depositi quaternari sono, quasi ovunque, orizzontali e, per conseguenza, posteriori ai grandi movimenti tettonici... e le plaghe emerse, veramente quaternarie, si trovano generalmente ad una altitudine di 9-30 m. Le coste di 30-15-8 m. sono le più frequenti da un estremo all'altro del Mediterraneo... Per la loro piccola altitudine, le plaghe quaternarie hanno dato ai geologi l'impressione di terreni molto recenti e sono stati considerati come appartenenti a non oltre il plistocene superiore. I mammiferi fossili ci forniscono invece un criterio cronologico più preciso. Ovunque si sono riscontrati resti di *E. antiquus* del plistocene inferiore, oppure prodotti dell'industria umana contemporanei a questa fauna, si sono mostrati stratigraficamente al di sopra delle plaghe emerse di piccola altitudine... L'esame della *Carta generale degli Oceani* del Principe di Monaco rivela l'esistenza nelle altre regioni del Mediterraneo di piattaforme sottomarine analoghe a quelle di Grimaldi; ma aventi superfici spesso più considerevoli. Le coste della Siria e dell'Asia Minore si abbassano bruscamente sotto le acque, eccetto che nel golfo di Alessandretta, dove l'isobata di 200 sembra prolungarsi avanti il ponte orientale di Cipro, dalla quale lo separano profondità di 600 m. A partire da Rodi questa stessa curva riunisce i diversi arcipelaghi del mare Egeo in un piccolo numero di blocchi, dei quali gli uni si saldano sia al continente asiatico, sia alla penisola balcanica, e gli altri non sono separati che da stretti relativamente poco profondi. Creta era ancora allo stato di isola ».

E poco oltre, ammessa la presenza di mammiferi fossili europei in Africa, crede che « non si possa spiegare questa ripartizione che con antiche connessioni terrestri, e tali connessioni implicherebbero sia delle variazioni nel livello generale del Mediterraneo, sia l'affondamento di ponti continentali o di istmi, i quali, altre volte, riattaccavano tra loro queste diverse terre... Noi non abbiamo prove dirette di affondamenti recenti, al contrario abbiamo prove di cangiamenti di livello relativo al mare. Nello stato attuale della scienza è a questa spiegazione che dobbiamo attenerci ».

Quale ampiezza minima bisogna attribuire a questo movimento? si domanda il BOULE, e così risponde: « L'esame delle carte batimetriche mostra che un abbassamento di 200 m. dell'attuale livello del mare attaccherebbe, all'Italia, l'Elba, la Corsica, la Sicilia e Malta. Qualche decina di metri in più sarebbe sufficiente a stabilire un ponte tra la Sicilia e l'Africa. Le Baleari, Candia e Cipro resterebbero ancora completamente circondate dalle acque. Sono queste le condizioni che io credo sufficienti per rendere conto dei fatti paleontologici relativi al quaternario. Essi si potrebbero accordare facilmente con i dati della geologia continentale senza dover ricorrere a sprofondamenti dei quali io non saprei negare l'esistenza *a priori*, ma dei quali non abbiamo prove dirette ».

Egli poi vede una corrispondenza tra gli spostamenti del livello del mare e le espansioni glaciali.

L'HAUG, nel suo *Traité de géologie*, a sua volta conferma l'esistenza di più estese terre continentali dell'Egeo ancora durante il quaternario medio, ed il ROVERETO (*Trattato di geologia morfologica*) crede che una circoscritta Egeide sia esistita fino al quaternario superiore.

Oggigiorno bisogna far intervenire nella spiegazione delle modificazioni dell'Egeo anche la teoria eustatica, posta in relazione con quella epirogenetica. È noto che intercede una relazione tra i movimenti di innalzamento e di abbassamento della crosta terrestre e le invasioni glaciali.

Per la formazione di potenti depositi glaciali occorre la congelazione di una grande quantità di vapori d'acqua, che vengono tratti dalle acque del mare, il cui livello, per tale fatto, viene ad essere abbassato. Studiando il fenomeno sotto questo punto di vista si arriva alla conclusione che il limite inferiore dell'abbassamento del livello marino provocato per l'assorbimento dell'acqua necessaria per formare i ghiacciai quaternari potrebbe essere stabilito a -120 m. Ma la diminuzione delle acque marine e l'aumento di peso esercitato dai ghiacciai sopra alcuni punti della crosta terrestre, ne alterano l'equilibrio statico, e tale alterazione porta, a sua volta, a spostamenti nella crosta terrestre stessa, spostamenti che si combinano con quelli del livello del mare. La fusione dei ghiacciai durante le fasi interglaciali rompe nuovamente l'equilibrio raggiunto, e si producono altre alterazioni nella crosta terrestre e nel livello del mare.

A questa teoria va connessa quella che riguarda la *trasgressione fiandrense*, già escogitata fin dal 1885 da RUTOT e VAN DE BROECK, per designare i depositi di sabbie campiniane delle Fiandre, studiati poi dal DUBOIS, da BRIQUET, e riesaminate, fra noi, dal A. C. BLANC, nel 1936, nel suo studio: *La stratigraphie de la plaine côtière de la Basse Versilia (Italie) et la transgression Flandrienne en Méditerranée*, pubblicato in « *Revue de géographie physique et de géologie dynamique* », 1936, nel quale scrive: « io adoprerò per il Mediterraneo il termine fiandrense nel senso generale datogli dal Dubois per indicare i depositi di colmata del pleistocene superiore e dell'olocene

delle nostre basse valli e dei nostri piani costieri mediterranei contenuti fino a profondità certe volte molto considerevoli con elementi stratigrafici composti in gran parte di torbe, di fango più o meno torboso, di depositi alluvionali, di formazioni salmastre o marine. Secondo il Dubois, il fiandrense copre i depositi epiglaciali e postglaciali propriamente detti... e quindi l'inizio della trasgressione fiandrense sarebbe, in questo caso, cronologicamente corrispondente alla fine del periodo di accrescimento dell'ultima glaciazione nel senso corrente di accrescimento in estensione dei ghiacciai ».

Affinchè si possa verificare una corrispondenza fra il movimento del livello marino e le invasioni glaciali, è necessario, non solo ammettere la costanza nella quantità delle acque, ma anche la costanza nella forma del recipiente che quest'acqua contiene, cioè nel fondo e nel pendio delle coste dei mari. Ma la forma di tale recipiente può essere mutata per diverse cause, ad esempio: la diminuzione o l'aumento nella quantità di acqua nei mari può produrre una variazione nella pressione che l'acqua esercita sul fondo e sui lati del recipiente marino, variazione che può deformare il vaso, e quindi produrre un cambiamento nel livello dell'acqua; la diminuzione o l'aumento delle quantità dei ghiacci, che va a deporsi sulla crosta terrestre, può determinare diversità di pressione sui vari punti della crosta terrestre e rompere l'equilibrio che vi esiste; i fenomeni endogeni, cioè quelli sismici e quelli vulcanici, possono produrre variazioni nella crosta terrestre e sui fondi marini tali da portare, come conseguenza, variazioni nel livello marino. Il fenomeno è certamente più complicato di quello che può sembrare a prima vista, troppi e svariati sono i coefficienti che vi agiscono. Lo stato di equilibrio fra la crosta terrestre ed il livello del mare sarebbe determinato dalla risultante di tutte queste forze agenti sulla terra e sull'acqua; ma tali forze sono a loro volta soggette a continui mutamenti, e quindi anche la loro risultante verrà continuamente ad essere soggetta a variazioni, rompendo incessantemente lo stato di equilibrio che vi dovrebbe essere tra la terra e l'acqua, tra i continenti ed i mari.

Ora la ingressione fiandrense, che è partita da un livello marino che fu di almeno 100 m. inferiore a quello attuale, sommato con l'effetto delle azioni di abrasione dovute al mare invadente, dà cifre di profondità che, poste in relazione con le batimetriche attuali, valgono da sole a spiegare gran parte dell'insularità delle estreme propaggini della terra greca nel mare Egeo; e il distretto vulcanico di Milo, forse iniziatosi nel pliocene, per questa ingressione fiandrense della fine del quaternario, viene ridotto ad un'isola, quasi contemporaneamente al fatto che uno degli ultimi paleolitici vi lavora un suo arnese e crea con la locale opaca ossidiana un'industria, che il sopravveniente uomo neolitico e navigatore diffonderà in tutto il Mediterraneo orientale.

Biologia. — *Il sistema nervoso degli «Ascidieae» nel piano di organizzazione dei Cordati.* Nota di M. FEDELE, presentata⁽¹⁾ dal Socio U. PIERANTONI.

Fin dal 1927, nel rendere noto sinteticamente, nei «Rendiconti» di questa R. Accademia⁽²⁾, la presenza e la costituzione di un sistema nervoso viscerale nei Tunicati, dissi come questo negli Ascidieei fosse in rapporto con il cordone cellulare dorsale.

La mia descrizione, sintetica ma esplicita e precisa, e che non permette lasciare ulteriori dubbi sui rapporti fra cordone dorsale e sistema nervoso, contrasta nettamente con affermazioni altrettanto recise espresse in qualche recente lavoro, che, pur non avendo affrontato lo studio del sistema nervoso degli Ascidieei con metodica adatta, riporta su di questo considerazioni che si estendono dalla valutazione delle capacità prospettiche, e del valore del cordone stesso, fino alle omologie del sistema nervoso degli *Ascidieae*.

Già Huus (1924)⁽³⁾ in uno studio su *Corella parallelogramma*, negando al cordone dorsale ogni legame diretto con il ganglio cerebroide e ogni rapporto delle sue cellule con fibre nervose, crede di riscontrare invece stretti rapporti fra cordone e organi genitali, tanto da battezzare il cordone dorsale con il nuovo nome di cordone ganglio-genitale «Ganglio-genitalstrang».

Successivamente il Brien (1927)⁽⁴⁾, e contemporaneamente alla mia pubblicazione sul sistema nervoso viscerale, dove sono chiaramente espressi i rapporti fra cordone dorsale e sistema nervoso, e che il Brien evidentemente non poteva conoscere, pubblica una ricerca sulla blastogenesi di *Aplidium zostericola*, che lo porta ad affermazioni sulla natura del cordone

(1) Nella seduta del 3 aprile 1938.

(2) M. FEDELE. Ancora sulla organizzazione e le caratteristiche funzionali dell'attività nervosa dei Tunicati. III. Il sistema nervoso viscerale. «Rendiconti R. Accademia Lincei», vol. 6, ser. 6^a, 1927, p. 532.

(3) F. HUUS, Genitalorgane und «Ganglio-genitalstrang» bei *Corella parallelogramma* O. F. M. Ein Beitrag zur Kenntnis der postlarven Entwicklung der Ascidien. «Videnskaps-selskapets Skrifter», I. Mat. Naturw. Klasse, 1923, n. 19, pp. 1-50, Taf. 1-4.

(4) P. BRIEN, Contribution à la blastogénèse des Tuniciers. Formation du système nerveux et des glandes génitales dans les blastozoïdes d'*Aplidium zostericola* (Giard). «Arch. de Biol.», to. 37, pp. 1-44, 1927, pls. 1-2.

dorsale e sulla costituzione del sistema nervoso degli Ascidiacei, che le mie ricerche dimostrano nettamente contrastanti con la realtà dei fatti; per cui, considerato che il Brien ritorna ancora, nel 1933⁽¹⁾, in epoca cioè in cui egli avrebbe dovuto conoscere i miei risultati, sulle stesse affermazioni e con la stessa recisione nei giudizi, non sarà superfluo esporre brevemente qualche considerazione sui fatti come si presentano negli Ascidiacei da me studiati (*Ciona intestinalis*, *Clavelina rissoana*), considerata anche la importanza delle ricerche ulteriori da me fatte, che sono state coronate dal pieno successo nella soluzione del difficilissimo problema del significato e destino del cordone cellulare dorsale negli Ascidiacei.

Variamente ed erroneamente interpretato il cordone cellulare dorsale delle Ascidie dai vari Autori, è ritenuto ora una vera formazione ganglionare esso stesso, ora un organo atrofico e in involuzione, e si è molto discusso sui suoi rapporti prossimali ponendo la sua origine ora dal ganglio cerebroide, ora dal canale della glandola neurale; ma è certo che esso rappresenta la parte posteriore del tubo neurale primitivo della larva.

Le recenti ricerche del Brien (1927, 1933) lo portano alla conclusione che anche in *Aplidium* il cordone dorsale è in continuità con il canale escretore della glandola neurale, che esso prolunga posteriormente.

Però questo, data la genesi delle varie parti derivanti dal tubo neurale primitivo, non ci autorizza a fare deduzioni sulla natura non nervosa di questo organo; ma il Brien esplicitamente afferma che « il cordone neurale non è nè ganglionare, nè fibrillare. Esso non presenta rapporto alcuno con i visceri nei quali si prolunga. Le cellule che lo costituiscono non hanno alcuna differenziazione istologica, che potrebbe far supporre una funzione nervosa; esse son piccole, e hanno aspetto di cellule embrionali ».

Il cordone dorsale avrebbe però un ufficio importante nella blastogenesi di *Aplidium zostericola* (Brien, 1927) come nella rigenerazione di *Archiascidia neapolitana* e *Clavelina lepadiformis* (Brien, 1933), in quantocchè nella prima ogni strobila riceve un frammento del cordone dorsale dell'ascidiozoide gemmante, frammento che nel corso della blastogenesi costituisce il tubo neurale; e così nelle altre specie « in tutti i tronconi di ascidie capaci di rigenerazione toracica e comprendenti un frammento di cordone dorsale, è questo ultimo che riforma il tubo neurale del torace rigenerato ».

Ma, per il Brien, mentre questo nuovo tubo neurale nella sua parte anteriore edificherà, nello stesso modo del tubo neurale larvale, il ganglio cerebroide, il cordone dorsale, dato dalla parte posteriore, avrebbe ben altro destino. Esso in *Aplidium*, « allorchè il blastozoide acquisterà i suoi carat-

(1) P. BRIEN, *Régénération thoracique chez Archiascidia neapolitana* (JULIN). *Structure du système nerveux central*. « Bull. Biol. France et Belgique », to. 67, p. 100, 1933 (v. Sp. *Sistema nervoso: Régénération*, p. 114, *Signification*, p. 119).

teri di ascidiozoide adulto, si sdoppierà, a livello dello stomaco, in un abbozzo ovarico dorsale e un abbozzo testicolare ventrale.

Da queste ricerche del Brien, mentre possiamo dedurre con sicurezza una capacità prospettica nella blastogenesi e nella rigenerazione degli elementi del cordone dorsale, in tutti i suoi segmenti, a dare elementi nervosi e riformare financo il ganglio cerebroide, esse non ci chiariscono completamente la natura e l'atteggiamento della parte prossimale e toracica del cordone nel nuovo e vecchio ascidiozoide.

Insomma la natura di questo organo rimane ancora enigmatica e non mi pare che, anche sulla base dei risultati dello stesso Brien, si possa legittimamente concludere che il « cordone dorsale, che, ontogeneticamente e blastogeneticamente, deriva dalla parte più grande del tubo neurale embrionale, sia negli Ascidiacei un organo embrionale in regressione più o meno accentuata secondo i gruppi ».

I fatti son ben diversi nelle specie da me studiate, e mi portano a credere che in tutti gli Ascidiacei le cose, in genere, si debbano svolgere ben diversamente e nel senso che anche la parte posteriore del tubo neurale larvale non smentisca in modo così singolare la sua origine, ma sia invece destinato a svolgere una parte molto importante, essenziale e in accordo pienamente con la sua origine, nella costruzione del sistema nervoso dell'adulto.

Intanto il cordone cellulare dorsale non è organo atrofico, ma perdurante e in attiva proliferazione durante l'accrescimento. Esso non è formato da cellule ganglionari, e le osservazioni che negano che esistano negli elementi che lo costituiscono strutture gangliari, e che ne partano nervi, sono esatte. Ma il cordone dorsale, conservando la sua natura primordiale, è l'abbozzo generatore di ricche formazioni nervose, e gli elementi che lo costituiscono hanno natura di neuroblasti.

Questi sono destinati ad evolversi, durante le organogenesi e l'accrescimento somatico, e a dare gli elementi nervosi che avvolgono e fiancheggiano il cordone; cellule nervose, che nel loro sviluppo, che è possibile seguire nei minimi particolari, danno prolungamenti che formano reti e plessi paracordonali e si pongono in rapporto con i fasci nervosi correnti collateralmente lungo il percorso del cordone, alimentandoli.

Ne nasce una ricca organizzazione nervosa che corre dal ganglio cerebroide, seguendo il cordone cellulare, e va lungo il seno dorsale, seguendo poi i dotti genitali, l'intestino terminale e, passando fra questo e la parte esofagea, verso l'ansa intestinale, terminandosi all'altezza del testicolo.

Questa formazione, costante in tutti gli individui fino a quelli delle maggiori dimensioni (in *Ciona* ho osservato individui di più che 15 cm. di lunghezza) è formata: 1. al centro dal cordone cellulare dorsale, costituito di elementi giovanili, embrionali e mostrante stadi di distacco e migrazione dei suoi elementi; 2. intorno a questo, a poca distanza, un avvolgimento di cellule nervose fusiformi e multipolari con evidenti stadi di

sviluppo dei prolungamenti cellulari; 3. più lateralmente, e più esteso, uno strato fiancheggiante ai due lati di cellule multipolari, i cui prolungamenti formano reti e plessi e vanno in parte ad alimentare i fasci di fibre a lunga via, che corrono lateralmente o attraverso la formazione cellulare; 4. cellule motrici piriformi, identiche alle grandi cellule motrici dello strato periferico del ganglio cerebroide, disseminate specialmente lungo il tratto prossimale e toracico della formazione, ed i cui prolungamenti vanno a sfociarsi in sottili fibre nei fasci nervosi fiancheggianti; 5. fasci di fibre formanti l'insieme delle lunghe vie della formazione nervosa e formati da due lunghi fasci fiancheggianti all'esterno gli elementi derivanti dal cordone, più cospicuo il fascio di sinistra, dai quali si separano fasci anastomotici fra i due lati, fibre che vanno ai vari visceri posti lungo il percorso, fibre che si portano alla muscolatura corrente lungo il seno dorsale e recantesi all'intestino terminale, e che raccolgono fibre sensitive derivanti da speciali organi sensoriali a cupola allogati lungo la parete cloacale del seno dorsale, e raccolgono, infine, fibre delle reti e plessi della formazione e prolungamenti nervosi dati direttamente dalle cellule gangliari stesse.

Questi fasci fibrosi nel loro estremo prossimale convogliano fibre penetranti direttamente nel ganglio con un notevole fascio che penetra in questo nel suo estremo mediale posteriore, a forma di un nervo bisettore dell'angolo formato dai due grossi tronchi somatici posteriori di *Ciona*. Esiste inoltre un nervetto a destra, congiunto direttamente al ganglio anch'esso, o più comunemente fuso per un tratto col tronco somatico di destra.

Per questi due nervi si possono notare alcune varietà all'origine del ganglio, secondo le età e gli individui, ma sono formazioni costantemente presenti e seguono ai lati il cordone e gli elementi che ne derivano, fino alla estremità viscerale. Essi mettono, con le loro fibre prossimali intragangliari, in rapporto la parte viscerale della formazione con centri intracerebroidi, i cui elementi sono stati da me anche individuati.

E ancora un particolare, che dimostra come sia di secondaria importanza la connessione che prende il cordone cellulare propriamente detto con questa o quella parte dei derivati anteriori del tubo neurale primitivo, con il ganglio cerebroide o con il tratto posteriore del canale escretore: non solo le fibre nervose ora descritte si fondono con il ganglio cerebroide, ma tutta la parte prossimale degli elementi ganglionari derivati dal cordone cellulare, avvolge, fondendosi con prolungamenti, nell'angolo formato dai due tronchi somatici posteriori e intorno al tronco di sinistra e nell'estremo posteriore del ganglio, sia il ganglio cerebroide stesso, sia i tronchi che ne nascono, in modo da non lasciare nessun dubbio che, se il cordone, per ragioni di origine comune, può presentare connessioni con l'estremo posteriore del canale escretore, le connessioni anatomiche degli elementi nervosi che ne derivano si stabiliscono innegabilmente, direttamente e indirettamente, in pieno con il ganglio cerebroide.

Tutto questo era sfuggito ai vari ricercatori e si comprendono così i dispareri e le oscure interpretazioni di una formazione così importante, morfologicamente e fisiologicamente, come il cordone cellulare dorsale delle Ascidie. Verosimilmente questa formazione da me descritta per *Ciona intestinalis*, e che si presenta con minore ricchezza di elementi e diversità non essenziali di costituzione che qui non descrivo, in *Clavelina*, si presenterà con gradi diversi di sviluppo e complessità nelle diverse specie di Ascidiacei, ma io ho ragione di ritenere, da saggi fatti in altre specie, che sostanzialmente le cose si mantengono in tutte su di un piano fondamentalmente identico di organizzazione, nel quale l'ufficio e il significato del cordone cellulare dorsale rimane costante.

Guardando complessivamente la formazione che ho a grandi linee abbozzata, ma che descriverò e illustrerò minutamente in una trattazione definitiva, possiamo dire che ci troviamo in presenza di un cospicuo centro nervoso con elementi meno addensati che nel ganglio cerebroide, ma sufficientemente localizzati e di aspetto unitario.

In esso riscontriamo vie motrici e sensitive, scarsi elementi nel tratto prossimale e toracico specialmente, che possiamo riferire a vie somatiche, e, soprattutto, una ricca formazione ganglionare e vie viscerali. Se fosse lecito fare una comparazione con il neurasse dei Vertebrati allo stato adulto, io direi che negli Ascidiacei dal cordone cellulare dorsale si sviluppano, contrariamente a quanto avviene nel midollo spinale dei primi, scarsissimi elementi e vie somatiche, venendo a mancare il terreno di distribuzione governato esclusivamente dal ganglio cerebroide, mentre prendono assolutamente predominio gli elementi viscerali, che formano, specialmente nel suo tratto addominale, quasi tutta la trama della formazione generata dal cordone.

Ed il compito degli elementi del cordone non è diverso da quello degli elementi primitivi del tubo neurale degli altri Cordati; essi, con la loro ulteriore evoluzione ne forniscono gli elementi definitivi, e ne provvedono all'incremento numerico durante l'accrescimento somatico.

Questo processo proliferativo del cordone cellulare si può completamente seguire nelle Ascidie, dove è chiaramente visibile il distacco e la migrazione dei neuroblasti periferici del cordone, il loro periodo di accrescimento e la formazione graduale dei prolungamenti, lo spiccato ameboidismo di questi e la fissazione definitiva della forma. In modo analogo provvedono alla costruzione del ganglio cerebroide gli elementi della parete dorsale della vescicola anteriore del tubo neurale della larva.

Solo, qui gli elementi cellulari ganglionari si dispongono alla periferia intorno al neuropilo centrale. Nell'apparato nervoso paracordonale le cellule si dispongono, più lassamente, nella parte mediale, con formazioni plessiformi e a rete dei prolungamenti, e le fibre a lunga via sono disposte ai due lati esterni.

Nell'organo nervoso paracordale predominano in modo assoluto i centri gangliari viscerali, ma nella parte più prossimale al ganglio appaiono elementi somatici, comparabili per conformazione e comportamento a quelli del ganglio cerebroide.

Possiamo, dunque, affermare a conclusione che, mentre da parte della vescicola anteriore del tubo neurale primitivo delle Ascidie, si sviluppa il ganglio cerebroide, al quale sono collegate quasi tutte le vie sensitive e interamente le vie motrici per la muscolatura del corpo, dalla parte posteriore del tubo neurale si ha un insieme ridotto di elementi nervosi connessi a vie sensitive e motrici, le quali, pur non appartenenti alla muscolatura esterna del corpo, possiamo ritenere per struttura e funzionamento somatiche, e più ricche vie viscerali, formanti un ricco addensamento paracordale estendentesi dal ganglio cerebroide alle gonadi. In questi animali, dunque, la genesi degli elementi nervosi autonomi è comparabile di massima a quella dei Vertebrati, e i centri di questa organizzazione nervosa viscerale si presentano nelle Ascidie, sotto forma addensata, intorno all'asse generatore.

Questi centri, anche negli Ascidiacei, prendono rapporti con centri superiori intracerebroidi.

Stabilito i fatti, se vogliamo entrare nel campo delle omologie, vediamo subito come sia erroneo fare una netta distinzione fra valore comparativo del tubo neurale della larva degli Ascidiacei e sistema nervoso definitivo dell'adulto, rispetto al tubo neurale primitivo e derivati nell'adulto degli altri Cordati. Si è sostenuto che il tubo neurale delle larve degli Ascidiacei, che corrisponde al tubo neurale embrionale dei Cordati, ed è dunque omologo al sistema nervoso centrale dei Cordati, non diviene un elemento nervoso negli Ascidiacei. Nell'ascidiozoide adulto esso sarebbe rappresentato dal canale escretore allo innanzi della glandola neurale e, posteriormente a questa, dal cordone dorsale, organo embrionale, in regressione più o meno accentuata secondo i gruppi e estraneo al sistema nervoso.

Quindi quella diversità nella evoluzione nel sistema nervoso nei Cordati, già accentuata nell'*Anfioxus* per la mancanza del rigonfiamento anteriore, si accentuerebbe ancor più per altra via negli Ascidiacei, perchè alla costruzione del sistema nervoso definitivo concorrerebbe solo la vescica anteriore, e solo in parte (parte dorsale, e, talvolta, ventrale) dando l'altra parete origine alla glandola e al canale neurale.

Questa genesi del ganglio cerebroide ci spiega la mancanza di cavità nel sistema nervoso degli Ascidiacei, ma in essi più stridente diventerebbe la discordanza con gli altri Cordati, se realmente, come si è sostenuto, tutta la parte posteriore del tubo neurale primitivo si mantenesse estranea alla formazione del sistema nervoso definitivo, presentando come si sostiene da Huus e Brien una potenza prospettica, veramente sorprendente, in rapporto con la genesi delle gonadi.

Le mie ricerche invece, rivelando la vera natura del cordone cellulare dorsale, dimostrano che, come nell'embrione negli altri Cordati, negli Ascidiacei, tutto il tubo neurale primitivo della larva è destinato a costruire il sistema nervoso dell'adulto e, mentre da parte della parete della vescicola anteriore si genera il ganglio cerebroide, dalla parte posteriore, attraverso gli elementi del cordone cellulare, si evolve l'apparato nervoso paracordonale, in continuità del ganglio cerebroide, con scarsissime vie da ritenersi somatiche e ricchi centri viscerali.

Fisiologia. — *Sul ritmo normale di alcune secrezioni*⁽¹⁾. Nota di V. FAMIANI, presentata⁽²⁾ dal Socio S. BAGLIONI.

Non molto numerose appaiono nella letteratura le ossevizioni riflettenti il ritmo normale di secrezione, inteso in senso stretto, del pancreas, della parotide e del rene, nè possono dirsi rispondenti allo scopo le poche che vi si trovano.

Così Boldireff⁽³⁾, studiando nei cani la secrezione pancreatica, ha parlato di una attività periodica del pancreas, ma limitandosi solo a stabilire che, indipendentemente dai pasti, il pancreas presenta una attività secretoria ad intervalli di 1^h 30'–2^h 30'.

Osservazioni, nemmeno di questo tipo, non ci risulta siano state fatte per la parotide; mentre, per ciò che concerne la secrezione renale, è da gran tempo ammessa dagli Aa. — anche se di studio del ritmo in senso stretto non possa parlarsi — una certa alternanza funzionale dei due reni. Alternanza osservata anche da Lombroso⁽⁴⁾, che però ammette — mentre lo nega Simon⁽⁵⁾ — un sensibile parallelismo nella quantità totale di urina escreta in periodi di tempo abbastanza lunghi (6–8 ore) da ognuno dei due reni.

Solo più recentemente Ercole⁽⁶⁾, sotto la guida di G. Amantea, ha analizzato il ritmo normale — separatamente, ma contemporaneamente, per i due reni — della secrezione renale, e le sue variazioni in rapporto a stimoli di

(1) Le presenti ricerche furono eseguite nell'Istituto di Fisiologia della R. Università di Messina, allora diretto dal prof. Amantea, alcuni anni fa, ed elaborate in seguito nell'Istituto di Chimica biologica della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 20 marzo 1938.

(3) W. BOLDIREFF, *Die periodische Tätigkeit des Verdauungsapparates ausser des Verdauungszeit*, «Zentral. f. Physiol.», 1904, 18, 489.

(4) U. LOMBROSO, *Contributo alla fisiologia del rene. I. Correlazione funzionale fra i due reni*. «Arch. di Fisiol.», 1911, 9, 377.

(5) I. SIMON, *Ricerche sulla funzione comparata dei due reni*. «Boll. dell'Accad. Med. di Padova», fasc. IV, p. 31, 1913.

(6) M. ERCOLE, *Contributo alla conoscenza del ritmo della secrezione renale*. «Rendic. R. Accad. Naz. dei Lincei», 1924, 33, ser. 5^a, 203.

diversa natura ed intensità, concludendo che la quantità di urina che fluisce complessivamente dai due ureteri, presenta, misurata di minuto in minuto, oscillazioni ritmiche piuttosto regolari, e così anche la quantità di urina che fluisce da ciascun uretere separatamente: « confrontando poi il ritmo separato per i due ureteri, risulta di regola coincidenza negli aumenti e nelle diminuzioni, meno frequentemente susseguenza, e solo di rado contrasto ».

Avendo noi avuto occasione di seguire, per ricerche tendenti ad altro scopo, durante un tempo assai lungo, le secrezioni parotidea, pancreatica e renale, abbiamo voluto approfittarne per sottoporre ad accurata e rigorosa analisi il ritmo di dette secrezioni, facendo le osservazioni, che in questa nota brevemente riferiremo.

Riportiamo anzitutto separatamente per ognuna delle dette tre secrezioni la tecnica seguita.

Le osservazioni relative alla *secrezione parotidea* sono state fatte su un giovane di 23 anni, sano ed in ottime condizioni generali di nutrizione. A distanza di 3^h-4^h 30' dall'ultimo pasto si introduceva nel dotto di Stenone di destra (che meglio del corrispondente di sinistra si prestava allo scopo) una sottile sondina, e si contavano le gocce di saliva, che da essa fluivano in ogni minuto primo (e così per un tempo abbastanza lungo, che oscillò nelle varie prove tra i 60 e i 106 primi minuti), sotto l'azione di un costante e uniforme stimolo acido, rappresentato a volte da una soluzione $\frac{N}{10}$ di acido

cloridrico (fluente nella cavità orale del soggetto con un ritmo di 20 gocce al minuto primo), a volte da succo di limone diluito, ma pure fluente sempre con il detto ritmo di 20 gocce al minuto. Furono con tale tecnica eseguite n. 6 osservazioni delle quali una riportiamo in grafico nella fig. 1.

Le osservazioni riguardanti la *secrezione pancreatica*, sono state condotte invece su un cane maschio di grossa taglia, del peso di kg. 22, operato di fistola pancreatica alla Paulow, con decorso operatorio e postoperatorio buono. Dal giorno della rimarginazione della ferita operatoria, ogni 24 ore (mentre l'animale, a digiuno, rimaneva su un adatto apparecchio del tipo di quello di Paulow), si sondava con un sottile catetere di gomma sterilizzato il dotto fistolizzato, previa pulitura con alcool delle parti circostanti, e si seguiva la secrezione pancreatica, contando al solito il numero di gocce fluenti dalla sonda nell'unità di tempo, prima e dopo la somministrazione del pasto. Con tale tecnica, rigorosamente costante, la secrezione pancreatica venne seguita in 47 prove consecutive, e ciascuna volta per un periodo di tempo variabile da tre ore a tre ore e 40'. Una di queste prove riportiamo in grafico nella fig. 2.

Pure sul cane sono state eseguite le osservazioni riflettenti la *secrezione renale*. È servita all'uopo una cagna adulta, del peso di circa kg. 18, operata di doppia fistola degli ureteri. Dopo un decorso operatorio e postoperatorio

buono, l'animale raggiunse e mantenne ottime condizioni, sicchè per oltre tre mesi su di esso si poterono eseguire numerose prove (di cui una riportiamo nella fig. 3). Ciascuna volta, all'animale abituato a rimanere su un adatto apparecchio di contensione, con due sondine flessibili di gomma si sondavano gli ureteri, contando, separatamente ma contemporaneamente per i due ureteri, il numero di gocce fluenti in un minuto primo. Tale periodo di osservazione, che non fu mai, nelle singole prove, inferiore ad un'ora, si protrasse a volte fino a 122' minuti. Naturalmente essendo le ricerche dirette anche ad altro scopo, si teneva esatto conto delle condizioni sperimentali (digiuno alimentare o idrico dell'animale, somministrazione del pasto o dell'acqua ecc.).

Ci pare qui opportuno richiamare l'attenzione sul fatto che, sebbene diverse possano a prima vista apparire le condizioni sperimentali, in cui le tre secrezioni, ognuna singolarmente presa, sono state studiate, tuttavia il ritmo è stato per tutte studiato sotto l'azione di stimolo sempre costante e di intensità presumibilmente uniforme (stimolo acido nel caso della parotide, pasto nel caso del pancreas, pasto o somministrazione di acqua nel caso del rene); mentre rigorosamente identico è stato nei tre casi il criterio di valutazione quantitativa della secrezione: conteggio numerico delle gocce di liquido fluenti in un minuto primo. L'indole delle esperienze esigeva solerte assistenza di più collaboratori, che trovammo sempre fra gli allievi interni dell'Istituto.

Esaminando ora le grafiche riflettenti la *secrezione salivare* appare chiara qui l'esistenza di un ritmo pressochè costante: a periodi di attività maggiore della glandola parotide — sempre sotto l'azione di uno stimolo costante e di intensità uniforme — seguono periodi di minore attività, pressochè eguali ai primi come durata. Se si passa ad analizzare ognuno dei vari periodi, singolarmente considerandoli, si può notare che quanto maggiore è il numero di gocce di saliva escrete in un dato minuto, tanto minore appare il numero di quelle emesse nel minuto successivo, alternativa che sempre si mantiene, con regolarità e costanza.

Anche nel caso della *secrezione pancreatica* è possibile osservare l'esistenza di una ritmica attività, la quale sul grafico si appalesa a volte sotto forma di larghe onde, costituite ognuna da una fase ascendente e da una discendente. Tali onde variano nella loro ampiezza — e talora anche nell'aspetto —, ma è anche qui caratteristico che le due fasi — ascendente e discendente — si somigliano, ed è altresì osservazione costante che quanto più la prima è rapida, tanto più rapida è anche la seconda.

Considerazioni analoghe possono farsi esaminando le grafiche relative alla *secrezione renale*. Il numero di gocce di urina fluenti in ogni minuto da ciascun uretere, considerato separatamente, presenta delle oscillazioni ritmiche pressochè regolari, periodi di maggiore attività alternandosi con periodi di

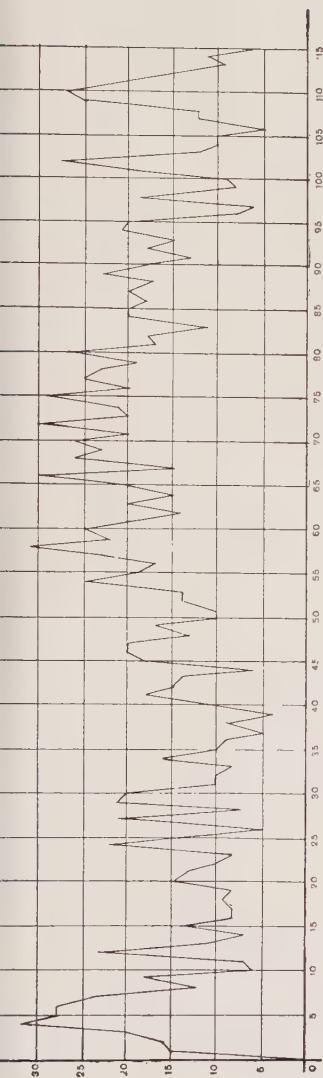


Fig. I - *Secrezione parotidea* - Sulle *ascisse* i minuti primi - Sulle *ordinate* il numero delle gocce di secreto.

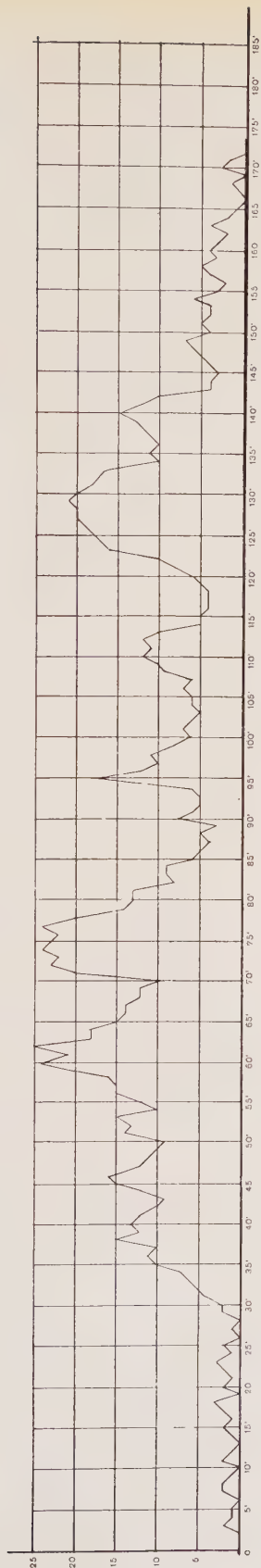
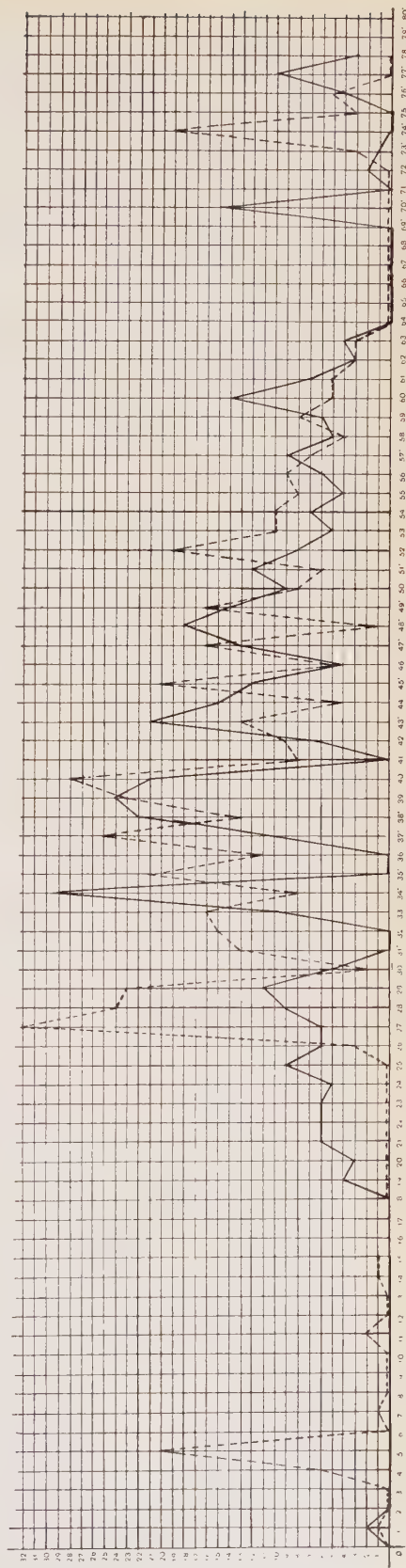


Fig. II - *Secrezione pancreatica* - Sulle *ascisse* i minuti primi - Sulle *ordinate* il numero delle gocce di secreto.



attività minore: i massimi di detta attività vengono seguiti da abbassamenti di entità varia, a volte fino alla sospensione temporanea completa della secrezione; e quanto maggiore è questo periodo di sosta o di riposo, assoluto o relativo, tanto maggiore è l'attività secretoria che ad esso sussegue e viceversa.

Considerando invece contemporaneamente l'attività dei due reni, appare chiara anche qui una alternanza, poichè i massimi ed i minimi di essa, per ognuno dei due reni (desumendoli dal numero di gocce di urina che fluiscono nel minuto primo da ciascuno dei due ureteri), si susseguono tra loro con una certa regolarità. A periodi di riposo di un rene, corrispondono molte volte periodi di attività dell'altro, ed anche nei momenti in cui la secrezione è attiva dai due lati è facile osservare, che i massimi ed i minimi di attività si alternano tra loro nel senso piuttosto della susseguenza; solo di rado c'è coincidenza.

Questa nostra ultima osservazione, relativa alla secrezione renale, mentre conferma ancora il vecchio concetto dell'alternanza funzionale dei due reni, discorda invece evidentemente da quella più recente e già citata di Ercole, per il quale ci sarebbe « di regola coincidenza negli aumenti e nelle diminuzioni, meno frequentemente susseguenza e solo di rado contrasto ». Non ci sembra però facile stabilire i motivi della divergenza, in quanto le osservazioni, sì da lui che da noi, sono state fatte sulla stessa specie di animale da esperimento, il cane, e con identica tecnica di osservazione.

In conclusione queste nostre semplici osservazioni, singolarmente considerate ci permettono di ritenere certa la esistenza di un ritmo normale, caratteristico di secrezione per ognuna delle tre ghiandole prese in esame. Se invece le guardiamo nel loro insieme, rilevando come in tutti e tre i casi il ritmo segua, in apparenza ed entro certi limiti, le stesse leggi generali, ci è lecito domandarci se esso stesso non sia che espressione di un fatto forse ancor più generale.

Patologia. — *Sulle alterazioni istologiche del sistema nervoso centrale e periferico nel beri-beri sperimentale aviario* ⁽¹⁾.
Nota preliminare di G. SOLARINO, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. C. CIACCIO.

Come è noto, la maggior parte degli AA. che si sono occupati del beri-beri sperimentale dal punto di vista istologico è concorde, ormai, nell'ammettere l'esistenza di alterazioni più o meno spiccate a carico dei nervi periferici. Altrettanto, invece, non può dirsi per gli organi nervosi centrali.

Dall'esame accurato della letteratura ⁽³⁾ appare logico attribuire il disaccordo, cioè la diversità dei reperti, piuttosto che al tipo di dieta (come vorrebbe qualche Autore) somministrata agli animali in esperimento allo scopo di ottenere l'insorgenza dei fenomeni polineuritici, ad altri fattori tra i quali crediamo meriti più particolare considerazione la durata dei fenomeni beriberici, nonchè la possibilità che lesioni centrali siano sfuggite a quei ricercatori che non hanno curato di esaminare *per intero* l'asse cerebro-spinale.

Le nostre ricerche eseguite tutte sul colombo avevano, pertanto, lo scopo di indagare con ricerche sistematiche ed il più possibilmente complete, quali siano le modificazioni istologiche che il sistema nervoso del Colombo presenta nella deficienza del complesso B, in rapporto ai diversi fenomeni di deficienza funzionale che è possibile osservare in questo animale, nel corso della sindrome polimorfa del beri-beri sperimentale. Vennero utilizzati l'asse cerebro-spinale ed i nervi periferici di quattordici colombe adulti, complessivamente.

Le modalità di trattamento furono le seguenti:

a) gli animali di un primo gruppo (due colombe) vennero sacrificati in perfetto benessere;

b) gli animali di un secondo gruppo (due colombe) vennero tenuti a digiuno completo (con acqua a disposizione) e sacrificati nella fase dell'inanizione patologica (di Luciani);

c) gli animali di un terzo gruppo (otto colombe) vennero alimentati esclusivamente con riso brillato. L'alimento venne loro somministrato (macinato ed in forma pillolare) sempre per introduzione forzata nell'ingluvie (imbeccamento) ed in quantità sempre non inferiore alla massima capacità

(1) Lavoro eseguito negli Istituti di Patologia generale e di Fisiologia umana della R. Università di Messina.

(2) Nella seduta del 3 aprile 1938.

(3) Per i dati bibliografici, come anche per le modalità di tecniche, si veda il lavoro *in extenso*, che sarà pubblicato in « Arch. di Medic. Sper. », vol. 2, 1938.

di consumo dell'animale, allo scopo di evitare, almeno parzialmente, concomitanti fenomeni di inanizione capaci di complicare il quadro beriberico;

d) di colombi di un quarto gruppo (due animali) vennero sottoposti ad ipoalimentazione forzata con riso brillato, integrato da gr. 2 di lievito di birra granulare Merck, e sacrificati dopo un trattamento prolungato per 15 giorni. Durante questo periodo di esperimento si verificò in essi, senza alcun altro sintomo, una perdita rispettiva del peso corporeo del 21 % e del 23 %.

Le esperienze vennero eseguite nei mesi di dicembre (1936)–marzo (1937).

Nel lavoro completo saranno descritti, singolarmente, i reperti relativi ad ogni animale. Da essi si può desumere:

1° Il reperto istologico del sistema nervoso centrale e di alcuni nervi periferici di colombi beri-berici, dimostra nettamente (in confronto con animali normali, digiunanti, e sottoposti ad ipoalimentazione non complicata dalla contemporanea assenza del fattore B) l'esistenza di alterazioni a carico dell'encefalo e dei nervi periferici, riferibili alla sola carenza del fattore B. Le alterazioni riscontrate (costantemente indipendenti dal grado di inanizione complicante il quadro beri-berico), variano in istretto rapporto con il tipo dei fenomeni polineuritici sperimentalmente provocati e spesso anche con la gravità e la durata di essi, risultando, in genere, più intense a carico del sistema nervoso centrale negli animali con sindrome paretico-spastica, più intense a carico dei nervi periferici in quelli con sindrome paretica.

2° Le alterazioni sia centrali che periferiche non sono mai del tipo flogistico primario ed essenziale, nel senso di Aschoff: sono, invece costantemente, del tipo degenerativo ed a carico di cellule e fibre di alcuni territori nervosi riconosciuti in genere particolarmente sensibili agli agenti tossici ed infettivi (cervelletto soprattutto). Con tali processi regressivi si accompagnano disturbi di circolo più o meno spiccati e fenomeni di reazione gliale più o meno intensa.

In particolare, le lesioni riscontrate a carico del sistema nervoso centrale, sono rappresentate da

a) fenomeni di replezione vasale e numerose minute emorragie, le quali, per la presenza di cellule lipidifere avventiziali e di reazioni gliali più o meno intense, non possono essere interpretate come banali episodi terminali. Esse si riscontrano generalmente nella sostanza bianca cerebrale e cerebellare; sono frequenti, inoltre, nei lobi ottici degli animali con sindrome paretico-spastica;

b) alterazioni regressive, gravi e costanti, delle cellule di Purkinje, fino alla loro scomparsa;

c) formazione di noduli gliali (vere *Gliastrauchwerke*) nella corteccia cerebellare;

d) fenomeni di neuronofagia a carico delle cellule di Purkinje;

e) quadri di frammentazione mielinica in fibre nervose mieliniche centrali (cerebellari);

f) degenerazione più o meno intensa di fibre dei cordoni posteriori e laterali del midollo spinale.

A carico dei nervi periferici sono state riscontrate alterazioni più o meno intense della guaina mielinica nei colombi paretici; alterazioni limitate, invece, e di dubbio valore (in rapporto ad animali normali e digiunanti) nei colombi con sindrome paretico-spastica.

In complesso, da queste nostre osservazioni, bisogna dedurre che anche le manifestazioni nervose *centrali* beri-beriche del colombo hanno una base anatomo-patologica; infatti, in alcuni casi, ci è stato possibile stabilire un rapporto diretto tra manifestazioni cliniche e lesioni anatomiche: a tal riguardo, crediamo di dover insistere sulle alterazioni dei lobi ottici da noi messe in evidenza. Esse (non ancora rilevate dai precedenti AA.) risultano — in base alle nostre osservazioni — particolarmente spiccate nelle sindromi paretico-spastiche. Abbiamo, inoltre, potuto mettere in rilievo che alcune (tra le più lievi) delle alterazioni del sistema nervoso centrale sono presenti ancor prima della comparsa dei sintomi nervosi beri-berici, nel corso dell'alimentazione orizantica esclusiva, e che d'altra parte, la scomparsa dei sintomi nervosi (che suole rapidamente seguire, in condizioni ordinarie, alla somministrazione di lievito di birra in dosi opportune) può verificarsi malgrado la persistenza di alcune delle lesioni anatomiche sia centrali che periferiche.

Commemorazione del Socio Nazionale Orso Mario Corbino

tenuta ⁽¹⁾ dal Socio FRANCO RASETTI

Il 23 gennaio 1937 si spegneva in Roma Orso Mario Corbino. Non la mia modesta parola potrà degnamente rievocare le virtù di uomo e di scienziato dell'insigne Maestro: l'amore di Patria, la bontà verso la famiglia e verso i discepoli, il carattere costantemente sereno, l'amore per la scienza, la squisita sensibilità artistica, l'eloquente ed arguta parola che si spesso ascoltammo in questa Accademia. Ma per quanto riguarda più specialmente il lato umano della sua personalità, mi conforta il pensiero che la memoria di Lui, come è fresca nella mia mente, lo è certo in quella dei Colleghi, che, quasi tutti, ebbero al pari di me la fortuna di godere della sua amicizia e stimarne le altissime qualità umane.

Cercherò pertanto di illustrare più da vicino l'opera scientifica del Corbino, come ricercatore originale e come maestro.

Orso Mario Corbino nacque da modesta famiglia in Augusta, il 30 aprile 1876. Fin da giovanetto, attrasse l'attenzione di quanti lo avvicinavano per l'ingegno precoce e brillantissimo. Seguì gli studi medi classici a Catania, quelli universitari a Palermo.

Laureatosi in Fisica, vinse subito il concorso per la cattedra di fisica al Liceo « Vittorio Emanuele » di quella stessa città. Ma un'attrazione irresistibile per la ricerca pura lo spinse a frequentare insieme, come assistente, l'Istituto Fisico dell'Università, diretto dal Macaluso. In pochi anni, la sua produzione originale era tanta da permettergli di presentarsi, contemporaneamente, a ben due concorsi universitari: uno di fisica e uno di elettrotecnica. Vinse ambedue i concorsi, e scelse la Fisica, andando nel 1905 a insegnare a Messina. Quattro anni dopo, venne chiamato a Roma dal Blaserna, direttore dell'Istituto Fisico, a coprire la cattedra di Fisica complementare. Nel 1918 succedette al Blaserna nella direzione dell'Istituto, che conservò fino alla sua morte.

Oltre alla brillante carriera universitaria, il Corbino si acquistò in breve un'alta posizione nella vita politica e industriale. Fu per molti anni a capo del Magistero delle Acque, poi Presidente del Consiglio Superiore dei La-

(1) Nella seduta del 3 aprile 1938.

veri Pubblici. Nel 1920 venne nominato Senatore; nel 1921 Ministro della Pubblica Istruzione; nel 1923 Ministro dell'Economia Nazionale nel Governo Fascista. Ebbe parte attivissima nei Consigli di amministrazione di grandi imprese idroelettriche e di Istituti bancari.

Tra numerosi riconoscimenti dei suoi altissimi meriti scientifici, ricordiamo il Premio Reale della nostra Accademia, che gli venne conferito nel 1912: mentre nel 1933 gli fu attribuito il Premio Mussolini dell'Accademia d'Italia.

Fu socio di numerose Accademie scientifiche, tra le quali la nostra. Il Corbino venne eletto Corrispondente dell'Accademia dei Lincei nel 1918, e Socio Nazionale della medesima nell'anno seguente. Ben meglio di me conoscono i Colleghi quali siano stati gli altissimi meriti del Corbino verso la nostra Accademia, che Egli predilesse: quante volte la sua parola si sia levata in una discussione, per sostenere con la sua autorità e con la sua eloquenza quelle decisioni che avrebbero vieppiù elevato il prestigio scientifico dell'Accademia dei Lincei. Quando Egli aveva parlato sopra un argomento, lo aveva talmente illuminato da tutti i lati e ne aveva riassunto le conclusioni in modo così perfetto, che agli altri raramente restava ancora qualche cosa da dire.

E veniamo ora all'opera del Corbino come Fisico.

Io non credo di dover qui passare in rassegna le oltre 150 Memorie e Note che costituiscono la sua produzione scientifica. Cercherò invece di sintetizzare i risultati ottenuti nei gruppi di ricerche più importanti, mostrandone via via le relazioni con lo sviluppo della Fisica nel terzo di secolo testè trascorso.

Nel 1898, a soli ventidue anni, si afferma immediatamente in Italia e all'estero per una ricerca in cui si rivela cultore profondo delle teorie atomiche e sperimentatore abilissimo. Si tratta della scoperta, insieme al suo Maestro, del fenomeno magneto-ottico che porta appunto il nome di effetto Macaluso-Corbino. Due anni prima, la scoperta dello Zeeman della scissione delle righe spettrali in un campo magnetico e la teoria fattane dal Lorentz in base all'ipotesi elettronica, avevano portato i fenomeni magneto-ottici in primissimo piano per indagare la struttura della materia e il meccanismo dell'emissione luminosa. Il Corbino prevede e osservò che un vapore metallico, posto in un campo magnetico, produceva una rotazione del piano di polarizzazione della luce, per lunghezze d'onda prossime a quelle delle sue righe di assorbimento. Le sue memorie sull'argomento costituiscono un modello di acutezza negli accorgimenti sperimentali e nell'analisi teorica.

Negli stessi anni, si afferma già quel suo duplice interesse per i problemi più profondi della fisica atomica, e insieme per le applicazioni tecniche dell'elettricità, che si manterrà desto fino agli ultimi anni. Sono infatti degli anni 1898-1906 i lavori sulla costante dielettrica degli isolanti sottoposti

a trazione, sulla teoria del trasformatore e del rocchetto di induzione, sui motori asincroni, sul funzionamento dell'interruttore di Wehnelt: argomenti sui quali Egli tornerà più volte anche in periodi posteriori.

Tra i più interessanti lavori di questi anni nel campo elettrotecnico è poi lo studio di un nuovo circuito oscillante basato su una dinamo con eccitazione in serie, la quale si comporta come un conduttore di resistenza negativa. Ricordiamo anche le belle ricerche sopra il ciclo d'isteresi del ferro sottoposto a correnti magnetizzanti di frequenza elevata, nelle quali Egli si servì, tra i primi, dell'oscillografo a raggi catodici. Infine in una serie di lavori, è studiato il fenomeno per cui un anodo di alluminio in una cella elettrolitica si copre di un sottilissimo strato isolante, che permette di costruire condensatori di grande capacità. È noto come questo fatto, allora di puro interesse scientifico, abbia avuto recentemente vaste applicazioni tecniche.

È del 1909 uno studio diretto a verificare sperimentalmente la teoria del Volterra sulle distorsioni elastiche dei corpi multiplamente connessi. Il Corbino ebbe l'idea ingegnosissima di valersi, per osservare le tensioni elastiche, della birifrangenza accidentale che queste tensioni provocano in un mezzo trasparente. Anche in questo campo della « fotoelasticità » il Corbino fu iniziatore geniale di un indirizzo che ha avuto nel seguito ampio sviluppo e applicazioni pratiche. Dello stesso periodo è una serie di ricerche, compiute in collaborazione col Chiaraviglio, sulla tensione di vapore e sulla distillazione della nitroglicerina.

Veniamo ora a parlare del gruppo di lavori sulle proprietà termiche dei filamenti metallici portati ad altissime temperature. Il Corbino osservò che se un filamento metallico vien reso incandescente dal passaggio di corrente alternata, la temperatura del medesimo oscilla con frequenza doppia di quella della corrente, e con un ritardo di fase dovuto all'inerzia termica. Poichè al variare della temperatura varia la resistenza elettrica del filamento, ne risulta una deformazione della curva della corrente, che non è più sinusoidale come la forza elettromotrice. Servendosi del tubo di Braun, egli misurò l'ampiezza delle armoniche così introdotte nella corrente alternata e dimostrò che da questi dati poteva dedursi il rapporto C/a tra la capacità termica del filamento e il coefficiente di temperatura della resistenza elettrica del medesimo. Poichè quest'ultimo è noto, almeno approssimativamente, il Corbino poté dedurre dalle sue misure i valori del calore specifico del metallo (tungsteno) in una regione di temperature (fino a 2000 gradi) nella quale i dati mancavano completamente. Egli mise così in evidenza il risultato importante che il calore specifico è notevolmente maggiore di quanto corrisponde alla legge di Dulong e Petit. Una ricerca simile venne eseguita sul platino.

Nello stesso periodo (1911-1912), l'attenzione del Corbino si concentrò sui problemi connessi col meccanismo della conduzione dell'elettricità nei

metalli; problemi che furono i suoi prediletti fino agli ultimi anni, forse perchè in essi confinavano i due rami della scienza nei quali la sua opera aveva lasciato maggiori tracce, la fisica atomica e l'elettrotecnica. E le sue ricerche si diressero in particolare allo studio degli effetti galvano- e termomagnetici. La scoperta dell'effetto che porta il suo nome (fatto che Egli, con la sua modestia, deprecava, asserendo trattarsi soltanto di un nuovo caso del fenomeno di Hall) è appunto del 1911. Egli pose un sottile disco di bismuto in un campo magnetico con le linee di forza normali al piano del disco stesso; lo fece percorrere da una corrente elettrica radiale, ottenuta applicando un elettrodo al centro e uno, anulare, alla periferia. Osservò allora che le linee di corrente, radiali in assenza di campo magnetico, col l'inserire di questo si incurvavano a spirale, dando luogo nel disco stesso ad un momento magnetico; mentre le linee equipotenziali, naturalmente, rimanevano circolari. Il Corbino analizzò a fondo i suoi risultati sperimentali alla luce delle teorie allora esistenti sulla conduzione elettrica, facendo vedere come dai suoi esperimenti si potesse risalire alle costanti fondamentali del mezzo più semplicemente che partendo dagli altri dati già noti.

Veniamo così al periodo più recente, quello che va dalla fine della grande guerra agli ultimi anni. In quest'epoca, la produzione originale del Corbino appartiene al campo dell'elettrotecnica; ricordiamo le ricerche, eseguite in collaborazione col Trabacchi, sul raddrizzamento delle correnti alternate, e dalle quali uscì un tipo di raddrizzatore che ebbe molte applicazioni negli impianti per raggi X fino all'avvento delle lampade raddrizzatrici. Infine, prima della sua scomparsa, Egli aveva fondato nel suo vecchio e caro laboratorio di via Panisperna, abbandonato dall'Università, l'Istituto di Elettroacustica — oggi intitolato al suo nome — nel quale aveva cominciato a dedicarsi ai problemi della riproduzione del suono, come ce lo dimostra una pubblicazione sulla taratura dei microfoni, uscita negli ultimi giorni della sua vita.

Tuttavia, in questo ultimo periodo la sua attività scientifica era stata meno intensa. Non che la sua geniale e multiforme operosità fosse in alcun modo diminuita: era soltanto diretta verso altre mete, verso l'industria e la finanza. Più che con il contributo originale, negli anni più recenti Egli servì la Scienza col seguire amorosamente le ricerche degli allievi e col far conoscere agli ambienti culturali italiani i magnifici risultati della Fisica moderna. Mi piace intrattenermi un poco su queste sue attività, per mostrare quanto Egli abbia contribuito, anche al di fuori della ricerca originale, ad elevare il livello della Fisica italiana.

Dal 1898 al 1936, il Corbino seguì con appassionato interesse il vertiginoso progredire della Fisica, e specialmente della teoria atomica ed elettronica della materia, mantenendosi al corrente giorno per giorno delle nuove scoperte. Ne fanno fede i numerosi discorsi che Egli ci ha lasciato, ognuno dei quali costituisce una sintesi mirabile delle conoscenze del momento. Ri-

leggendoli oggi, se ne prova un vero godimento intellettuale; ed è da augurarsi che ne venga pubblicata una raccolta, che riuscirebbe la documentazione più viva di un trentennio di storia della Fisica. Voglio ricordare, tra tutti, il magnifico discorso pronunciato in questa Accademia, alla augusta presenza del Sovrano, nel giugno 1934, nel quale espose i meravigliosi risultati sulle trasmutazioni della materia e il contributo dato a queste ricerche dal suo laboratorio.

Ma di aver mantenuto la Fisica italiana al corrente dei grandi rivolgimenti che si compivano nelle concezioni atomiche, gli va reso particolarmente merito negli anni che seguirono immediatamente alla grande guerra. In questo periodo, partecipando forse dello stato d'animo prevalente nel Paese, i fisici italiani erano rimasti disorientati. Nelle quattro annate degli *Annalen der Physik*, giunte in blocco con la fine delle ostilità essi trovavano un mondo nuovo. La teoria di Bohr della costituzione dell'atomo, affacciata timidamente alla ribalta della scienza nel 1913, era maturata in una massa enorme di previsioni teoriche e di scoperte sperimentali. Non è da sorprendere se alcuni rimasero sconcertati. Non così il Corbino, il quale, valendosi della sua prodigiosa attitudine per orientarsi tra idee nuove, assimilò in breve quelle costruzioni così estranee ai concetti della fisica classica, e ne valutò in pieno l'importanza. Egli intuì subito che questo rapidissimo progredire della fisica in Germania era stato reso possibile — per dirlo con le sue stesse parole — « dalla guida continua che offre agli sperimentatori la falange gio-vane e audace dei fisici teorici » —. E non era da attendersi che questo compito fosse assolto dai fisici matematici, perchè — sono ancora sue parole — « la vecchia e gloriosa Fisica Matematica aveva deviato verso una « forma di trattazione puramente analitica dei problemi fisici, i quali spesso « costituivano appena il pretesto per porre e risolvere delle questioni di « interesse esclusivamente matematico ». Egli volle così che fosse istituita a Róma una cattedra di Fisica teorica, la prima in Italia, e che vi fosse chiamato Enrico Fermi. Del quale, e degli altri che ebbero la fortuna di essergli vicini nel laboratorio, seguì con amore, fino ai suoi ultimi giorni, le ricerche teoriche e sperimentali di Fisica atomica e nucleare.

Non solo: ma da allora, con magnifico disinteresse, raro a trovarsi anche tra gli scienziati di mente più elevata, Egli indirizzò la sua attività a promuovere e facilitare questi lavori, togliendo ai giovani allievi ogni preoccupazione per le finanze e l'amministrazione del laboratorio, in modo che essi potessero serenamente dedicare tutto il loro tempo alla ricerca. E non tralasciò occasione per far conoscere ed esaltare l'opera compiuta dai discepoli nell'Istituto, anche se il suo nome non vi era in alcun modo legato.

Mi accorgo, a questo punto, che la mia arida esposizione non può aver dato che una lontana idea di quello che il Corbino ha fatto per la Fisica italiana, con l'opera di ricercatore originale e con quella di maestro: sol-

tanto chi ha avuto, come me, la fortuna di stargli vicino per lunghi anni può apprezzarne in pieno il significato.

Pietro Blaserna, già Presidente della nostra Accademia, scriveva nel 1868 queste parole, ancora ben degne di meditazione:

« Chi si dà la pena di esaminare, in confronto di altri Paesi, lo stato « in cui versano gli studi fisici in Italia, troverà per questi un carattere che « li distingue facilmente da quelli. Questo carattere puramente negativo è « la mancanza di organizzazione o, se vogliamo, di scuola. L'Italia, anche « nei tempi più tristi, ha avuto sempre un certo numero di cultori delle « scienze fisiche, e sarebbe per esempio cosa facile citare nel nostro secolo « uomini celebri quanto i più grandi fisici d'Europa. Ma quei nomi illustri, « dei quali con ragione va superba l'Italia, ci rappresentano tanti generali e « capitani senza soldati. Essi hanno trovato il modo di vincere tutte le dif- « ficoltà, hanno fatto grandi scoperte e hanno pubblicato bei lavori: ma non « hanno lasciato allievi che li continuassero e che propagassero i metodi del « maestro ».

Pietro Blaserna scoprì il giovanissimo ingegno di Orso Mario Corbino; e chiamatolo presso di sé a Roma, pose le basi di quella scuola di cui aveva deplorato la mancanza. Sotto la guida del nuovo Maestro, la Scuola allargò la sua fama e tenne alto il nome d'Italia nel mondo scientifico. Oggi che Egli non è più, possa la sua memoria, viva nella nostra mente e nel nostro cuore, guidarci ancora ad essere degni della sua tradizione.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente dà l'annuncio dell'avvenuta morte del Corrisp. ANTONIO CESARIS DEMEL e alla Memoria dell'insigne Scomparso invia il saluto reverente dell'Accademia, assicurando che di Lui sarà tenuta in una prossima seduta una degna commemorazione.

Il Socio RASSETTI pronuncia un'alta e commossa commemorazione di Orso Mario Corbino rievocando l'eminente figura dell'illustre Scomparso come Scienziato e come Maestro.

Il Presidente MILLOSEVICH ringrazia vivamente a nome dei Colleghi il Socio RASSETTI per la sua felice rievocazione di O. M. Corbino, che ha rinnovato in tutti, a un anno di distanza, il dolore cocente per la scomparsa dell'indimenticabile Collega.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio BOTTAZZI presenta in omaggio il primo volume del « Trattato di Fisiologia » edito in collaborazione con altri colleghi, sotto la sua direzione, e ne parla brevemente.

L'accademico Segretario aggiunto AMALDI presenta le opere giunte in dono all'Accademia segnalando: il volume secondo, parte prima, degli « Elementi di Fisiologia umana » del Socio SILVESTRO BAGLIONI; L'« Analyse Mathématique » di Paul Appel; l'« Idrologia Cirenaica » del dott. Marco Marchetti; il volume 105 degli Annali dell'Osservatorio astronomico di Harvard.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano infine Note per l'inserzione nei « Rendiconti » i Soci ARMELINI, BRUNELLI, CROCCO, LEVI-CIVITA e SCORZA.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente sen. MILLOSEVICH annuncia ai Colleghi che assiste alla seduta il prof. Vakhov Sierpinski, Presidente dell'Accademia di Scienze e Lettere di Varsavia, e all'ospite illustre dà il benvenuto dell'Accademia.

Legge quindi i telegrammi inviati dalla Presidenza a S. M. il Re Imperatore e a S. E. il Capo del Governo per la loro elevazione all'altissima carica di Primo Maresciallo dell'Impero, e comunica ai Colleghi la risposta che S. M. il Re Imperatore si è degnato inviare.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 3 aprile 1938

- APPELL PAUL. — Analyse Mathématique. Tome I. Paris, Editeur Gauthier-Villars, 1937. 8°, pp. I-VIII, 1-395.
- BAGLIONI SILVESTRO. — Elementi di Fisiologia umana. Vol. II, Parte I. Roma, 1938, 8°. pp. 1-294.
- BOTTAZZI FILIPPO. — Trattato di Fisiologia. Vol. I. Fisiologia generale — Fisiologia dei tessuti. Milano, Edit. Dott. Francesco Vallardi, 1937. 8°, pp. 1-824.
- CAMPBELL LEON. — Variable Star Notes from the American Association of Variable Star Observers in 1937. (Reprinted from « Popular Astronomy ». Vol. XLV). S. I., 1937, 8°, pp. 1-42.
- The Centenary of the Army Medical Library. (The Military Surgeon, 1937. Vol. 80, pp. 1-52; Medical Life 1936. Vol. 43, pp. 533-604). S. I. 1936.
- DELLA GATTA LUIGI. — Vedi VIVOLI GIULIO.
- DUCROS ETTORE. — Aspetti e sviluppi del problema zootecnico in Libia. (Estr. da « Agricoltura Libica ». Anno VI). Tripoli, 1937. 8°, pp. 1-11.
- FANO GINO. — Geometrie non euclidee e non archimedee. (Estr. dall'« Enciclopedia delle matematiche elementari ». Vol. II. Parte 2ª, pp. 437-511). Milano, 1938. 8°.
- FANO GINO. — Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche. (Estr. dagli « Atti del I Congresso dell'Unione Matematica Italiana », pp. 245-250). Torino. 8°.
- KAMP (VAN DE) P. — A Photographic Determination of the Mass Ratio of B. 648. (Reprinted from the « Astronomical Journal », n. 1060). S. I. s. d. 4°.
- LAUE (VON) M. — Zum dreihundertsten Geburtstag des ersten Lehrbuches der Physik. (6 mǎrz 1938). (Sonderdruck ans Die Naturwissenschaften 1938. 26 Jahrg., heft 9, pp. 129-136). Berlin, 1938. 8°.
- MARCHETTI MARIO. — Idrologia Cirenaica con prefazione di Giuseppe Stefanini. Firenze, 1938. 8°, pp. I-XVI, 1-245.
- MARTELLI G. M. — La lotta contro la Declephila lineata var. livornica. Esp. nel 1937 in Tripolitania. (Estr. da « Agricoltura Libica ». Anno VI). Tripoli, 1937. 8°, pp. 1-6.
- MITCHELL S. A. and WIERTANEN C. A. — A Comparison sequence for Nova Herculis. (Reprinted for the « Astronomical Journal », N. 1038). S. I. s. d. 4°.
- PARASKEVOPOULOS JOHN. S. — Vedi SHAPLEY HARLOW.
- PICONE MAURO. — Vedute unitarie sul calcolo delle soluzioni delle equazioni alle derivate parziali della Fisica-Matematica. (Estratto dagli « Atti del I Convegno di Matematica applicata », 4-6 giugno, Roma, 1936). Roma, 1936, 8°. pp. 1-36.
- RUSO GIUSEPPE. — Primi esperimenti di un nuovo metodo di lotta contro la mosca delle olive. (Estr. da « L'olivicoltura ». Anno XIV). Roma, 1938. 8°, pp. 1-4.
- RUSO ACHILLE. — Relazione nell'inaugurazione solenne dell'anno accademico 1937-38. 28 ottobre. (Estratto dal « Bollettino delle sedute della Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania ». Serie III, fascicolo VII). Catania, 1938. 8°, pp. 1-4.
- SCARPA OSCAR. — La fabbricazione dell'acido nitrico mediante l'ossidazione dell'ammoniaca e considerazioni sullo stato attuale dell'industria dell'azoto atmosferico. (Estratto da l'« Elettrotecnica ». Anno IV, n. 6). S. I. 1917. 4°, pp. 1-7.

- SCARPA OSCAR. — La fabbricazione sintetica dell'ammoniaca. (Da « Giornale del Comitato di Mobilitazione Industriale per l'Italia meridionale »). 1917. (Solo titolo).
- SCARPA OSCAR. — Lo sviluppo dell'industria elettrotecnica. (Estr. da « Elettrotecnica ». Anno III, n. 21). S. I. 1916. 4°, pp. 1-8.
- SCARPA OSCAR. — L'industria elettrochimica dell'azoto atmosferico. (Estr. dagli « Annali di Chimica Applicata ». Vol. VII). Roma, 1917. 8°, pp. 1-69.
- SCARPA OSCAR. — L'industria elettrochimica e l'avvenire del Mezzogiorno. (Estr. da « Le industrie italiane ». 1917). (Solo titolo).
- SCARPA OSCAR. — Analisi della radioattività. (Estr. dagli « Annali di Chimica Applicata ». Vol. VIII, pp. 89-92). Roma, 1917. 8°.
- SCARPA OSCAR. — Misura della radioattività dell'acqua Mirtina. (Estr. dagli « Annali di Chimica Applicata ». Vol. VIII). Roma, 1917. 8°.
- SCARPA OSCAR. — Nuove considerazioni sul fattore di potenza dei forni elettrici ad arco. (Estr. da « Elettrotecnica ». 1913). (Solo titolo).
- SCARPA OSCAR. — Sul fattore di potenza dei forni elettrici ad arco. Parte I, II. (Estr. da « L'Industria ». Volume XXXIII). Milano, 1919. 4°, pp. 4-12, 68-76.
- SCARPA OSCAR. — Sulla funzione del solfato di bario negli accumulatori a piombo. (Estr. da « Elettrotecnica ». Vol. VI, pp. 313-316). Milano, 1919. 4°.
- SCARPA OSCAR. — Speciali azioni delle impurità esistenti nell'elettrolita degli accumulatori a piombo. (Estr. da L'« Elettrotecnica ». Vol. VI). Milano, 1939. 4°, pp. 317-318.
- SCARPA OSCAR. — Isotopi e pesi atomici. (Estr. dall'« Enciclopedia Chimica ». 1921, pp. 111-115). S. I. 8°.
- SCARPA OSCAR. — Riviste ed articoli vari di elettrochimica e di chimica fisica sul giornale « l'Elettrecista » dal 1903 al 1915, nonchè sui giornali. l'« Elettrotecnica », l'« Industria » ecc. (Solo titolo).
- SCARPA OSCAR. — Le tabelle annuali delle costanti e dati numerici di chimica, fisica e tecnologia. (Estratto dal « Giornale di Chimica industriale ed applicata ». Anno VI). Milano. S. d. 8°, pp. 1-4.
- SCARPA OSCAR. — Su un tipo di conduttore adoperato in alcuni accumulatori a piombo. (Estr. da l'« Elettrecista ». 1922. (Solo titolo).
- SCARPA OSCAR. — Disposizione per produrre una fiamma allungata nei forni elettrici ad arco. Brevetto italiano, nn. 215356. Anno 1922. (Solo titolo).
- SCARPA OSCAR. — Forno a induzione. Brevetto Italiano, n. 216408. Anno 1922. (Solo titolo).
- SCARPA OSCAR. — Forno elettrico. Brevetto italiano, n. 222026. Anno 1923. (Solo titolo).
- SCARPA OSCAR. — Processo per desolfare ceneri di piride. Brevetto italiano n. 221057. Anno 1923. (Solo titolo).
- SCARPA OSCAR. — Materiale refrattario. Brevetto italiano n. 223759. Anno 1923. (Solo titolo).
- SCARPA OSCAR. — Processo per preparare rame polverulento. Brevetto italiano n. 225.390. Anno 1923. (Solo titolo).
- SCARPA OSCAR. — Lichtbogenofen für Mehrphasenstron. Brevetto tedesco D. R. P. n. 415104. Anno 1923. (Solo titolo).
- SCARPA OSCAR. — Elektrischer mehrphasen Inductionofen. Brevetto tedesco D. R. P. N. 414.478. Anno 1923. (Solo titolo).
- SCARPA OSCAR. — Cella per elettrolisi. Brevetto italiano n. 224793. Anno 1923. (Solo titolo).
- SCARPA OSCAR. — Metodo di misura della resistenza interna delle pile e degli accumulatori. (Estr. dagli « Annali di Chimica Applicata ». Anno VIII, pp. 306-875). Roma, 1924. 8°.
- SCARPA OSCAR. — Nuove esperienze sulla conduttività e sulla ionizzazione degli elettroliti. (Estr. dalla « Gaz-

- zetta Chimica Italiana ». Anno LIV, pp. 860-875). Roma, 1924. 8°.
- SCARPA OSCAR. — Sulla misura della densità dei corpi porosi o polverulenti. (Estr. dagli « Annali di Chimica applicata ». Anno VIII, pp. 360-367). Roma, 1924. 8°.
- SCARPA OSCAR. — Alcuni apparecchi per laborateri di chimica fisica. (Estr. dalla « Gazzetta Chimica Italiana ». Anno LIV, pp. 876-887). Roma, 1924. 8°.
- SCARPA OSCAR. — Alcune osservazioni sulla fabbricazione dell'acido nitrico mediante la sintesi del biossido d'azoto. (Estr. dagli « Annali di Chimica Applicata ». Anno VIII, pp. 368-378). Roma, 1924. 8°.
- SCARPA OSCAR. — Elektrischer Lichtbogenofen. Brevetto tedesco D. R. P. n. 428811. Anno 1924. (Solo titolo).
- SCARPA OSCAR. — Four électrique à arc. Brevetto francese n. 583054. Anno 1924. (Solo titolo).
- SCARPA OSCAR. — Cuve pour kletrolyse. Brevetto francese, n. 586654 e Brevetto Belga n. 320670. Anno 1924. (Solo titolo).
- SCARPA OSCAR. — Processo ed impianto per l'estrazione elettrolitica dello stagno e del rame dai bronzi. Brevetto Italiano n. 227161. Anno 1924. (Solo titolo).
- SCARPA OSCAR. — Processo per la separazione dello stagno dal piombo e dal rame. Brevetto Italiano numero 227988. Anno 1924. (Solo titolo).
- SCARPA OSCAR. — Processo per l'estrazione del nichel. Brevetto Italiano n. 233.862. Anno 1924. (Solo titolo).
- SCARPA OSCAR. — Process for electrolytic extraction of tin. Brevetto inglese n. 227125 e Brevetto francese n. 591363. Anno 1925. (Solo titolo).
- SCARPA OSCAR. — Fours électriques pour laboratoires. (Extr. des « Comptes Rendus du Cinquième Congrès de Chimie Industrielle ». 1925). Paris, 1927. 8°, pp. 1-2.
- SCARPA OSCAR. — La résistance électrique au passage électrode-électrolyte. (Extr. des « Comptes Rendus du Cinquième Congrès de Chimie Industrielle ». 1925). Paris, 1925. 8°, pp. 1-4.
- SCARPA OSCAR. — Processo per aumentare la capacità delle lastre negative degli accumulatori a piombo. Brevetto italiano n. 246721. Anno 1926. Brevetto polacco n. 9188. Anno 1928. (Solo titolo).
- SCARPA OSCAR. — La fonction des substances inertes dans les accumulateurs au plomb. (Extr. des « Comptes Rendus du Sixième Congrès de Chimie Industrielle ». 1926). Paris, 1928. 8°, pp. 1-2.
- SCARPA OSCAR. — Four électrique pour le traitement des gaz. (Extr. des « Comptes Rendus du Sixième Congrès de Chimie Industrielle ». 1926). Paris, 1927. 8°, pp. 1-2.
- SCARPA OSCAR. — Lezioni di Chimica metallurgica. Torino, 1926. (Solo titolo).
- SCARPA OSCAR. — Sulla resistenza elettrica posseduta dallo strato di transizione elettrodo-elettrolita. (Sonderabdruck aus « Zeitschr. f. Physikalische Chemie ». 1927, pp. 449-471). Leipzig, 1927. 8°.
- SCARPA OSCAR. — Forno elettrico per reazioni nei gas. (Estr. dal « Giornale di Chimica Industriale ed Applicata ». Anno IX). Milano, 1927. 8°, pp. 1-3.
- SCARPA OSCAR. — Sistema di riscaldamento elettrico ad arco trifase per forni e cannelli elettrici. Brevetto italiano n. 268882. Anno 1928. (Solo titolo).
- SCARPA OSCAR. — L'impiego dei colloidi nella fabbricazione dei filamenti metallici per lampade a incandescenza. (Estratto da « L'Elettricista ». Anno XXXVIII). Roma, 1929. 8°, pp. 1-4.
- SCARPA OSCAR. — Esistenza di forze elettromotrici in circuiti metallici eterogenei, possedenti temperatura uniforme con produzione di correnti elettriche continue. (Estr. dai « Rendiconti del Reale Istituto Lombardo

- di Scienze e Lettere». Vol. LXII). Milano, 1929, 8°, pp. 1-9.
- SCARPA OSCAR. — Alcune eccezioni alla legge di Volta. (Esistenza di pile metalliche isotermitiche). (Estr. da «L'Elettrotecnica». Vol. XVI). Milano, 1929, 8°, pp. 1-6.
- SCARPA OSCAR. — L'effetto Volta nella elettrochimica. (Estr. dagli «Atti del III Congresso Naz. di Chimica pura ed applicata». 1929, pp. 81-94). Roma, 1929, 8°.
- SCARPA OSCAR. — Pile di concentrazione, interamente metalliche, funzionanti in contrasto con la legge di Volta. (Estr. dai «Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturale». Vol. IX, pp. 1006-1014). Roma, 1929, 8°.
- SCARPA OSCAR. — Un nuovo tipo di pile. (Estr. dal «Giornale di Chimica industriale ed applicata». 1929). Milano, 1929, 8°, pp. I-II.
- SCARPA OSCAR. — Pile metalliche funzionanti in contrasto con la legge di Volta. (Estratto dal Giornale «L'Elettricista». Anno XXXVIII). Roma, 1929, 8°, pp. 1-8.
- SCARPA OSCAR. — Le leggi di Volta e la elettrochimica. Comunicazione alla XXXIV Riunione annuale della A. E. I. 1929. Milano, 1929, 4°, pp. 1-8.
- SCARPA OSCAR. — Sulle misure di resistenza con il ponte di Wheatstone-Kohlrausch. (Estr. dal Giornale «L'Elettricista». Anno XXXVIII). Roma, 1929, 8°, pp. 1-8.
- SCARPA OSCAR. — Sulla misura della resistenza degli elettroliti. (Estr. dalla «Gazzetta Chimica Italiana». Volume 60, pp. 66-104). Roma, 1930, 8°.
- SCARPA OSCAR. — Extraction électrolytique de l'étain et du cuivre des déchets de bronze. (Extr. du «Bulletin de la Société française des Électriciens», n. 105, 1930). Paris, 1930, 8°, pp. 1-8.
- SCARPA OSCAR. — Pile metalliche isotermitiche. (Estr. dalle «Memorie della R. Accademia d'Italia, Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali». Vol. I). Roma, 1930, 8°, pp. 1-28.
- SCARPA OSCAR. — Pile metalliche in contrasto colla legge di Volta. (Estr. dai «Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano». Volume IV). Milano, 1930, 8°, pp. 1-8.
- SCARPA OSCAR. — Développement actuel de l'Industrie Electro-chimique et Electro-métallurgique en Italie. Berlin, 1930, 8°, pp. 1-7.
- SCARPA OSCAR. — Sviluppo attuale dell'industria elettrochimica ed elettrometallurgica in Italia. (Estr. da «La partecipazione italiana alla seconda Conferenza mondiale dell'energia». Berlino, giugno 1930). Roma, 1931, 8°, pp. 1-8.
- SCARPA OSCAR. — Corpo riscaldante per forni elettrici. Brevetto italiano numero 280075. Anno 1930. (Solo titolo).
- SCARPA OSCAR. — Existenz elektromotorischer Kräfte in geschlossenen metallischen Stromkreisen von gleichmässiger Temperatur. (Sonderdruck aus «Zeitschr. f. physikalische Chemie». Abt. A. Bd. 156, pp. 225-226). Leipzig, 1931, 8°.
- SCARPA OSCAR. — Lo stato attuale dei forni elettrici fusori. (Estr. dalla Rivista «La Metallurgia Italiana». Anno XXIII, n. 10). Milano, 1931, 4°, pp. 1-35.
- SCARPA OSCAR. — Relazione sulle misure eseguite nel laboratorio di elettrochimica ed elettrometallurgia della R. Scuola di Ingegneria di Milano sull'alluminio trafilato, crudo, prodotto in Italia. (Estr. dalla Rivista «La Metallurgia Italiana». Anno XXIII). Milano, 1931, 4°, pp. 1-6.
- SCARPA OSCAR. — Le corrosioni elettrochimiche delle membrane metalliche. (Estr. dal I volume degli «Atti della XX Riunione della Società Italiana per il Progresso delle Scienze», 1931). Milano, 1932, 8°, pp. 1-40.

- SCARPA OSCAR. — Ricerche sull'alluminio italiano. Parte I e II. (Estr. dalla Rivista «Alluminio». 1932). S. l. s. d. 4^o, pp. 1-21.
- SCARPA OSCAR. — Les corrosion des matériaux métalliques par les courants électriques. (Estr. dagli «Atti del Congresso Internazionale Elettrocità». Parigi, 1932). (Solo titolo).
- SCARPA OSCAR. — I raddrizzatori elettrolitici. Comunicazione alla XXXVII Riunione annuale dell'A. E. I. Firenze, 25 settembre-1^o ottobre 1932. Milano, 1932. 4^o, pp. 1-5.
- SCARPA OSCAR. — I raddrizzatori elettrolitici. (Estratto da «Elettrotecnica». Vol. XIX). Milano, 1932. 4^o, pp. 1-4.
- SCARPA OSCAR. — Dispositivo per eseguire rapidamente più misure di tensione elettrica di valore notevolmente diverso e di polarità opposta, specialmente adatto per le misure sugli accumulatori elettrici. Brevetto italiano n. 300741. Anno 1932. (Solo titolo).
- SCARPA OSCAR. — Elettrometallurgia. «Enciclopedia Italiana», 1931. (Solo titolo).
- SCARPA OSCAR. — Forni elettrici. «Enciclopedia Italiana», 1931. (Solo titolo).
- SCARPA OSCAR. — Elettrochimica ed Elettrometallurgia. Manuale dell'Ingegnere. Milano, Hoepli, 1932. (Solo titolo).
- SCARPA OSCAR. — Tables annuelles des Constantes de Chimie, de Physique ecc. (in collaborazione con E. Cohen, F. Dutait, A. Egerton, Ch. Maria, F. Washburn, J. West). Voll. V, VI, VII, IX et tables des matières. Paris, Gauthier-Villars ed. a partire dall'anno 1928. (Solo titolo).
- SCARPA OSCAR. — La corrodibilità dei metalli impiegati nell'elettrotecnica. (Estr. da «L'Energia Elettrica». Vol. X). Milano, 1933. 4^o, pp. 1-15.
- SCARPA OSCAR. — Sul coefficiente di temperatura della resistività dei metalli ed in particolare del rame e dell'alluminio. (Estr. da L'«Energia Elettrica». 1933). (Solo titolo).
- SCARPA OSCAR. — La grande radioattività di alcune acque termali dell'Isola d'Ischia. (Estr. da «La Ricerca Scientifica». Vol. I). Roma, 1933. 8^o, pp. 1-8.
- SCARPA OSCAR. — Probabile esistenza di nuovi stati allotropici dell'alluminio e di altri metalli. (Estr. dalla «Ricerca Scientifica». Vol. II). Milano, 1933, 8^o, pp. 1-2.
- SCARPA OSCAR. — Materie prime per accumulatori. (Estr. dalla XXXVIII Riunione Annuale dell'A. E. I. Sorrento, 17 al 23 settembre, 1933). S. l. 1933. 4^o, pp. 1-7.
- SCARPA OSCAR. — Piles entièrement métalliques fonctionnant en contradiction avec la loi des tensions électriques dans les métaux (2^e loi de Volta). (Extr. du «Bulletin de la Société Française des Electriciens». Septembre 1933). Bar-le-Duc, 1933. 8^o, pp. 1-10.
- SCARPA OSCAR. — Sulla corrosione delle saldature di cavi in alluminio. (Estr. dalla Rivista «Alluminio». 1933). Milano, 1933. 4^o, pp. 1-2.
- SCARPA OSCAR. — La corrosion de l'acier et les essais physico-chimiques effectués sur le revêtement «Dalmine». (Extr. des «Mémoires de la Société des Ingénieurs Civils de France». 1933). Paris, 1934. 8^o, pp. 1-46.
- SCARPA OSCAR. — I laboratori di elettrochimica ed elettrometallurgia e di chimica fisica e metallurgica del R. Politecnico di Milano. (Estr. da «L'Industria Chimica». 1934). Torino, 1934. 4^o, pp. 1-7.
- SCARPA OSCAR. — Le corrosioni dei materiali metallici per effetto delle correnti elettriche. (Estr. da «La partecipazione italiana al Congresso Internazionale di elettricità». 1932). Roma, 1933. 8^o, pp. 1-31.
- SCARPA OSCAR. — Sul coefficiente di temperatura dell'alluminio. (Estr. dalla Rivista «Alluminio». 1933). S. l. 1933. 8^o, pp. 1-8.

- SCARPA OSCAR. — Pile metalliche che funzionano in eccezione alla legge delle tensioni elettriche nei circuiti metallici. Paris, 1934. 8°, pp. 1-22.
- SCARPA OSCAR. — Les limites de validité de la loi des tensions électriques dans les métaux. (2° loi de Volta). (Extr. de « Le Journal de Physique, et le Radium ». Tome IV). Paris, 1933. 8°, pp. 1-7.
- SCARPA OSCAR. — Le corrosioni delle membrature metalliche in causa delle correnti elettriche circolanti nel suolo. (Estr. da « L'Energia Elettrica ». Vol. XI). Milano, 1934, 4°, pp. 1-12.
- SCARPA OSCAR. — Esistenza dell'acqua pesante nell'elettrolita degli accumulatori a piombo. (Estr. dalla Rivista « La ricerca scientifica ». Vol. I, 1934). Milano, 1934. 8°.
- SCARPA OSCAR. — L'azione della dilatazione termica sulla resistenza elettrica dei conduttori e la sua influenza sulle misure dei coefficienti di temperatura delle resistività. S. l. s. d. 4°.
- SCARPA OSCAR. — Coefficiente di temperatura della resistenza elettrica a coefficiente di temperatura della resistività dei metalli. (Estr. dalla Rivista « La Metallurgia Italiana ». Anno XXVI). Milano, 1934. 4°, pagine 1-2.
- SCARPA OSCAR. — Un nuovo misuratore delle tensioni contro cadmio per accumulatori elettrici. (Trabaos del IX Congreso Internacional de Química Pura y Aplicada. Tomo II). Madrid, s. d. 8°, pp. 1-5.
- SCARPA OSCAR. — Alcune rappresentazioni grafiche del sistema periodico degli elementi. (Trabaos del IX Congreso Internacional de Química Pura y Aplicada. Tomo II). Madrid, s. d. 8°, pp. 1-7.
- SCARPA OSCAR. — Sul valore medio da assegnare al coefficiente di temperatura della resistenza dei conduttori d'alluminio. (Estr. dalla Rivista « Alluminio ». 1933). Milano, 1933. 4°, pp. 1-4.
- SCARPA OSCAR. — Sulla corrosione delle saldature di cavi in alluminio. (Estr. dalla Rivista « Alluminio ». 1935). S. l. S. d. 4°.
- SCARPA OSCAR. — Il rivestimento « Dalmine » e la sua azione protettiva rispetto all'agressività dei terreni ed alle correnti vaganti. (Sindacato Nazionale Fascista Ingegneri. III Congresso Nazionale degli Ingegneri Italiani. Trieste, 1935). Trieste, 1935. 4°, pp. 1-25.
- SCARPA OSCAR. — La piombatura dell'alluminio. (Estr. dalla Rivista « Alluminio ». 1936). Milano, 1936. 6°, pp. 1-7.
- SCARPA OSCAR. — Sulle differenze di potenziale che si stabiliscono fra leghe di piombo-antimonio diversamente concentrate, quando sono immerse in elettroliti, e sulla loro corrodibilità. (Estratto da « L'Energia Elettrica ». Vol. XIII). Milano, 1936. 4°, pp. 1-6.
- SCARPA OSCAR. — Il primo impianto di piombatura elettrolitica dell'alluminio. (Estr. dalla Rivista « Alluminio ». 1936). S. d. S. l. 1936. 4°.
- SCARPA OSCAR. — Sviluppo di idrogeno e di ossigeno negli accumulatori a piombo durante il riposo e durante la scarica. (Estr. da L'Energia Elettrica ». Vol. XIII). Milano, 1936, 4°, pp. 1-5.
- SCARPA OSCAR. — Sulle proprietà dei separatori in legno per accumulatori. (Estr. da « L'Energia Elettrica ». Vol. XIII). Milano, 1936. 4°, pp. 1-3.
- SCARPA OSCAR. — Possibilità di ritrovamento di minerali rari in Etiopia per nuove leghe anticorrodibili. (Estr. dalla « Ricerca Scientifica ». Vol. II). Milano, 1936, 4°.
- SCARPA OSCAR. — Osservazioni alle specificazioni della C. E. I. sulla resistività dell'alluminio per conduttori. (3 note dattilografate). 4°, pp. 1-8.
- SCARPA OSCAR. — Le corrosioni elettrolitiche nelle tubazioni interrate di ghisa e di acciaio, e i metodi adottati nella pratica per diminuirne l'entità.

- (Estr. dalla Rivista «La Metallurgica Italiana». Anno XXVIII). Milano, 1936. 4°, pp. 1-38.
- SCARPA OSCAR. — Osservazioni alle specificazioni della C. E. I. sui valori normali della resistività dell'alluminio per conduttori. (Estr. dalla Rivista «Alluminio». 1937). S. l. 1937. 4°, pp. 1-8.
- SCARPA OSCAR. — I metodi per recuperare il rame e lo stagno dai rottami di bronzo e da quelli di rame stagnato. (Estr. dalla Rivista «La Metallurgia Italiana». Anno XXIX). Milano, 1937. 4°, pp. 1-11.
- SCARPA OSCAR. — Formazione di pseudo cristalli-unicì nella elettrodeposizione del rame. (Estr. dai «Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei». Classe di Scienze fisiche, Matematiche e Naturali». Volume XXVI, pp. 135-137). Roma, 1937. 8°.
- SCARPA OSCAR. — Sulla possibilità della lavorazione elettrolitica del rame fortemente impuro e sulla formazione di arborescenze catodiche nella raffinazione industriale del rame. (Estr. dai «Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali». Vol. XXV, pp. 533-536). Roma, 1937. 8°.
- SCARPA OSCAR. — Sulle escrescenze catodiche che si osservano nella raffinazione elettrolitica dello stagno. (Estr. dai «Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali». Vol. XXVI, pp. 363-365). Roma, 1937. 8°.
- SHAPLEY HARLOW. — A survey of thirty-six thousand southern Galaxies. (Reprinted from the «Proceedings of the National Academy of Sciences» Vol. XXIII, pp. 449-453). S. l. 1937.
- SHAPLEY HARLOW and PARASKEVOPAULOS J. S. — The Nuclear Star Cluster in 30 Doradus. (Reprinted from the «Astronomical Journal». Vol. 86, pp. 340-342). S. l. 1937. 8°.
- SILVESTRI FILIPPO. — Insect Polyembryony and its general Biological Aspects. (Reprinted from the «Bulletin of the Museum of Comparative Zoology». Vol. LXXXI, n. 4, pagine 469-498). Cambridge, 1937. 8°.
- STERNE T. E. — Modes of Radial Oscillation. (Reprinted from the «Monthly Notices of the Royal Astronomical Society». Vol. 97, pp. 582-593). Edinburgh, 1937. 8°.
- SWIRLES BERTHA. — The Construction of Zero Order Wave Function for Complex Atoms. (From the «Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society». Vol. 82, pp. 21-28). Manchester, 1934. 8°.
- TRIGONA G. — Le colture sperimentali autunno-vermine eseguite dall'Ufficio Agrario Provinciale di Tripoli nel 1936-1937. (Estr. da «Agricoltura Libica». Anno VII, n. 2). Tripoli, 1936. 8°, pp. 1-27.
- VIVOLI GIULIO. — L'Istituto sperimentale agrario e zootecnico di Sidi Mesri. (Estr. dalla «Rassegna dell'Africa Italiana». 1937, n. 8). Roma, 1937, 8°, pp. 1-7.
- VIVOLI GIULIO e DALLA GATTA LUIGI. — Il problema dell'irriguo nella pianura tripolitana. (Estr. dagli «Atti del terzo Congresso di Studi Coloniali». 12-17 aprile 1937. Firenze, pp. 101-108). Firenze, 1937. 8°.
- VIVOLI GIULIO e DALLA GATTA LUIGI. — L'opera dell'Istituto sperimentale agrario di Sidi Mesri. (Estr. dagli «Atti del terzo Congresso di Studi Coloniali». 12-17 aprile 1937. Firenze, pp. 118-126). Firenze, 1937. 8°.
- VIVOLI GIULIO e DELLA GATTA LUIGI. — Prospettive varie culturali nella Libia Occidentale. (Estr. dagli «Atti del terzo Congresso di Studi Coloniali». 12-17 aprile 1937. Firenze, pp. 126-133). Firenze, 1937. 8°.
- WIERTANEN C. A. — Vedi MITCHELL S. A.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 24 aprile 1938 - Anno XVI

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica (Algebra). — *Sui sistemi di risultanti*. Nota di G. DANTONI, presentata⁽¹⁾ dal Socio G. SCORZA.

Siano

(I) $F_1(x_1, x_2, \dots, x_{r+1}), F_2(x_1, x_2, \dots, x_{r+1}), \dots, F_h(x_1, x_2, \dots, x_{r+1}),$

$h \geq r + 1$ forme complete di ordine $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_h$, a coefficienti indeterminati $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(h)}$.

È noto che si chiama *sistema di risultanti* delle (I) ogni sistema di polinomi nelle a :

$R_1(a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(h)}), R_2(a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(h)}), \dots, R_l(a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(h)})$

che si annullano per tutti e soli i sistemi di valori delle a per cui le $F_1 = 0, F_2 = 0, \dots, F_h = 0$ ammettono soluzioni non nulle (soluzioni cioè distinte dalla $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_{r+1} = 0$).

La definizione è stata posta da van der Waerden il quale ha dimostrato⁽²⁾ anche l'esistenza dei detti sistemi di risultanti, con l'aiuto del teorema degli zeri di Hilbert. Una costruzione effettiva dei sistemi di risul-

(1) Nella seduta del 3 aprile 1938.

(2) V. d. WAERDEN, *Ein algebraisches Kriterium für die Lösbarkeit eines Systems homogener Gleichungen*. « Koninklijke Akademie van Wetenschappen, Amsterdam, Proceedings », vol. XXIX (1926), p. 142.

tanti è stata ottenuta dallo stesso A. ⁽¹⁾ riprendendo il metodo di eliminazione di Hentzelt e precisando, in un caso particolare, il teorema degli zeri; van der Waerden ha fatto vedere così che si può costruire una matrice M^* ad $\binom{(r+1)\rho}{r}$ colonne e $\sum_{i=1}^h \binom{(r+1)\rho - m_i}{r}$ righe, i cui elementi non nulli sono i coefficienti delle (1) e tale che i suoi minori di ordine $\binom{(r+1)\rho}{r}$ formano un sistema di risultanti delle (1); l'intero ρ è definito, in funzione di r ed m_1 , dalle relazioni: $\rho(r+1, m_1) = \rho(r, 2m_1^2)$, $\rho(1, m_1) = m_1$.

Nel n. 1 della presente Nota, con semplici ragionamenti algebrico-geometrici, si costruisce una matrice M ad $n = \binom{(r+1)m_1}{r}$ colonne e $\sum_{i=1}^h \binom{(r+1)m_1 - m_i}{r}$ righe la quale gode delle stesse proprietà della M^* rispetto alle forme F ; cioè gli elementi non nulli della M sono i coefficienti delle (1) ed il sistema dei suoi minori di ordine n è un sistema di risultanti delle (1). Nel n. 3 si dimostra che la varietà W definita dai sistemi di risultanti delle (1) nello spazio proiettivo

$$S \equiv (a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(h)}) \quad \left[k = \sum_{i=1}^h \binom{m_i + r}{r} - 1 \right]$$

è irriducibile non solo nel caso noto di $h = r + 1$, ma anche nel caso, che non mi consta sia stato considerato, di $h > r + 1$; si prova che la dimensione di W è $k - (h - r)$ e nel caso $h = r + 1$ si ritrovano (n. 4) le più importanti proprietà del risultante di $r + 1$ forme in $r + 1$ variabili. I ragionamenti algebrico-geometrici adoperati nelle dimostrazioni mi sembra che mettano bene in evidenza il significato geometrico dei fatti algebrici in considerazione.

1. Insieme alle (1) consideriamo le seguenti forme di ordine $\mu = (r + 1)m_1 - r$:

$$(2) \quad x_1^{i_{11}} x_2^{i_{12}} \dots x_{r+1}^{i_{1r+1}} F_1, \quad x_1^{i_{21}} x_2^{i_{22}} \dots x_{r+1}^{i_{2r+1}} F_2, \dots, x_1^{i_{h1}} x_2^{i_{h2}} \dots x_{r+1}^{i_{hr+1}} F_h$$

dove le i assumono tutti i valori interi, positivi o nulli, soddisfacenti alle equazioni:

$$i_{s1} + i_{s2} + \dots + i_{sr+1} = \mu - m_s \quad (s = 1, 2, \dots, h).$$

(1) *Neue Begründung der Eliminations und Resultantentheorie*. «Nieuw Archief voor Wiskunde», Tweede reeks, deel XV, vierde stuk, 1928. Il Kapferer ha costruito un sistema * di risultanti delle (1) applicando ad esse il procedimento generale di eliminazione di Kronecker (KAPFERER, *Ueber Resultanten und Resultanten-Systeme*. «Sitzungsberichte der math. naturwiss. Ableitung der Akad. der Wiss. München», 1929, p. 179).

Indichiamo con M la matrice dei coefficienti delle forme (2); la M avrà $n = \binom{\mu + r}{r} = \binom{(r + 1)m_1}{r}$ colonne e $\sum_{i=1}^h \binom{(r + 1)m_i - m_i}{r}$ righe. Dimostriamo che:

Condizione necessaria e sufficiente affinché per i valori $\bar{a}^{(1)}, \bar{a}^{(2)}, \dots, \bar{a}^{(h)}$, dei coefficienti delle (1) il sistema corrispondente $\bar{F}_1 = 0, \bar{F}_2 = 0, \dots, \bar{F}_h = 0$ abbia una soluzione non nulla, è che la matrice M abbia caratteristica minore di n per i detti valori delle a .

Ciò equivale ad affermare che se le ipersuperficie $\bar{F} = 0$ non hanno punti a comune il sistema lineare $\bar{\Sigma}$ di ipersuperficie definito dalle (2), dove al posto delle F si mettono le \bar{F} , ha la dimensione $n - 1$, e viceversa.

a) Supponiamo che le $\bar{F} = 0$ non abbiano punti a comune.

Le ipersuperficie di $\bar{\Sigma}$ sono evidentemente tutte e sole quelle definite dalle forme F^* di ordine μ che appartengono al modulo $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_h)$. Se $h = r + 1$, dall'ipotesi che le $\bar{F} = 0$ non hanno punti a comune, per un noto teorema di Lasker⁽¹⁾ si ha che le F^* sono tutte le forme di ordine μ e quindi la dimensione di $\bar{\Sigma}$ è $n - 1 = \binom{\mu + r}{r} - 1$. Sia $h > r + 1$ e consideriamo le seguenti forme di ordine m_1 :

$$(3) \quad \bar{F}_1, x_1^{m_1 - m_t} \bar{F}_t, x_2^{m_1 - m_t} \bar{F}_t, \dots, x_{r+1}^{m_1 - m_t} \bar{F}_t, \quad (t = 2, 3, \dots, h).$$

Indichiamo brevemente con $\bar{\Phi}_1, \bar{\Phi}_2, \dots, \bar{\Phi}_k$ le forme (3). Le ipersuperficie $\bar{\Phi} = 0$ non hanno punti a comune perchè non ne hanno le $\bar{F} = 0$. Inoltre è chiaro che se una forma appartiene al modulo $(\bar{\Phi}_1, \bar{\Phi}_2, \dots, \bar{\Phi}_k)$ essa appartiene al modulo $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_h)$.

Consideriamo il sistema lineare Δ di ipersuperficie di ordine m_1 : $\lambda_1 \bar{\Phi}_1 + \lambda_2 \bar{\Phi}_2 + \dots + \lambda_k \bar{\Phi}_k = 0$. Il sistema lineare Δ è senza punti base e quindi $r + 1$ ipersuperficie generiche di esso non hanno punti a comune⁽²⁾. Possiamo dunque fissare k forme:

$$\bar{\Psi}_i = \lambda_{i1} \bar{\Phi}_1 + \lambda_{i2} \bar{\Phi}_2 + \dots + \lambda_{ik} \bar{\Phi}_k \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

tale che sia $|\lambda_{ik}| \neq 0$ e le $r + 1$ ipersuperficie:

$$\bar{\Psi}_1 = 0, \bar{\Psi}_2 = 0, \dots, \bar{\Psi}_{r+1} = 0$$

non abbiano punti a comune.

Allora i due moduli $(\bar{\Psi}_1, \bar{\Psi}_2, \dots, \bar{\Psi}_k), (\bar{\Phi}_1, \bar{\Phi}_2, \dots, \bar{\Phi}_k)$ coincidono. Inoltre, per il citato teorema di Lasker, ogni forma H di ordine

(1) *Zur Theorie der Moduln und Ideale*. «Math. Ann.», Bd. 60, 1905, pp. 20-116. Una dimostrazione algebrico-geometrica di questo teorema è stata data dal SEVERI, «Atti Acc. Torino», vol. XLI, 1905-6, p. 205.

(2) Vedi, per es., BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*. Messina, 1923, p. 276.

$\mu = (r + 1)m_1 - r$ appartiene al modulo $(\bar{\Psi}_1, \bar{\Psi}_2, \dots, \bar{\Psi}_{r+1})$; ne segue che H appartiene al modulo $(\bar{\Psi}_1, \bar{\Psi}_2, \dots, \bar{\Psi}_k)$ e quindi al modulo $(\bar{\Phi}_1, \bar{\Phi}_2, \dots, \bar{\Phi}_k)$ e, per quanto si è detto, al modulo $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_b)$. Concludendo, se le $\bar{F} = 0$ non hanno punti a comune ogni forma H di ordine $\mu = (r + 1)m_1 - r$ appartiene al modulo $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_b)$ e quindi ogni ipersuperficie di ordine μ appartiene al sistema lineare $\bar{\Sigma}$; ne segue che $\bar{\Sigma}$ ha la dimensione $n - 1 = \binom{\mu + r}{r} - 1$.

b) Viceversa se $\bar{\Sigma}$ ha la dimensione $n - 1 = \binom{\mu + r}{r} - 1$ allora ad esso appartengono tutte le ipersuperficie di S_r di ordine μ . In particolare sarà $x_v^\mu = \bar{A}_{v1}\bar{F}_1 + \bar{A}_{v2}\bar{F}_2 + \dots + \bar{A}_{vb}\bar{F}_b$ per $v = 1, 2, \dots, r + 1$ e per \bar{A}_{vs} forme opportune di ordine $\mu - m_s$ ($s = 1, 2, \dots, b$); ne segue che il sistema delle $\bar{F} = 0$ non può avere soluzioni distinte da

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_{r+1} = 0.$$

2. Siano R_1, R_2, \dots, R_l , i minori di ordine n estratti dalla matrice M delle forme (2). Se R_i sono polinomi interi ⁽¹⁾ nei coefficienti a delle F ; essi sono omogenei nei coefficienti di ciascuna delle F_s e, per quanto si è visto, il loro annullarsi è condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema $F_1 = 0, F_2 = 0, \dots, F_b = 0$ abbia una soluzione non nulla. I polinomi

$$(4) \quad R_1(a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(b)}), R_2(a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(b)}), \dots, R_l(a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(b)}),$$

formano dunque un sistema di risultanti delle (1) nel senso di van der Waerden.

3. Nello spazio proiettivo

$$S_k \equiv (a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(b)}) \text{ a } k = \sum_{i=1}^b \binom{m_i + r}{r} - 1 \text{ dimensioni,}$$

le equazioni $R_1 = 0, R_2 = 0, \dots, R_l = 0$, definiscono una varietà algebrica W . È facile provare che la W è irriducibile ed ha la dimensione $k - (b - r)$.

Infatti consideriamo lo spazio $S_r \equiv (x_1, x_2, \dots, x_{r+1})$ e fissiamo in esso un punto $P \equiv (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{r+1})$; i punti di S_k le cui coordinate soddisfano alle condizioni lineari:

$$F_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{r+1}) = 0,$$

$$F_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{r+1}) = 0, \dots, F_b(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{r+1}) = 0$$

formano uno spazio $S_t(P)$ a $t = k - b$ dimensioni, tutto immerso in W . A due punti distinti P, P' di S_r corrispondono, nel modo detto, due spazi

(1) Cioè aventi per coefficienti dei numeri interi.

S_i di S_k che sono distinti perchè non tutte le ipersuperficie di S_r che passano per P passano per P' . Al variare di P in S_r lo spazio $S_i(P)$ genera in S_k una varietà \bar{W} che, per il modo come è stata ottenuta, è irriducibile e formata da $\infty^r S_i$ generatori. Un punto generico di \bar{W} rappresenta (1) una h -upla generica di forme $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_h$, con un solo zero a comune (distinto da $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_{r+1} = 0$) e quindi appartiene ad un ed uno solo S_i generatore. Ne segue che la dimensione di \bar{W} è $k - h + r$. La varietà \bar{W} coincide evidentemente con la $W^{(2)}$ e quindi:

La varietà definita dai sistemi di risultanti delle (1) è irriducibile ed ha la dimensione $k - (h - r)$ con $k = \sum_{i=1}^h \binom{m_i + r}{r} - 1$.

4. Sia $h = r + 1$. In questo caso la W è una ipersuperficie irriducibile di S_k e quindi i polinomi (4) hanno a comune un fattore irriducibile $R(a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(r+1)})$ e fuori dei punti della $R = 0$ le $R_i = 0$ non hanno punti a comune.

Il polinomio R è omogeneo nei coefficienti $a^{(s)}$ di ciascuna forma F_s perchè lo sono tutti i polinomi R_i .

Per trovare il grado di R per es. nelle $a^{(1)}$, fissiamo i coefficienti delle forme F_2, F_3, \dots, F_{r+1} in modo che queste si spezzino rispettivamente in m_2, m_3, \dots, m_{r+1} fattori lineari generici. Siano $\bar{a}^{(2)}, \bar{a}^{(3)}, \dots, \bar{a}^{(r+1)}$, i coefficienti così fissati; le corrispondenti ipersuperficie

$$\bar{F}_2 = 0, \bar{F}_3 = 0, \dots, \bar{F}_{r+1} = 0$$

avranno a comune esattamente $v = m_2 m_3 \dots m_{r+1}$ punti distinti

$$P_1, P_2, \dots, P_v.$$

Nello spazio proiettivo $(a^{(1)})$ le ipersuperficie $F_i = 0$ per P_j sono rappresentate da un iperpiano $S_i^{(j)}$ e gli iperpiani $S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(v)}$, sono distinti perchè i punti P_1, P_2, \dots, P_v , sono distinti. Una retta generica $(\bar{a}^{(1)} + \lambda \bar{a}^{(1)})$ dello spazio $(a^{(1)})$ incontra questi iperpiani in v punti distinti; questo vuol dire che, fissati genericamente $\bar{a}^{(1)}, \bar{a}^{(2)}$, l'equazione in λ :

(1) Naturalmente a meno di un comune fattore di proporzionalità.

(2) Sia $\bar{A} \equiv (\bar{a}^{(1)}, \bar{a}^{(2)}, \dots, \bar{a}^{(h)})$ un punto di W e consideriamo le forme corrispondenti $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_h$. Se nessuna di queste forme è identicamente nulla, allora \bar{A} sta in \bar{W} per la definizione di W e \bar{W} . Se per esempio svanisce la \bar{F}_1 allora le ipersuperficie $\bar{F}_2 = 0, \dots, \bar{F}_h = 0$, hanno almeno un punto P a comune; indicando con F_1^* una qualunque forma di ordine m_1 e che si annulla in P , e con $\alpha^{(1)}$ i suoi coefficienti si ha che il punto $A \equiv (\alpha^{(1)}, \bar{a}^{(2)}, \dots, \bar{a}^{(h)})$ sta sempre in W e in \bar{W} e quindi

$$\bar{A} \equiv (0, \bar{a}^{(2)}, \dots, \bar{a}^{(h)})$$

sta in W .

$R(\lambda) = R(\bar{a}^{(1)} + \lambda \bar{a}^{(1)}, \bar{a}^{(2)}, \bar{a}^{(3)}, \dots, \bar{a}^{(r+1)}) = 0$, ammette ν soluzioni distinte. Ne segue che $R(\lambda)$ è di grado $\geq \nu$ in λ e quindi

$$R(a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(r+1)})$$

è di grado $\geq \nu$ nelle $a^{(1)}$.

Proviamo ora che fra i polinomi R_i ne esiste almeno uno di grado $\leq \nu$ nelle $a^{(1)}$ e non identicamente nullo; essendo R un divisore comune alle R_i , per quanto si è detto sopra, si potrà concludere che esso è di grado ν nelle $a^{(1)}$.

Ricordiamo che le R_i sono i minori di ordine $n = \binom{\mu + r}{r}$ della matrice M dei coefficienti delle forme (2) per $h = r + 1$. Fra le forme (2) consideriamo quelle del 1° gruppo per cui gli esponenti $i_{12}, i_{13}, \dots, i_{1r+1}$ soddisfano alle limitazioni

$$i_{12} \leq m_2 - 1, i_{13} \leq m_3 - 1, \dots, i_{1r+1} \leq m_{r+1} - 1.$$

Se $i_{12}, i_{13}, \dots, i_{1r+1}$ sono interi positivi o nulli soddisfacenti a queste condizioni, allora essendo $\mu - m_1 - (i_{12} + i_{13} + \dots + i_{1r+1}) = (r + 1)m_1 - r - m_1 - (i_{12} + i_{13} + \dots + i_{1r+1}) \geq 0$ si ha che esiste un intero $i_{11} \geq 0$ per cui $i_{11} + i_{12} + \dots + i_{1r+1} = \mu - m_1$; ne segue che le forme del 1° gruppo che veniamo a considerare sono in numero di

$$m_2 m_3 \dots m_{r+1} = \nu.$$

Sia M_1 la matrice dei coefficienti di queste ν forme del 1° gruppo e di tutte le forme degli altri r gruppi (2). In M_1 i coefficienti $a^{(1)}$ di F_1 compaiono solo in ν righe; inoltre, ponendo

$$F_1 = x_1^{m_1}, F_2 = x_2^{m_2}, \dots, F_{r+1} = x_{r+1}^{m_{r+1}},$$

fra le nostre forme ci sono tutti gli $n = \binom{\mu + r}{r}$ monomi $x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_{r+1}^{j_{r+1}}$ di grado $\mu^{(1)}$. E poichè questi monomi sono linearmente indipendenti, si ha che la matrice M_1 per generici valori dei coefficienti delle

$$F_1, F_2, \dots, F_{r+1},$$

(1) Infatti se per un tale monomio si ha

$$j_2 \leq m_2 - 1, j_3 \leq m_3 - 1, \dots, j_{r+1} \leq m_{r+1} - 1,$$

allora è

$$j_2 + j_3 + \dots + j_{r+1} \leq m_2 + m_3 + \dots + m_{r+1} - r \leq r m_1 - r$$

e quindi

$$j_1 = (r + 1)m_1 - r - (j_2 + j_3 + \dots + j_{r+1}) \geq m_1,$$

cioè un tale monomio appartiene alle nostre forme del 1° gruppo per $F_1 = x_1^{m_1}$. I monomi per cui $j_2 = m_2 + i_{22}$ con $i_{22} \geq 0$ si ritrovano nel 2° gruppo per $F_2 = x_2^{m_2}$, ecc.

ha caratteristica n . Ne segue che fra i minori di ordine n della matrice M_1 , che sono evidentemente polinomi R_i , ne esiste almeno uno che non è identicamente nullo e che nelle $a^{(i)}$ è di grado $\leq v$.

È così dimostrato il noto teorema: se $h = r + 1$, esiste un polinomio R nei coefficienti delle (1) che forma da solo un sistema di risultanti; il polinomio R è irriducibile ed omogeneo di grado $\frac{m_1 m_2 \dots m_r + 1}{m_i}$ nei coefficienti $a^{(i)}$ di ciascuna forma F_i .

Astronomia (Statistica stellare). — *Nuove ricerche sull'«ammasso del Sole»*. Nota II di L. GIALANELLA, presentata ⁽¹⁾ dal Socio G. ARMELLINI.

1. In una Nota precedente ⁽²⁾ ho mostrato come, con l'esattezza delle parallassi, delle velocità radiali e dei moti proprî stellari fin qui noti, è possibile caratterizzare un «ammasso del Sole», cioè un gruppo di stelle moventisi di conserva con il Sole, e come tali aventi quindi velocità spaziale minima (relativamente al Sole). Precisamente ho riconosciuto che quest'ammasso è formato da 122 stelle (123 con il Sole), distinto (per semplice comodità di studio) in un primo gruppo di 36 stelle dotate di velocità spaziale relativa minore di 4 km/sec. e in un secondo gruppo di 86 stelle con velocità spaziale compresa tra 4 e 7 km/sec. La dimensione massima dell'ammasso è di circa 400 parsec ⁽³⁾.

(1) Nella seduta del 3 aprile 1938.

(2) Questi «Rendiconti» 1937, sem. 2°, fasc. 12, p. 446.

(3) Subito dopo la pubblicazione di questa mia Nota, A. FESTAETS ha pubblicato nei «Comptes Rendus» (to. 206, n. 4) una lista di 50 stelle di cui il movimento sarebbe «sensiblement parallèle et égal» a quello del Sole. Ora, due notevoli osservazioni si possono subito fare su questa ricerca di Festraets. Innanzi tutto, egli ha limitato il suo esame a cataloghi e raccolte di caratteristiche stellari non troppo moderne (la più recente è del 1929), tralasciando, ad es., i recenti amplî cataloghi del Moore e dello Schorr. In secondo luogo, delle 50 stelle della sua lista, ben ventuna mi sembra non siano da prendersi in considerazione, poichè le loro caratteristiche stellari forniscono per la velocità spaziale relativa un valore di gran lunga superiore ai 6-7 km/sec., onde il loro moto non potrebbe più considerarsi «sensiblement parallèle et égal» a quello del Sole. Resterebbero così a costituire il *courant* di Festraets solo un gruppo di 29 stelle. La ricerca dell'Horn (del 1930-31) era quindi già in anticipo su questa!

Così pure il *Solar Cluster* del SAMPSON (Montly Notices R. A. S., London, LXXXVI, 1926, p. 390) è tutt'altra cosa del nostro «ammasso del Sole». Il Sampson, basandosi sulle parallassi stellari allora note, ha studiato statisticamente tutto l'insieme di stelle prossimo al Sole *senza preoccuparsi delle loro velocità*. Egli ne ha definito quindi una struttura istantanea (corrispondente cioè all'epoca attuale) e dipendente unicamente dalle luminosità, masse, temperature, densità stellari (da lui calcolate).

Nella presente II Nota continuo lo studio statistico dell'ammasso, fornendone innanzi tutto una rappresentazione grafica. Dopo vari tentativi e numerose prove, ho prescelto la rappresentazione assonometrica isometrica ortogonale, calcolando per ogni stella le coordinate cartesiane mediante le note formule:

$$(1) \quad x = \frac{\cos \alpha \cos \delta}{\pi''} \quad y = \frac{\sin \alpha \cos \delta}{\pi''} \quad z = \frac{\sin \delta}{\pi''}$$

(dove α, δ, π'' indicano rispettivamente l'ascensione retta, la declinazione e la parallasse in secondi), formule che mi hanno fornito le coordinate stesse direttamente in *parsec*.

La tabella I raccoglie i risultati ottenuti; nelle quarte colonne sono date anche le grandezze assolute delle stelle dell'ammasso, calcolate con la formula:

$$(2) \quad M = m + 5 + 5 \log \pi''.$$

2. Come ho detto, la rappresentazione grafica da me prescelta è stata l'assonometrica (isometrica ortogonale), la quale mi ha permesso di dare dell'« ammasso » la più significativa rappresentazione spaziale, e contemporaneamente le proiezioni sul piano orizzontale e su i due piani di fronte e di profilo. Per comodità di disegno, affinché il Sole, centro dell'ammasso, venisse a essere rappresentato entro il primo ottante, ho eseguito una traslazione dei primitivi assi, assumendo come coordinate del Sole, i valori seguenti (in *parsec*):

$$x_0 = 100 \quad y_0 = 100 \quad z_0 = 110.$$

Nel disegno, i tondini neri rappresentano tutte le stelle dell'« ammasso »; di quelle del primo gruppo sono state disegnate anche le proiettanti orizzontali, mentre delle stelle del secondo gruppo — per non rendere troppo intricato il disegno stesso — sono stati segnati soltanto i piani proiettanti di fronte e di profilo. Le stelle 109 e 118 sono state omesse perchè troppo fuori dei limiti del grafico (in alto a destra di chi guarda).

La scala originaria del disegno era di 1 mm. per 1 *parsec*.

Dall'esame di esso mi sembra che *non* si possa ritrovare nella nuova costituzione dell'ammasso la doppia stratificazione piana, intravista dall'Horn. Sembra trattarsi piuttosto di un *ammasso aperto*, a somiglianza di quelli delle Iadi, dell'Orsa Maggiore, ecc., o meglio, di un *ammasso stellare in moto*, definito da una velocità media assai poco differente in direzione e modulo da quella del Sole verso l'apice. A questo proposito, aggiungo anzi che mi è sembrato inutile dare per ogni stella anche lo scarto tra la direzione del suo moto e quella del moto del Sole, appunto perchè, avendo scelto stelle con velocità spaziale relativa non eccedente i 7 km/sec., tale scarto non può superare i 18°, essendo in media inferiore ai 9°.



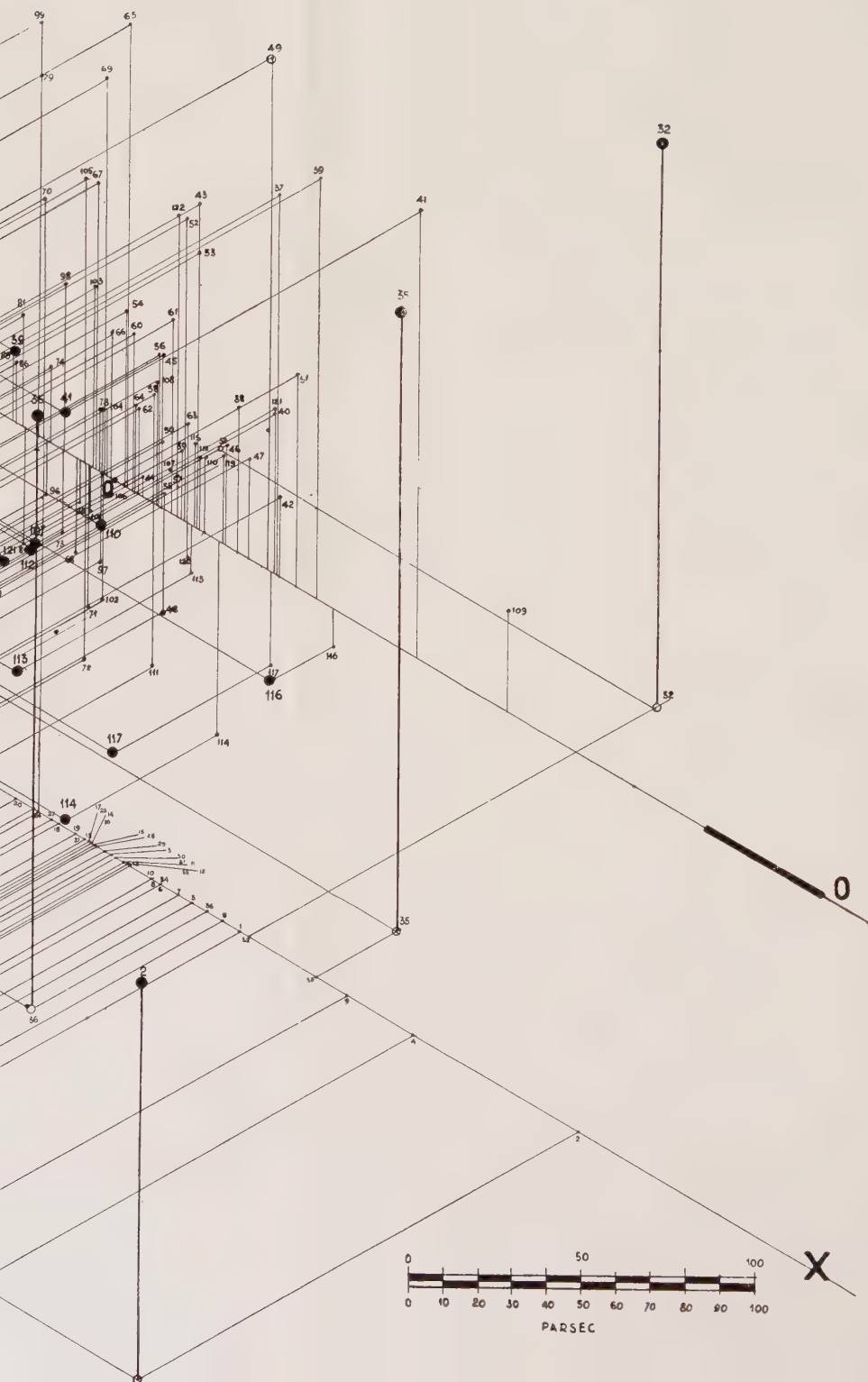


TABELLA I.

N.	*	x	y	z	M
1	B 229	+ 44.1	+ 11.4	— 48.7	1.19
2	33 Ceti	+ 160.0	+ 47.2	+ 5.5	0.10
3	ν Piscium	+ 28.7	+ 12.7	+ 2.7	2.23
4	I Arietis	+ 104.3	+ 51.1	+ 46.4	0.7
5	ι Cassiopeiae A	+ 39.6	+ 11.9	+ 48.4	1.1
6	γ Persei	+ 18.6	+ 18.3	+ 34.8	— 0.12
7	B 864	+ 23.9	+ 34.4	+ 90.8	— 0.29
8	46 Tauri	+ 18.7	+ 34.9	+ 5.2	2.35
9	β GC 2220 <i>np</i>	+ 80.1	+ 180.4	+ 268.6	— 0.99
10	5 Camelopard.	+ 15.0	+ 45.3	+ 34.2	0.98
11	26 Tauri	+ 5.5	+ 45.1	+ 26.7	1.89
12	23 Camelopard.	+ 6.9	+ 59.4	+ 109.7	0.89
13	W Geminorum	— 7.7	+ 59.8	+ 16.6	2.7-3.5
14	12 Lyncis	— 7.3	+ 26.33	+ 45.4	1.6
15	δ Geminorum <i>b</i>	— 5.7	+ 16.9	+ 7.2	2.11
16	δ Geminorum <i>f</i>	— 7.5	+ 22.5	+ 9.7	5.9
17	B 1916	— 7.3	+ 20.9	+ 141.1	0.75
18	4 Puppis	— 17.3	+ 36.5	— 10.3	2.01
19	B 2349	— 10.4	+ 12.3	— 14.6	2.42
20	B 2783	— 31.0	+ 13.8	— 52.5	0.94
21	B 2952	— 9.0	+ 2.3	— 17.3	3.31
22	B. D. + 34° 2264	— 63.7	+ 3.9	+ 42.9	1.69
23	B 3182	— 7.6	— 0.3	+ 36.2	2.27
24	12 Comae	— 24.8	— 1.9	+ 12.2	2.62
25	16 Comae	— 44.2	— 4.3	+ 23.0	1.54
26	83 Virginis	— 52.7	— 9.1	— 15.0	2.01
27	47 Herculis	— 19.8	— 58.8	+ 8.0	1.46
28	θ Scorpii	— 4.0	— 30.2	— 28.4	— 1.06
29	34 Draconis	— 0.2	— 14.0	+ 43.2	2.24
30	Y Sagittarii	+ 2.9	— 42.9	— 14.7	2.1-2.9
31	B 4724	+ 4.7	— 30.7	+ 139.4	0.09
32	B. D. + 12° 3750	+ 58.3	— 236.7	+ 55.2	0.3

Segue: TABELLA I.

N.	*	x	y	z	M
33	ρ Sagittarii	+ 5.9	— 17.3	— 5.9	2.55
34	γ Aquilae	+ 18.3	— 38.7	+ 7.8	— 0.40
35	B 5190	+ 81.5	— 126.7	+ 71.3	— 1.28
36	DT Cygni	+ 43.8	— 42.9	+ 64.0	1.61
37	B 5	+ 55.5	+ 0.3	+ 112.0	— 0.01
38	22 Andromedae	+ 42.2	+ 0.8	+ 41.9	1.23
39	B 41	+ 69.2	+ 3.5	+ 124.9	0.05
40	32 Andromedae	+ 54.9	+ 8.6	+ 46.3	1.17
41	B 166	+ 103.2	+ 19.2	+ 129.3	0.66
42	ϕ Andromedae	+ 55.0	+ 15.6	+ 23.1	— 0.32
43	40 Cassiopeiae	+ 27.7	+ 11.5	+ 95.4	0.50
44	λ Arietis	+ 9.4	+ 5.0	+ 4.5	4.53
45	49 Cassiopeiae	+ 10.4	+ 5.7	+ 46.1	1.90
46	ε Trianguli	+ 38.6	+ 21.6	+ 28.5	1.84
47	10 Trianguli	+ 46.0	+ 30.2	+ 29.5	1.28
48	ζ Horologii	+ 16.4	+ 13.5	— 30.3	2.41
49	B 699	+ 52.5	+ 52.1	+ 149.3	— 0.28
50	β Persei	+ 16.1	+ 15.9	+ 19.1	0.0—1.2
51	31 Persei	+ 61.5	+ 68.7	+ 61.9	— 0.33
52	B 896	+ 24.7	+ 38.2	+ 89.1	— 0.13
53	β GC 1927 b	+ 24.0	+ 37.3	+ 79.4	0. 5
54	B 914	+ 4.5	+ 21.6	+ 51.9	1.65
55	ν Tauri	+ 16.3	+ 27.6	+ 3.2	1.39
56	B 974	+ 15.5	+ 29.3	+ 44.5	1.42
57	66 Tauri	+ 21.2	+ 44.6	+ 8.0	1.56
58	58 Persei	+ 13.8	+ 33.1	+ 31.3	1.06
59	SZ Tauri	+ 22.4	+ 54.9	+ 19.7	3.2—3.7
60	α Camelopard.	+ 6.6	+ 19.1	+ 45.7	0.88
61	B. 1146	+ 19.6	+ 58.3	+ 56.2	1. 0
62	5 Aurigae	+ 8.6	+ 28.5	+ 24.3	3.05
63	B 1234	+ 22.5	+ 93.5	+ 27.4	0.36
64	B 1268	+ 7.6	+ 36.9	+ 25.3	1.86
65	B 1348	+ 3.6	+ 96.2	+ 135.3	— 0.14

Segue: TABELLA I.

N	*	x	y	z	M
66	2 Lyncis	— 1.2	+ 52.7	+ 42.9	1.12
67	B 1672	— 6.9	+ 54.2	+ 83.8	1.30
68	v3 Canis Maior.	— 12.6	+ 85.4	— 28.4	— 0.15
69	42 Camelopard.	— 3.6	+ 46.7	+ 115.6	— 0.46
70	B.D + 33° 1454	— 24.7	+ 100.9	+ 69.6	1.84
71	B 1816	— 8.3	+ 31.9	— 41.0	1.42
72	B 1830	— 9.1	+ 33.1	— 57.1	1.59
73	B 1961	— 17.4	+ 45.4	— 24.6	1.82
74	82 Geminorum	— 22.1	+ 45.9	+ 22.0	2.51
75	B 2064	— 13.0	+ 26.3	— 13.4	2.77
76	ζ Puppis	— 80.3	+ 163.1	— 83.4	— 3.03
77	B 2291	— 99.6	+ 127.8	— 19.0	— 2.13
78	σ ² Ursae Maior.	— 5.2	+ 5.2	+ 17.7	0.47
79	τ ² Hydrae	— 27.1	+ 21.3	— 0.4	1.80
80	B 2568	— 30.0	+ 24.7	— 33.9	1.76
81	42 Lyncis	— 30.3	+ 22.3	+ 32.6	1.74
82	44 Hydrae	— 84.8	+ 35.4	— 39.4	0.32
83	67 Leonis	— 67.5	+ 17.0	+ 32.8	1.18
84	ω Virginis	— 109.1	+ 12.7	+ 16.6	0.22
85	β Hyadis	— 64.2	+ 3.4	— 42.3	— 0.05
86	14 Comae	— 33.9	— 3.2	+ 17.9	2.20
87	21 Comae	— 56.2	— 6.4	+ 51.5	1.39
88	31 Comae	— 34.5	— 7.2	+ 18.8	2.07
89	B 3478	— 71.4	— 26.0	+ 34.4	1.15
90	B. D. + 33° 2361	— 47.7	— 21.2	+ 34.4	3. 8
91	84 Ursae Maior.	— 47.1	— 22.7	+ 74.3	0.73
92	B. D. + 31° 2605	— 50.9	— 34.3	+ 36.6	2.09
93	B. D. + 8° 2857	— 62.5	— 43.3	+ 11.6	1.29
94	π ¹ Bootis	— 57.2	— 46.3	+ 22.1	0.49
95	B 3759	— 39.5	— 32.8	— 35.6	1.00
96	56 Hydrae	— 22.8	— 19.5	— 14.4	2.79
97	γ Ursae Minoris	— 5.4	— 6.5	+ 26.4	0.90
98	B 4022	— 18.6	— 27.6	+ 48.5	1.94

Segue: TABELLA I.

N.	*	x	y	z	M
99	19 Ursae Minoris	— 13.4	— 26.8	+ 121.4	0.01
100	B 4185	— 24.6	— 54.4	— 109.8	— 0.39
101	ω Ophiuchi	— 10.3	— 31.7	— 13.4	1.72
102	α Triang. Austr.	— 5.1	— 13.5	— 37.3	— 1.12
103	18 Draconis	— 8.5	— 23.6	+ 52.2	1.15
104	B 4270	— 4.1	— 11.7	+ 19.0	3.08
105	B.D. + 56° 1959	— 11.5	— 54.4	+ 83.1	2.9
106	γ Ophiuchi	— 2.4	— 43.1	— 4.6	3.0–3.8
107	28 Aquilae A	+ 18.5	— 56.2	+ 12.4	1.57
108	B 5002	+ 13.2	— 35.9	+ 35.4	1.69
109	σ Aquilae	+ 132.8	— 304.1	+ 30.0	— 2.43
110	δ Sagittae	+ 29.5	— 61.1	+ 22.4	— 0.47
111	B 5081	+ 13.0	— 25.7	— 47.7	1.60
112	B 5167	+ 28.7	— 47.0	+ 20.7	3.44
113	ν Capricorni	+ 25.3	— 38.5	— 10.8	1.44
114	B 5222	+ 34.5	— 50.3	— 56.6	1.08
115	52 Cygni	+ 26.6	— 31.3	+ 24.0	0.94
116	5 Aquarii	+ 73.5	— 82.6	— 11.3	0.25
117	ϕ Capricorni	+ 52.9	— 48.5	— 27.6	0.90
118	B.D. + 65° 1691	+ 175.9	— 10.7	+ 455.5	— 3.78
119	π Pegasi	+ 35.2	— 19.2	+ 25.7	0.98
120	89 Aquarii ϵ^3	+ 24.1	— 5.9	— 10.5	2.79
121	9 Andromedae	+ 52.6	— 10.7	+ 47.1	1.65
122	104 Aquarii	+ 20.4	— 2.2	+ 87.9	2.37

Per quel che riguarda infine la ripartizione dei tipi spettrali, delle grandezze assolute e delle velocità spaziali, la loro statistica mi ha dato i seguenti risultati :

TABELLA II.

Distribuzione dei tipi spettrali nell'« ammasso del Sole ».

	O	B	A	F	G	K	M
1° gruppo	—	2	11	7	8+1	7	1
2° gruppo	1	12	33	13	11	12	4
Intero ammasso	1	14	44	20	19+1	19	5

TABELLA III.

*Distribuzione percentuale dei tipi spettrali
nell'« ammasso del Sole » e nell'intero Sistema Galattico.*

	B	A	F	G	K	M
Ammasso del Sole . .	11.4	35.8	16.2	16.2	15.4	4.0
Sistema Galattico . .	12.3	21.7	20.0	16.1	26.6	3.3

TABELLA IV.

Distribuzione delle grandezze assolute nei diversi tipi spettrali dell'« ammasso ».

Grandezza assoluta	B	A	F	G (*)	K	M
Media	— 0.2	+ 1.3	+ 1.3	+ 1.8	+ 0.3	+ 0.5
Massima	— 3.8	— 0.3	— 1.1	0.1	— 3.0	— 0.5
Minima	1.8	4.5	3.8	3.5	5.9	1.4

(*) Senza il Sole ($M = 4.85$), che sarebbe quindi la stella meno luminosa della classe G.

TABELLA V.

Grandezze assolute e velocità spaziali.

	Media delle velocità	Media delle grandezze assolute	Grandezza assoluta massima	Grandezza assoluta minima
1° Gruppo	3.1	1.1	— 1.3	5.9
2° Gruppo	5.8	0.6	— 3.8	4.5
Intero ammasso	4.4	0.9	— 3.8	5.9

Chimica. — *Sullo spettro di assorbimento del pirrolo, tiofene e furano nel medio ultrarosso*⁽¹⁾. Nota di R. MANZONI-ANSIDEI e M. ROLLA, presentata⁽²⁾ dal Socio M. BETTI.

Precedenti ricerche sullo spettro Raman del tiofene, pirrolo e derivati, messe in relazione cogli spettri ultrarossi del tiofene e pirrolo eseguiti da Coblenz nel 1905⁽³⁾, avevano mostrato alcune caratteristiche non immediatamente interpretabili sulla base delle formule chimiche ordinariamente attribuite alle molecole di questi composti eterociclici.

Ne poteva nascere, come ha mostrato Bonino⁽⁴⁾, una interessante discussione sulla simmetria molecolare di tali composti, discussione che avrebbe in primo luogo sottolineato la necessità di nuove misure di assorbimento nell'ultrarosso atte a riconfermare o meno le misure di Coblenz. Una revisione degli spettri di Coblenz era particolarmente significativa per il pirrolo dato che recenti nostre ricerche⁽⁵⁾ hanno dimostrato come gli spettri Raman del pirrolo possano presentare delle nette divergenze a seconda della provenienza e del metodo di purificazione dei campioni esaminati.

D'altra parte per il furano mancavano fino ad oggi misure di assorbimento nell'ultrarosso tra 2-10 μ e perciò l'esecuzione di misure per tale eterociclo avrebbe potuto permettere l'ulteriore svolgersi della discussione.

Per il tiofene oltre agli spettri u. r. di Coblenz si conoscevano le recenti misure di Bowling Barnes e R. Brattain⁽⁶⁾ le quali però non permettono un ulteriore chiarimento rispetto a quelle di Coblenz già discusse dal Bonino e da uno di noi (Manzoni) in un precedente lavoro.

Le misure da noi riportate in questa Nota sono state eseguite a Parigi nell'Istituto di Ricerche fisiche della Sorbonne diretto dal prof. A. Cotton, sotto la diligente e costante guida del prof. M. J. Lecomte. Teniamo qui a ringraziare vivamente oltre che il prof. Cotton, anche il prof. Lecomte per averci accolto nel suo laboratorio, per averci messo a disposizione i suoi impianti sperimentali e per tutto l'aiuto materiale e per i consigli scientifici di cui ci fu straordinariamente largo e che hanno permesso di giungere ai risultati che pubblichiamo in questa Nota.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Ricerche fisiche della Sorbonne di Parigi.

(2) Nella seduta del 24 aprile 1938.

(3) COBLENTZ, *Investig. of Infrared Spectra*, «Carnegie Inst.», 1905.

(4) BONINO, «Rendiconti R. Acc. Lincei», vol. XXIV, 1936, pp. 288, 374; vol. XXV, 1937, p. 502.

(5) BONINO, MANZONI-ANSIDEI, «Rendiconti R. Acc. Lincei», vol. XV, 1937, p. 489.

(6) BOWLING BARNES, R. BRATTAIN, «J. Chem. Physics», 3, 1935, p. 446.

TABELLA I.

Tabella di massimi di assorbimento U. R. e frequenze Raman in cm^{-1} .

TIOFENE			PIRROLO			FURANO	
Ultrarosso		Effetto Raman	Ultrarosso		Effetto Raman	Ultrarosso Manzoni Rolla	Effetto Raman
Coblentz	Manzoni Rolla		Coblentz	Manzoni Rolla			
—	1420 (f)	—	1418 (ff)	1418 (ff)	1414 ($1\frac{1}{2}$)	1495 (ff)	1484 (8)
1390 (f)	—	1405 (8)	—	—	1380 (6)	1375 (m)	1389 (9)
—	—	1357 (8)	1273 (d)	—	—	—	1357 ($1\frac{1}{2}$)
1240 (ff)	1234 (f)	—	—	—	1235 (o)	—	1279 (o)
—	1136 (m)	1131 (o)	1202 (d)	—	1204 (o?)	1249 (d)	—
1086 (f)	1086 (ff)	1079 (8)	1130 (f)	1149 (d)	1142 (10)	1176 (m)	1169 (o)
1038 (f)	1038 (ff)	1031 (8)	1075 (d)	1069 (f)	1084 ($1\frac{1}{2}$)	—	1139 (10)
901 (dd)	905 (d)	898 (o)	1052 (ff)	—	1046 ($1\frac{1}{2}$)	—	1062 (1)
834 (ff)	831 (f)	832 (10)	—	1026 (f)	—	1052 (f)	—
—	863 (d)	867 ($1\frac{1}{2}$)	1005 (f)	—	1001 (oo)	—	1039 (2)
—	—	749 (2)	972 (dd)	—	—	990 (ff)	991 ($1\frac{1}{2}$)
—	716 (ff)	—	873 (f)	864 (d)	866 (2)	—	874 (1)
—	—	692 (o)	—	826 (d)	835 (1)	864 (f)	—
—	674 (d?)	—	—	728 (ff)	—	—	844 ($1\frac{1}{2}$)
—	653 (d)	—	—	—	708 (2)	740 (ff)	—
—	—	606 (4)	—	647 (m)	649 (1)	—	728 ($1\frac{1}{2}$)
—	—	566 (o)	—	—	574 (o)	648 (d)	—
						601 (ff)	604 ($1\frac{1}{2}$)

Gli apparecchi spettrometrici usati per queste ricerche sono stati ideati e costruiti dal prof. Lecomte e sono descritti in precedenti lavori del Lecomte stesso ⁽¹⁾.

(1) LECOMTE e LAMBERT, « Annales de l'office nat. Combust. Liquides », n. 6, 1931, p. 1081; « Annales de phys. », X, 18, 1932, p. 329; « Comptes-Rendus Académie de Sciences », 189, 1929, p. 155; Id. 196, 1933, p. 1011.

I prodotti erano stati purificati da uno di noi (Manzoni) a Bologna con tutta cura e controllati eseguendone gli spettri Raman che coincidevano con quelli recentemente pubblicati⁽¹⁾.

Una particolare cura fu rivolta alla preparazione e purificazione del pirrolo ottenuto per sintesi.

In questa Nota riferiamo sulle misure eseguite nello spettro ultrarosso tra 600 e 1500 cm^{-1} , in un prossimo lavoro pubblicheremo le ricerche eseguite nello spettro ultrarosso a più breve lunghezza d'onda.

Nella tabella I sono riportati gli spettri di assorbimento ultrarosso di Coblenz e i nostri nonchè gli spettri Raman già da noi pubblicati del tiofene, pirrolo e furano.

DISCUSSIONE DEI RISULTATI.

Non è nostro compito procedere qui ad una discussione profonda dei risultati sperimentali, discussione già iniziata da Bonino⁽²⁾ in precedenti lavori in attesa di nuovi risultati sperimentali per una definitiva conclusione. Osserviamo soltanto che le incongruenze messe in rilievo tra gli spettri ultrarossi e Raman del pirrolo e del tiofene da Bonino sulla base degli spettri ultrarossi di Coblenz continuano a sussistere anche studiando la cosa sulla base di risultati sperimentali ultrarossi ottenuti a Parigi.

Per il tiofene lo spostamento che noi troviamo a 1420 cm^{-1} del massimo trovato da Coblenz a 1390 cm^{-1} , avvalorata l'ipotesi che la forte riga Raman a 1357⁽³⁾ non abbia la corrispondente in assorbimento u. r. per quanto la piccola dispersione in questo tratto costituisca una forte difficoltà. Resta confermato che il forte assorbimento u. r. a 1230-1240 cm^{-1} non trova invece corrispondente nello spettro Raman.

Noi troviamo sempre nel tiofene un forte massimo a 716 cm^{-1} non riportato da Coblenz e che non ha corrispondenza nello spettro Raman dello stesso campione. Tale massimo u. r. è pure confermato dallo spettro di Barnes e Brattain. Viceversa nel nostro spettro mancano i massimi corrispondenti alle righe Raman 1357, 749, 692, 606 cm^{-1} . Complessivamente quindi si avrebbero per il tiofene 4 massimi u. r. che non hanno corrispondenza nello spettro Raman, 4 Raman a cui non corrispondono massimi ultrarossi e cioè in totale 8 frequenze che non si corrispondono fra i due spettri, contro 6 frequenze che invece si corrispondono.

Per il pirrolo le nostre misure confermerebbero l'assenza in u. r. della forte riga Raman a 1380 cm^{-1} e rispettivamente della Raman 1235, 1204,

(1) BONINO, MANZONI-ANSIDEI, « Rendiconti R. Acc. Lincei », vol. XXIV, 1936, p. 207; Id., vol. XV, 1937, p. 489; « La Ricerca scientifica », (II), 7°, 1936, I, nn. 7-8-11-12.

(2) BONINO, loc. cit., nota (4), p. 410.

(3) BONINO, « Rendiconti R. Acc. Lincei », vol. XV, 1937, p. 502.

1046, 708 cm^{-1} mentre mancherebbero in effetto Raman le righe corrispondenti ai massimi u. r. rispettivamente a 1026, 728 cm^{-1} . E cioè nella zona di spettro studiata si conoscono 7 frequenze che non trovano corrispondenza nei due spettri, contro 6 frequenze che trovano invece corrispondenza.

I rilievi fatti da Bonino ⁽¹⁾ in recenti lavori sarebbero perciò completamente confermati.

Anche gli spettri del furano presentano un comportamento analogo. Mancano sicuramente in assorbimento u. r. le frequenze che si hanno in Raman a 1357, 1279, 1139, 728 cm^{-1} ; non trovano invece corrispondenza in effetto Raman i massimi u. r. a 1249, 740, 648 cm^{-1} . Cioè abbiamo anche qui 7 frequenze che non si corrispondono nei 2 spettri contro 5 frequenze che trovano certa corrispondenza mentre altre 4 frequenze Raman trovano solo una dubbia corrispondenza negli spettri u. r.

In un prossimo lavoro riporteremo gli spettri u. r. eseguiti su questi eterocicli nella zona a più breve lunghezza d'onda. Frattanto resterebbe sempre del più alto interesse, come ha rilevato Bonino, la conoscenza degli spettri u. r. allo stato di vapore, ricerche alle quali speriamo di poterci presto dedicare.

Nel chiudere questo lavoro teniamo riesprimere la nostra grande riconoscenza al prof. J. Lecomte.

Uno di noi (Manzoni) porge i più vivi ringraziamenti a S. E. il professore Nicola Parravano, il quale assegnandogli una Borsa sui Fondi Morselli gli ha permesso di recarsi a Parigi per l'esecuzione di queste ricerche.

Il secondo di noi (Rolla) si è recato a Parigi con l'aiuto di una Borsa Toso-Montanari per la quale è riconoscente alla Fondazione omonima Bolognese.

(1) BONINO, loc. cit., nota (3), p. 412.

Fisiologia (Chimica biologica). — *Tiroxinizzazione e beriberi sperimentale*⁽¹⁾. Nota di V. CAPRARO, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

In una precedente Nota⁽³⁾ abbiamo esposto i risultati di ricerche indirizzate a stabilire, se la somministrazione di tiroide provocasse in colombi normali adulti modificazioni del quoziente beriberico (Q_b), che, come abbiamo in quell'occasione fatto rilevare, riflettono — secondo G. Amantea — il grado di usura, più o meno rilevante, della riserva di vitamina B^1 , per una stessa quantità di materiali nutritizi metabolizzati.

Tali ricerche ci indussero a concludere, che, per effetto della tiroidizzazione, il Q_b non subisce sensibili variazioni nei casi, in cui la quantità di tiroide secca somministrata è stata di gr. 0,10–0,15 per giorno; mentre nei casi in cui la quantità di tiroide somministrata è stata di gr. 0,20–0,30 per giorno, si è notato un evidente aumento del Q_b . Rimaneva però sempre il dubbio, se quest'ultimo risultato fosse l'effetto degli ormoni tiroidei, o invece si dovesse ascrivere alla eventuale presenza di una certa quantità di vitamina B^1 nella tiroide stessa somministrata.

Per dirimere la questione abbiamo utilizzato, invece della tiroide intera, un preparato di tiroxina sintetica. Le esperienze sono state condotte su due colombi adulti, che sono stati esplorati secondo la solita tecnica — per cui rimando alla citata Nota — per l'accertamento del Q_b , dapprima senza tiroxina, e in successive prove con tiroxina, e precisamente somministrando un mg. di tiroxina ogni tre giorni, per via endomuscolare, per tutto il periodo di alimentazione orizanica. L'attività della sostanza è stata evidente, e si è rivelata nei due colombi con una perdita di peso maggiore di quella presentata dagli stessi animali nelle prove di accertamento del Q_b normale, nonchè con il caratteristico spiumaggio, molto evidente già dopo pochi giorni dall'inizio della somministrazione di tiroxina. La quantità di tiroxina somministrata ci era risultata, da accertamenti preliminari, non molto lontana dalla dose, che, in pari condizioni, avrebbe sicuramente dato nel Colombo fenomeni tossici.

Per ciò che concerne i risultati ottenuti, ci limitiamo a dire, che, in tutte le prove eseguite (una sul primo Colombo e due sul secondo), il quoziente beriberico non ha presentato, rispetto al valore normale, spostamenti meritevoli di considerazione. La tiroxina pertanto non sembra influire sull'entità di usura della riserva di vitamina B^1 durante i processi metabolici.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica biologica della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 24 aprile 1938.

(3) V. CAPRARO, *Tiroidizzazione e beriberi sperimentale nel Colombo*. «Rend. Reale Acc. dei Lincei», 1937, vol. XXVI, ser. 6^a, sem. 2^o, fasc. 1–2.

Fisiologia (Chimica biologica). — *Espressione e valutazione del «quoziente beriberico Q_b »* ⁽¹⁾. Nota di V. CAPRARO, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Da numerose ricerche di G. Amantea e allievi ⁽³⁾ è risultato che i colombi normali adulti possono costituirsi di vitamina B^1 una riserva, che, per ciascuno, non oltrepassa mai un determinato limite massimo; e che inoltre, nei medesimi, con riserva iniziale massima di vitamina B^1 , i primi disturbi beriberici, di regola, compaiono solo quando il consumo totale — cioè la somma di alimento effettivamente elaborato, più i materiali attinti ai normali depositi, ed espressi dalla diminuzione del peso corporeo — è divenuto corrispondente ad una determinata percentuale (che in media oscilla dal 70 al 100%) del peso iniziale dell'animale. Cosicché, indicando con C il consumo complessivo e con P il peso iniziale dell'animale, si ha nel rapporto C/P un valore, che l'A. ha indicato con Q_b (quoziente beriberico), che è nel maggior numero dei casi variabile tra 0.7 e 1 per i colombi normali adulti e si presenta per uno stesso animale, a parità di condizioni sperimentali, sempre pressochè costante in prove successive.

Avendo avuto anch'io occasione di occuparmi di questo argomento e di convincermi della giustezza di tali fatti, spesso mi sono chiesto se non fosse possibile dare una espressione e valutazione soddisfacente al quoziente beriberico, il quale è certamente un dato molto utile, perchè permette di rendersi conto delle variazioni quantitative, che può subire la quota di riserva della vitamina B^1 di un determinato animale. Ebbene, per quanto a base del concetto di quoziente beriberico non stiano ancora ricerche esatte di metabolismo, mi sembra tuttavia che esso comporti, anche così come è stato intanto posto, un'adeguata espressione e valutazione matematica. Infatti, se si pongono le tre relazioni seguenti:

$$(1) \quad V_c = k_1 (Pp + Ae)$$

$$(2) \quad V_d = k_2 Pi$$

$$(3) \quad V_d = V_c$$

dove V_c è la vitamina B^1 consumata durante il periodo di alimentazione carenzata, Pp è il peso corporeo perduto durante il periodo di alimenta-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica biologica della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 24 aprile 1938.

(3) G. AMANTEA, *Sul fattore antineuritico B^1 e sul concetto di quoziente beriberico (Q_b)*. «Rendiconti R. Acc. Lincei», 1933, vol. XVIII, ser. 6^a, sem. 2^o, fasc. 7, 8.

zione carenzata, Ae è l'alimento effettivamente elaborato in questo periodo, Vd è la quantità di vitamina messa a disposizione per i bisogni dell'animale, che si suppone eguale a Vc (perchè, come è stato dimostrato da G. Amantea e collab. tutta la vitamina disponibile viene consumata nel metabolismo e nemmeno una parte viene eliminata come tale attraverso gli emuntori), da esse si ricava:

$$k_1 (Pp + Ae) = k_2 Pi$$

donde:

$$(4) \quad \frac{Pp + Ae}{Pi} = \frac{k_2}{k_1}$$

che non è altro che la definizione di quoziente beriberico.

Supponendo, ora, il Q_b un dato esatto, e considerando che la relazione (1), in quanto esprime il fatto che la vitamina B^1 si usura in misura ben definita e proporzionale alla entità complessiva del consumo di alimenti (o di materiali di riserva), è stata già sostenuta su base sperimentale da G. Amantea⁽¹⁾ e da altri altri autori⁽²⁾, ne consegue che viene anche dimostrata la relazione (2); in questa e nella equazione (1) il quoziente beriberico trova una chiara interpretazione biologica.

Nella impostazione del problema ho messo a bella posta Vd , cioè la vitamina effettivamente disponibile per i bisogni dell'animale e non la totalità della vitamina presente nell'animale, poichè è noto, che non tutta la vitamina presente si trova consumata allo scoppio dei disturbi, e non sappiamo se fra le due grandezze vi sia una qualche relazione.

Proseguendo in questa discussione è logico ammettere, che la k_1 non vari da individuo ad individuo, perchè esprime la modalità di consumo della vitamina nel metabolismo; ne segue, che deve necessariamente variare la k_2 , perchè il Q_b è variabile da individuo ad individuo. Quest'ultima costante può allora chiamarsi coefficiente di accumulo di vitamina B^1 disponibile, e diventa proporzionale al Q_b secondo la formula:

$$k_2 = k_1 Q_b.$$

Se poi si considerano colombi dello stesso peso iniziale, questa stessa relazione ci esprime il poterè relativo di accumulo di un determinato individuo. Esemplicando, se in un Colombo Q_b è uguale ad a , ed in un secondo Q_b è eguale a $2a$, in quest'ultimo il potere di accumulo di vitamina B^1 è doppio che nel primo.

Si può porre il caso, che l'alimento somministrato all'animale non sia del tutto mancante di vitamina B^1 , ma ne contenga in una determinata pro-

(1) G. AMANTEA, *Ricerche sperimentali sul cosiddetto beriberi dei colombi*. « Riv. di Biol. », 1922, vol. IV, p. 662.

(2) Citati da M. MITOLO, *Vitamine*, 1937, Torino.

porzione, benchè sempre insufficiente ai bisogni dell'animale; allora la relazione (2) si deve modificare in:

$$Vd = k_2 Pi + k_3 Ae$$

e da essa e dalla (1) si ricava:

$$k_1 (Pp + Ae) = k_2 Pi + k_3 Ae$$

e svolgendo ulteriormente questa equazione si ottiene:

$$\frac{Pp + Ae}{Pi} = \frac{k_2}{k_1} + \frac{k_3}{k_1} \frac{Ae}{Pi}$$

e mettendo:

$$\frac{k_3}{k_1} = K$$

si ottiene:

$$(5) \quad \frac{Pp + Ae}{Pi} = Q_b + K \frac{Ae}{Pi}$$

Cioè in questo caso il Q_b , corrispondente ad una dieta avitaminica, va aumentato di una quantità, che è espressa da KAe/Pi , e che, siccome k_1 è costante in tutti gli individui, restando lo stesso peso iniziale e alimento metabolizzato, diventa proporzionale a k_3 , cioè alla percentuale di vitamina aggiunta all'alimento.

Poc'anzi abbiamo detto, che valeva la relazione (1):

$$Vc = k_1 (Pp + Ae)$$

chè significa, che la vitamina B^1 si consuma in una determinata proporzione costante con le sostanze metabolizzate, indipendentemente dalla loro natura. Ma da quanto risulta dalle nostre attuali conoscenze pare sicuro invece, che la vitamina si consumi in proporzione diversa nei diversi metabolismi (protidico, lipidico, glucidico). Allora, trascurando il metabolismo protidico, perchè può essere anche sperimentalmente ridotto ad un minimo trascurabile, e introducendolo idealmente nel metabolismo o dei lipidi o dei glicidi per ridurre ancor più l'errore, la equazione (1) dovrebbe essere così modificata:

$$(6) \quad Vc = k'_1 Gre + k''_1 Gle$$

dove Gre rappresenta la quantità di lipidi metabolizzata dall'animale, e Gle la quantità di glucidi metabolizzata dall'animale; e la (4) diventerebbe:

$$\frac{Gle}{Pi} = \frac{k_2}{k''_1} + \frac{k'_1}{k''_1} \frac{Gre}{Pi}$$

che mettendo:

$$\frac{k_2}{k_1''} = K'$$

si può scrivere:

$$(7) \quad \frac{Gle}{Pi} = K' - \frac{k_1'}{k_1''} \frac{Gre}{Pi}.$$

Non dovrebbe essere difficile verificare sperimentalmente con una certa esattezza questa relazione. Tale verifica sarebbe naturalmente la conferma delle premesse, da cui si è ricavata la (7).

Nella equazione (7) è inoltre contenuto un rapporto (k_1'/k_1''), che è molto interessante, perchè ci indica il rapporto tra il fattore di proporzionalità nel consumo della vitamina B¹ nel metabolismo dei grassi e il fattore di proporzionalità nel consumo della vitamina B¹ nel catabolismo dei glicidi. Ad esso si può pervenire conoscendo K', che si potrebbe facilmente calcolare in un colombo, che metabolizzasse in grande prevalenza glicidi; in tal modo infatti:

$$Gre = 0$$

e:

$$K' = \frac{Gle}{Pi}.$$

È inutile dire, che molte altre considerazioni di questo genere si potrebbero fare sull'argomento, ma mi basta aver esposto brevemente queste poche idee per mostrare a quali interpretazioni e a quali sviluppi potrebbe dar luogo lo studio sperimentale e la deduzione logica della nozione, che va sotto il nome di quoziente beriberico.

Fisiologia (Chimica biologica). — *Castrazione e beriberi sperimentale nei colombi*⁽¹⁾. Nota di V. CAPRARO, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

In una precedente Nota⁽³⁾ abbiamo detto, che era nostro intendimento di accertare, se il valore del quoziente beriberico rimaneva o non immutato facendo intervenire, ad arte, nel corso delle esperienze, fattori esogeni od endogeni, capaci di modificare la normale entità del metabolismo dell'animale in esperimento, ed abbiamo già esposto le nostre prime esperienze, indirizzate ad indagare l'azione della tiroidizzazione sul quoziente beriberico nei colombi normali adulti.

Sempre rimanendo nello stesso ordine di idee, ci siamo pure preoccupati di esplorare l'effetto della castrazione; e appunto i primi risultati di queste altre esperienze riportiamo in questa nota.

Per quanto riguarda la nozione di quoziente beriberico ricordiamo ancora, che da numerose esperienze di G. Amantea ed allievi⁽⁴⁾ è risultato che, in colombi normali adulti, con riserva iniziale massima di vitamina B₁, i primi disturbi beriberici di regola compaiono solo quando il consumo totale — cioè la somma di alimento effettivamente elaborato, più i materiali attinti dai normali depositi, ed espressi dalla diminuzione di peso corporeo —, è divenuto corrispondente ad una determinata percentuale del peso iniziale dell'animale. Cosicchè, indicando con C il consumo complessivo e con P il peso iniziale dell'animale, si ha nel rapporto C/P un valore, che è variabile in media tra 0,7 e 1 per colombi normali adulti, e si presenta per uno stesso animale, a parità di condizioni sperimentali, sempre pressochè costante in prove successive; è appunto questo valore che G. Amantea ha chiamato quoziente beriberico (Q_b).

È ovvio, da quanto abbiamo premesso, che una diminuzione od un aumento del quoziente beriberico, in seguito all'azione di un determinato fattore, stia ad indicare, rispettivamente, un'usura più o meno rilevante e rapida della riserva di vitamina B₁ per una stessa quantità di materiali nutritivi metabolizzati, a meno che lo stesso fattore, non valga in qualche modo ad elevare la capacità di accumulo di vitamina negli animali in esperimento. Risulta in ogni modo da tutto questo l'interesse di accertare, come ci siamo

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica biologica della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 24 aprile 1938.

(3) V. CAPRARO, *Tiroidizzazione e beriberi sperimentale nel Colombo*. «Rendiconti R. Acc. Lincei», 1937, vol. XXVI, ser. 6^a, 2° sem., fasc. 1-2.

(4) G. AMANTEA, *Sul fattore antineuritico B₁ e sul concetto di quoziente beriberico (Q_b)*. «Rendiconti R. Acc. Lincei», 1933, vol. XVIII, ser. 6^a, 2° sem., fasc. 7-8; Id., *La determinazione del «quoziente beri-berico» (Q_b)*, ibidem, vol. XVIII, ser. 6^a, 2° sem., fasc. 9.

proposti di fare, il valore del quoziente beriberico facendo intervenire la castrazione, che, come è noto, esercita un'influenza notevole sull'organismo in generale e sul metabolismo in particolare.

Queste esperienze, come è facile immaginare, si debbono protrarre per lungo tempo. Vogliamo intanto qui riferire i risultati ottenuti nelle prove finora espletate su tre colombi adulti.

Secondo quanto esige la tecnica per l'accertamento del quoziente beriberico — ampiamente descritta da G. Amantea nella surricordata nota — abbiamo prima accertato il quoziente beriberico normale, e poi il quoziente beriberico a varia distanza di tempo dalla castrazione.

Un primo Colombo del peso iniziale di gr. 400, che aveva dato come valore normale del Q_b 0,79 viene castrato nel settembre del 1936; la castrazione riesce completa e il comportamento fisiologico ulteriore è da castrato. Nel febbraio del 1937 si fa una prima prova di accertamento del Q_b , che dà un valore di 0,81 (peso iniziale gr. 490); nel maggio dello stesso anno si ripete la prova e si ottiene un valore di 0,98 (peso iniziale gr. 460); infine nel marzo del 1938 si fa una nuova esplorazione, e si ottiene 0,60 (peso iniziale gr. 470).

Un secondo Colombo offre un analogo comportamento: il Q_b normale in prove successive è di 0,78, 0,89 (peso iniziale medio gr. 450). Si castra nel settembre del 1936 e la castrazione riesce completa; così pure il comportamento fisiologico ulteriore è da castrato. Una prima prova fatta dopo la castrazione, nel febbraio 1937, ha dato un valore di 1,06 (peso iniziale gr. 490), e una seconda prova eseguita nel maggio dello stesso anno ha dato un valore di 1,22 (peso iniziale gr. 460); infine una terza prova fatta nel marzo 1938 ha dato un valore di 0,81 (peso iniziale gr. 470).

Un terzo Colombo offre pure un comportamento simile. Il suo Q_b normale è di 0,77 (peso iniziale gr. 560). Viene castrato nel settembre 1936; la castrazione non riesce completa, ma il comportamento è da castrato. Il Q_b dopo la castrazione, accertato in due prove fatte rispettivamente in febbraio ed in maggio 1937, ha dato come valori 0,89 (peso iniziale gr. 515), e 1,07 (peso iniziale gr. 550).

Come si vede, in questi tre colombi, a distanza di 5-7 mesi dalla castrazione, si è avuto un aumento evidente del Q_b , mentre, a distanza di un anno e mezzo circa, nei due primi, in cui si è potuto determinare, esso è pressochè ritornato al valore che aveva prima della castrazione. Da ciò si dovrebbe arguire, che nei castrati, almeno in un primo tempo, o la riserva vitaminica iniziale è aumentata al di sopra del normale per un maggior potere di accumulo, o l'usura della vitamina B¹ avviene più limitatamente che negli animali non castrati, o si verificano entrambi i fatti insieme.

Comunque riconosciamo che, prima di poter trarre conclusioni impegnative, occorreranno altre esperienze.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 1° maggio 1938 - Anno XVI

Presidenza del prof. F. MILLOSEVICH

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Astronomia. — *Risultati tratti dallo studio delle variazioni di latitudine negli anni 1936 e 1937.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. L. CARNERA.

Ho pubblicato lo scorso anno nelle « Astronomische Nachrichten » (num. 6290) i risultati delle osservazioni fatte nel 1936 nelle stazioni astronomiche di latitudine, ed in questi giorni ho conchiuso l'analogo lavoro per il decorso anno 1937, che mi riservo render pubblico con tutti i dettagli nello stesso periodico. Credo però non privo di interesse esporre in questa sede alcuni risultati e considerazioni tratte da essi. Devo premettere anzitutto che per ovvie ragioni, dovendo il lavoro nostro costituire la continuazione di quelli eseguiti da quasi quaranti anni prima dai geodeti tedeschi di Potsdam prof. Albrecht e Wanach, e poi in Giappone dal prof. Kimura, era indispensabile dare alla trattazione un carattere ed indirizzo tale da conservare tutta l'omogeneità di fronte ai precedenti risultati, e rendere così possibile lo studio continuativo dei fenomeni. Per questa ragione sia per il 1936, che per il 1937 seguii esattamente i criteri del Kimura, che mi aveva preceduto nell'incarico, e dalle latitudini osservate nelle cinque stazioni boreali (Mizusawa, Kitab, Karloforte, Gaithersburg, ed Ukiab) ricavai le coordinate istantanee x ed y del Polo, le correzioni $\Delta\delta$, delle declinazioni medie di ciascun gruppo, e le costanti atte ad esprimere la parte pe-

(1) Presentata nella seduta del 1° maggio 1938.

riodica del movimento proprio di ciascuna stazione, che entrano nel termine « z » di Kimura. Ma non completamente soddisfatto di quei risultati, che pur si accordano bene con quelli degli anni precedenti, e convinto che non piccola influenza debbano avere sulle discordanze residue l'inomogeneità di precisione dovuta al fenomeno stagionale, che toglie ad alcune stazioni nei mesi invernali la possibilità di compiere un numero sufficientemente alto di osservazioni, volli tentare la deduzione della polodia utilizzando oltre ai risultati delle stazioni boreali, anche quelli delle due australi di La Plata e di Adelaide. Il risultato del primo anno fu favorevole, e ciò mi indusse a seguitare, senza che avessi a pentirmi del lavoro. Paragonando infatti fra di loro i risultati tratti con i due procedimenti ho trovato che col secondo procedimento:

I. L'andamento generale della traiettoria del Polo appare molto più regolare, e con linea a carattere più continuo (vedi le due figure, la prima delle quali rappresenta la polodia quale risulta dalle sole cinque stazioni boreali, e la seconda il risultato dalle osservazioni delle sette).

II. È sensibilmente migliore l'accordo fra le coordinate x ed y del Polo tratte rispettivamente dalle osservazioni dei gruppi serali e di quelle dedotte dai gruppi del mattino (vedi tabella numerica I, che contiene le differenze $x_s - x_m = \Delta_x$ ed $y_s - y_m = \Delta_y$).

III. Migliorato appare pure l'accordo fra i valori tratti nei due anni per le correzioni $\Delta\delta$ delle declinazioni medie di ciascun gruppo (vedi tabella numerica II).

IV. Sembrano diminuiti in valore assoluto i coefficienti costanti dei termini esprimenti i movimenti locali di carattere periodico, e di conseguenza diminuita l'ampiezza di quei movimenti (vedi tabella III).

Questi fatti mi hanno portato allora a tentare di fissare, almeno con una certa approssimazione, quale potesse essere il limite di attendibilità generale dei risultati. Partendo dall'ipotesi, che il valore dell'error medio del valore di una latitudine, ricavata dall'osservazione di una coppia di stelle sia $\pm 0''.3$, valore che ho ragione credere piuttosto inferiore, che superiore al vero, e ciò in base agli scarti che presentano tali valori, dovrebbe risultare, che l'error medio di una correzione $\Delta\delta$ delle declinazioni, ricavata su per giù da 600 osservazioni di coppie dovrebbe aggirarsi sul valore $\pm 0''.013$, e conseguentemente le differenze dei valori tratti dai due anni, avere un valore medio di $\pm 0''.018$. Se a questa quantità noi aggiungiamo ancora la parte dovuta alle incertezze ed errori contenuti nei moti propri ammessi, non si dovrebbe scostarsi molto dal $\pm 0''.026$, che quelle differenze effetti-

vamente presentano, onde ben si può ritenere che l'ipotesi fatta sulla grandezza dell'errore di una osservazione corrisponda al vero. Ma allora tenendo conto, che il numero delle coppie di ciascun gruppo osservate nei singoli mesi nelle diverse stazioni oscilla fra 40 e 100, e talvolta si scende anche sotto le 40, appare chiaro che i valori delle latitudini conchiuse sono affetti da incertezze di un ordine, che è dell'ordine stesso di quelle variazioni periodiche di carattere locale, che si vorrebbero determinare. Sembra quindi non infondata la scarsa fiducia, che ebbero a manifestare alcuni astronomi su tali termini. Questi dubbi mi hanno fatto ritornare allora all'origine. Le osservazioni, che oggi si fanno, sono ancora quelle che vennero ideate ed organizzate, dopo aver studiato espressamente gli strumenti, per indagare un fenomeno che si riteneva semplice, e dell'ordine di grandezza di qualche decimo di secondo; se ora esse sono risultate in realtà esuberatamente sufficienti a quello scopo, da aver anzi fatto percepire l'esistenza di altri fenomeni allora non sospettati, non risultano però essere adeguate anche al compito nuovo, di determinare cioè quantitativamente fenomeni il cui ordine di grandezza è un decimo circa di quello per il quale sono state ideate. Cannocchiali di appena 130 centimetri di distanza focale, quali sono i zenitali usati nelle stazioni, non possono permettere di vedere i centesimi di secondo d'arco, e quando una quantità non la si vede, neppure la si misura! In questa materiale insufficienza si deve cercare dunque l'origine e la ragione prima del vano ed inutile affacciarsi a tentar di svelare leggi, che sempre sfuggono, perchè qualsiasi elaborazione di osservazioni insufficienti, anche se fatte nel modo più diligente, non può che portare a risultati necessariamente insufficienti. Una via rimane aperta: se si vuole affrontare il problema della determinazione dei movimenti locali di carattere periodico e studiare in genere i piccoli movimenti, bisogna adottare nuovi strumenti, atti ad osservazioni e determinazioni di un grado più elevato di precisione.

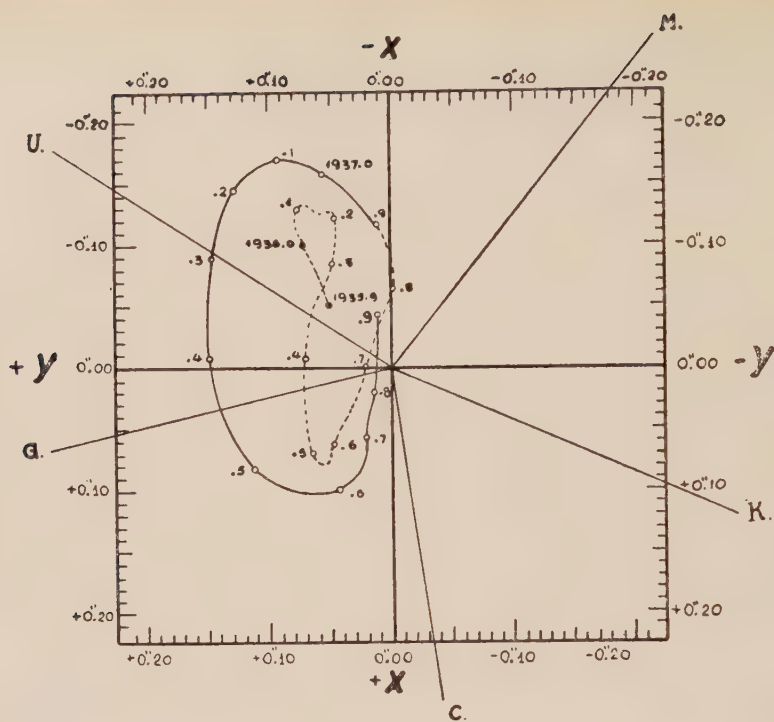


Fig. 1.

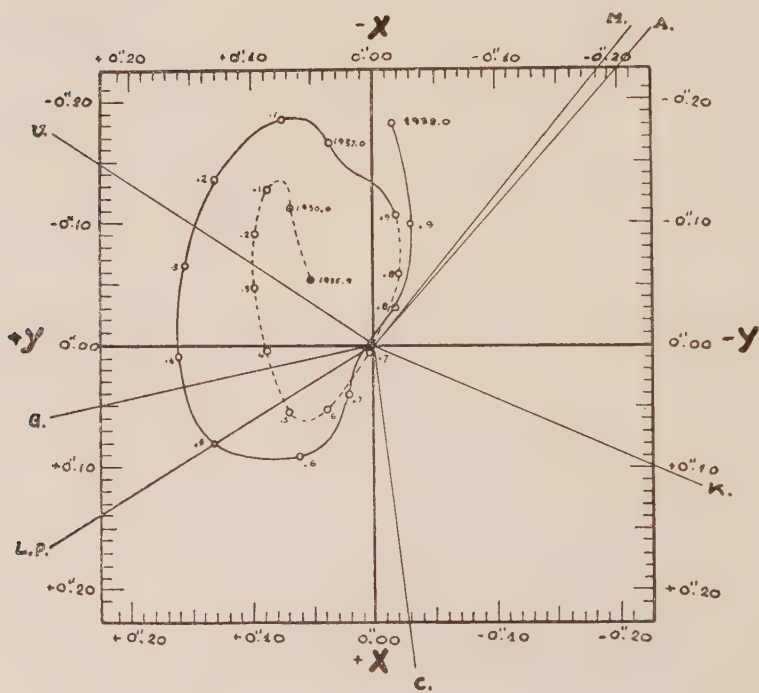


Fig. 2.

TABELLA I.

Differenze delle coordinate x ed y ricavate dalle osservazioni dei gruppi della sera e del mattino.

1936	Δ_x		Δ_y		1937	Δ_x		Δ_y	
.06	— ".132	— ".058	— ".021	+ ".041	.06	— ".005	— ".003	+ ".028	+ ".026
.14	— .019	— .001	+ .064	— .036	.14	+ .031	+ .032	— .010	— .016
.22	+ .039	+ .023	+ .035	+ .024	.22	— .016	— .025	+ .020	+ .013
.31	— .112	— .038	+ .037	— .017	.30	— .021	— .028	+ .017	+ .016
.39	+ .058	+ .065	+ .031	— .021	.39	— .004	— .013	— .016	— .016
.48	— .040	— .009	+ .007	+ .002	.48	— .006	— .010	+ .016	+ .009
.56	+ .007	+ .017	+ .001	— .020	.55	— .001	+ .005	+ .010	— .001
.64	— .036	— .033	+ .007	— .020	.64	+ .034	+ .031	+ .017	+ .016
.72	— .025	+ .025	— .013	+ .002	.72	— .024	+ .015	— .058	— .026
.81	— .056	.000	— .024	+ .022	.81	— .008	— .047	+ .086	+ .062
.89	+ .019	+ .006	— .024	— .040	.89	+ .053	+ .022	— .025	— .043
.97	+ .077	+ .038	+ .015	+ .007	.97	— .058	— .000	— .039	— .043

I valori che compaiono nella prima colonna di ciascun gruppo sono quelli, che risultano dalla discussione delle osservazioni delle sole stazioni boreali, mentre i secondi derivano dalla discussione dei valori di tutte.

TABELLA II.

Correzioni delle declinazioni medie dei singoli gruppi osservati nelle stazioni boreali.

Gruppo	1936	1937	36-37	1936	1937	36-37
IV	+ 0".072	+ 0".076	— 0".004	+ ".0101	+ 0".093	+ 0".008
V	— .096	— .103	+ .007	— .088	— .102	+ .014
VI	+ .090	+ .037	+ .053	+ .081	+ .042	+ .039
VII	+ .032	— .020	+ .052	+ .015	— .015	+ .030
VIII	— .051	— .090	+ .039	— .076	— .086	+ .010
IX	— .183	— .204	+ .021	— .202	— .211	+ .009
X	— .093	— .107	+ .014	— .109	— .105	— .004
XI	+ .057	+ .029	+ .028	+ .050	+ .042	+ .008
XII	+ .079	+ .072	+ .007	+ .086	+ .084	+ .002
I	+ .127	+ .085	+ .012	+ .129	+ .093	+ .036
II	— .101	— .120	+ .019	— .079	— .116	+ .037
III	+ .154	+ .125	+ .029	+ .163	+ .121	+ .042

I valori del primo gruppo di colonne sono derivati dalla discussione delle sole stazioni boreali, quelli del secondo dalla analoga discussione di tutte le stazioni boreali ed australi.

TABELLA III.

Valori dei termini locali.

	Differenza costante fra osservazioni serali e mattutine		Coefficiente del termine periodico	
	1936		1936	
Mizusawa	— 0".034	— 0".014	+ 0".065	+ 0".021
Kitab	— .031	+ .003	+ .080	+ .024
Carloforte	— .014	+ .003	+ .035	+ .034
Gaithersburg	— .030	— .021	+ .038	+ .012
Ukiah	— .006	— .016	+ .030	+ .015
	1937		1937	
Mizusawa	— .015	— .019	+ .053	+ .036
Kitab	— .006	— .005	+ .057	+ .043
Carloforte	+ .006	+ .010	+ .033	+ .037
Gaithersburg	— .036	— .033	+ .056	+ .063
Ukiah	— .010	— .010	+ .023	+ .022

Le seconde serie di valori si riferiscono alla deduzione tratta da tutte le stazioni, mentre le prime derivano dalle sole boreali.

Fisica. — *Sul magnetometro di Rogowski.* Nota⁽¹⁾ del
Corrisp. G. GIORGI.

Risale, se non erro, a Rogowski la proposta di misurare la forza magnetomotrice M agente lungo una linea PQ in questo modo: si costruisce un solenoide flessibile di sezione piccolissima, e si dispone il suo asse lungo la linea proposta: se la linea deve traversare sostanze magnetiche materiali, si pratica in esse un tunnel di diametro piccolissimo lungo il percorso assegnato; si misura poi l'impulsione elettromotrice che viene indotta nel solenoide quando tutto il campo magnetico viene rovesciato di segno: questa impulsione riesce proporzionale alla M di cui si cerca il valore. S'intende che la perforazione del tunnel è teorica; in pratica, i materiali magnetici con cui si ha da fare non sono percorsi da correnti (macroscopicamente) attraverso la loro massa; e quindi in generale si può operare lungo una linea che colleghi gli stessi estremi e si sviluppi nell'aria.

Questo procedimento, in mano a un abile sperimentatore, dà risultati abbastanza buoni, s'intende entro quei limiti d'approssimazione a cui possono aspirare le misure magnetiche; e viene ora applicato assai di frequente nella pratica⁽²⁾.

Altri autori, Kupfmüller, Bottani, Rimini ecc., sono andati al di là, e si sono appoggiati anche concettualmente a quel procedimento per *definire* le forze magnetomotrici. Si presenta la domanda se questa definizione sia del tutto corretta, cioè se corrisponda a quella nozione di f. m. m. che facciamo figurare nelle equazioni e sulla quale intrinsecamente siamo tutti d'accordo. La questione ha per me un interesse particolare, perchè i trattatisti che ho ricordato sono i continuatori dei miei metodi di trattazione, e la loro definizione viene ad essere una variante ai metodi medesimi.

Qual'è la definizione prima, teoretica, di forza magnetomotrice, con cui confrontare le altre? Non penso ora a definire M come integrale di linea della forza magnetica \mathbf{H} , perchè la questione si presenta allora riguardo ad \mathbf{H} . La migliore definizione diretta credo che sia quella energetica. Cioè, premesse le nozioni di flusso magnetico Φ e di induzione magnetica \mathbf{B} , ricavate per via elettromagnetica, e considerato un tubo di flusso avente per

(1) Presentata nella seduta del 10° maggio 1938.

(2) Con vocabolo, che non esito a chiamare barbaro, l'apparecchio descritto è stato chiamato *tensionometro*: sarà preferibile dire *magnetometro di tensione*, o *magnetometro di Rogowski*, o almeno *tensionometro*.

asse la linea PQ lungo cui si vuol conoscere M , sia δw il lavoro elementare che occorre compiere per incrementare il flusso della quantità $\delta \Phi$. Scrivendo

$$\delta w = M \delta \Phi$$

rimane definita M ; ed è poi più facile da M ricavare \mathbf{H} , che non viceversa.

In realtà, ciò che noi misuriamo col magnetometro Rogowski è una somma di flussi; cioè, ritenuta costante la sezione del solenoide, e prescindendo da un fattore, si misura il valore di

$$\int_P^Q B_s ds.$$

Se il solenoide s'immagina riempito di una sostanza con permeabilità invariabile, il risultato è proporzionale a

$$\int H_s ds,$$

quindi alla vera f. m. m. In pratica, l'interno sarà vuoto, quindi come μ si ha il μ_0 dello spazio-etero. Resterebbe, come fattore costante, il prodotto della sezione σ per l'incognita μ_0 . Ma l'apparecchio si può tarare portandolo in un campo generato da correnti conosciute; ed è ciò che lo sperimentatore fa effettivamente. Allora si ha il risultato in amp-spire.

Non è una misura diretta. Non la direi nemmeno paragonabile alla misura di una differenza di potenziale elettrico fatta con un voltmetro a magnete permanente, bobina mobile e resistenza addizionale. È maggiormente indiretta di questa, perchè fa assegnamento sull'invariabilità di μ_0 ; e questa invariabilità non può nemmeno essere definita se all'uso del magnetometro Rogowski si fa appello nelle definizioni magnetiche.

Qualora, idealmente, potessimo immaginare una sostanza con μ costante, col quale riempire il solenoide (ed è questo, se ben ricordo, il concetto del «solenoide cieco» del prof. Puccianti), allora la definizione di forza magnetomotrice data mediante l'apparecchio Rogowski sarebbe valida senza limite. Ma questa sostanza, che si sostituisca alle funzioni dello spazio-etero, non esiste e non è concepibile. In un campo, come quello che ci fa conoscere la fisica relativista, ove le proprietà dello spazio-etero, fra cui il μ_0 , sono variabili da punto a punto e da istante a istante, in dipendenza della curvatura dello spazio-tempo, il magnetometro di Rogowski non si applica. Tutt'al più potrebbe applicarsi per confrontare le permeabilità in due regioni dello spazio, sufficientemente estese, in ciascuna delle quali essa permeabilità fosse uniforme, e costante, o lentamente variabile, nel tempo.

Quindi, teoricamente, e a scopo di definizione prima, questo procedimento del solenoide dovrebbe essere evitato. Ma la critica fatta non ne diminuisce il valore come procedimento pratico di misura.

Geologia. — *Interpretazione geochimica delle formazioni quaternarie di Grotta Romanelli (Terra d'Otranto). — II. I complessi colloidali.* Nota del Socio G. A. BLANC (in collaborazione col dott. T. MANTOVANI).

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Determinazione microchimica dell'azoto solubile totale e delle frazioni ureica ed aminica (azotemia totale, ureoazotemia ed aminoazotemia) nel sangue.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. S. BAGLIONI.

Uno dei problemi scientifici e pratici che va assumendo nel campo della fisiologia umana, normale e patologica, importanza e diffusione sempre maggiore, è quello connesso colla determinazione chimica delle sostanze azotate solubili e delle loro diverse frazioni nel sangue.

Nel laboratorio dell'Istituto di Fisiologia umana della R. Università di Roma da anni ci stiamo occupando del problema studiato in varie condizioni fisiologiche. Abbiamo cercato di elaborare un metodo che anche nei minimi dettagli potesse offrire ogni possibile garanzia di esattezza. Dopo ripetuti tentativi, superando non poche difficoltà tecniche, colla intelligente e indefessa collaborazione della dott.ssa Clara Pozzi, siamo riusciti a realizzare un metodo che ci sembra adeguato allo scopo.

Essenzialmente esso si basa sui principi del metodo di Ivar BANG, descritto da DURUPT ⁽²⁾, al quale abbiamo apportate alcune modificazioni che la ripetuta esecuzione della ricerca ci ha insegnato indispensabili per ottenere i migliori risultati. Tali modificazioni riguardano precisamente la determinazione fatta in via volumetrica, invece che colla pesata, dei campioni di sangue prelevato, alcuni particolari del processo di ossidazione, di distillazione e di titolazione dei microkjeldahl, come risultano dalla descrizione dettagliata del metodo.

I. *Prelievo del campione di sangue.* — Mediante una lancetta di FRANCK, sterilizzata, si punge il polpastrello di un dito (previa disinfezione con batuffolo di ovatta imbevuto di alcool), in modo che spicci spontaneamente una grossa goccia di sangue, della quale con una micropipetta tarata si aspira cc 0,1, che si fa immediatamente assorbire da una cartina di carta bibula di BANG (Ditta C. S. Schleicher et Schüll, Düren, N. 553) di 15/16 mm. Tali cartine, prima del loro uso, si fanno bollire con acqua bidistillata, fin-

(1) Presentata nella seduta del 1° maggio 1938.

(2) DURUPT, *Micromethodes et semi-micromethodes appliquées aux analyses chimiques du sang et des humeurs*, 2. édition, 1930, A. Poinat, Paris.

chè l'acqua di lavaggio esca limpida ed incolora; si asciugano all'aria, a debole calore, o meglio spontaneamente, e si conservano in un recipiente in essiccatore ad acido solforico.

Le cartine che hanno assorbito il sangue si fanno asciugare all'aria, appendendole su adatti uncini di vetro affidati ad un sostegno (fig. 1). Il prosciugamento esige in media 15-20 min. primi.

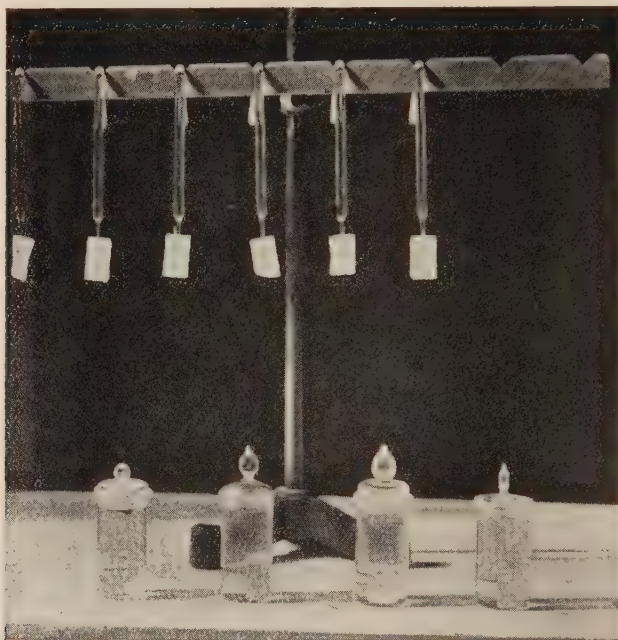


Fig. 1. — Disseccamento dei campioni ed estrazione delle trazioni.

II. *Separazione delle diverse frazioni azotate.* — Le cartine asciutte mediante pinze metalliche si introducono in speciali pesafiltri di vetro pyrex, muniti di adatto beccuccio, per evitare nelle successive manovre di travasamento ogni perdita di liquido; vi si versano 10 cc del liquido, che ha la proprietà di estrarre la frazione azotata e di precipitare i protidi.

Per il dosaggio dell'azoto ureico serve una miscela in parti uguali di alcool etilico ed etere solforico puri per analisi; per il dosaggio dell'azoto totale serve la soluzione sproteinizante fosfomolibdica (acido fosfomolibdico cristallizzato, gr. 5, + Na_2SO_4 gr. 5, + H_2SO_4 , gr. 15 + glicosio, gr. 0,25 in 1000 cc. di acqua bidistillata). Le stesse cartine con il sangue dalle quali si è estratto l'N ureico servono per il dosaggio della frazione dell'azoto aminico, che però effettivamente rappresenta l'insieme delle restanti frazioni azotate, detratta quella ureica, insieme a piccola (trascurabile) quantità di N

proveniente dai fosfatidi. Dopo che hanno perduto ogni traccia di odore di alcool e di etere, si pongono in nuovi pesafiltri, ai quali si aggiunge la surricordata soluzione fosfomolibdica.

Dopo un soggiorno di 24 ore si è sicuri che le varie sostanze azotate solubili sono passate nelle diverse soluzioni.

III. *Ossidazione.* — Il contenuto dei pesafiltri si decanta cautamente e quantitativamente in speciali palloncini mikrokjeldahl (fig. 2); vi si aggiungono poi 3 gocce di soluzione di CuSO_4 10 % e 1 cc. di H_2SO_4 p. p. a. Portati quindi su un bagno di sabbia a riscaldamento elettrico, vi si lasciano a calore moderato finchè il liquido, mediante evaporazione di acqua, si concentri a 2 o 3 cc. Portati quindi su adatti fornellini a gas (fig. 2) riscaldando intensamente, si completa l'ossidazione, che si riconosce quando

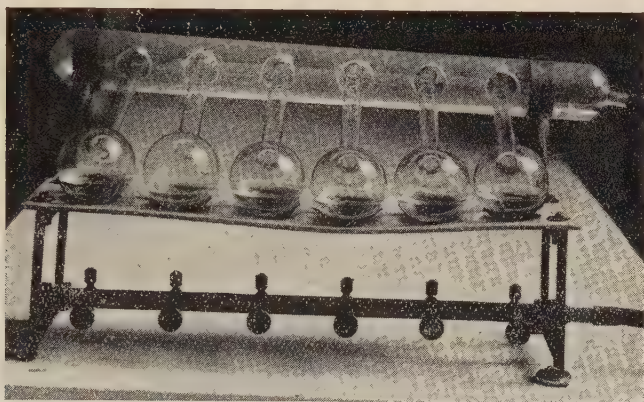


Fig. 2. — Ossidazione.

il liquido diviene completamente trasparente di color verde o azzurro chiaro, a caldo, e incolore a freddo.

Nei palloncini, nei quali si versa la soluzione contenente alcool ed etere, è necessario, prima di versare H_2SO_4 per l'ossidazione, far evaporare tutto l'etere e quasi tutto l'alcool. A tal fine si aggiungono a ciascuno 5 cc. di H_2O e 1 goccia di H_2SO_4 ; si portano quindi sul bagno di sabbia elettrico, ove si lasciano sino alla scomparsa dell'odore di alcool e di etere. Si trattano poi come gli altri.

IV. *Distillazione.* — La distillazione si compie contemporaneamente per quattro dosaggi, mediante un apparecchio di vetro pyrex che abbiamo fatto costruire (dalla ditta Donati di Roma) sul principio di quello di PARNAS e WAGNER, abolendo ogni chiusura con tappo di gomma (fig. 3). Il contenuto dei palloncini mikokjeldahl è versato quantitativamente nel rispettivo pallone di distillazione; si aggiunge NaOH (33 %) fino a evidente formazione dell'idrato di Cu , divenendo il colore del liquido nettamente azzurro:

10 cc. della soluzione alcalina sono sufficienti allo scopo. Si riscalda la grande beuta centrale, che contiene l'acqua distillata per la formazione del vapore che va a gorgogliare entro i palloni, riscaldando le soluzioni e favorendo la liberazione dell' NH_3 allo stato gassoso, che passando per i tubi di quarzo si condensa e in gocce si raccoglie negli speciali cilindretti graduati, contenenti ciascuno 2 cc. esattamente misurati con microburetta della seguente soluzione

$$5 \text{ cc. di } \text{H}_2\text{SO}_4 \frac{\text{N}}{10} + 20 \text{ cc. di } \text{KJO}_3 \frac{\text{N}}{10} \text{ in } 100 \text{ cc. di } \text{H}_2\text{O}$$

$$\text{che corrispondono a } 2 \text{ cc. di } \text{H}_2\text{SO}_4 \frac{\text{N}}{200}.$$

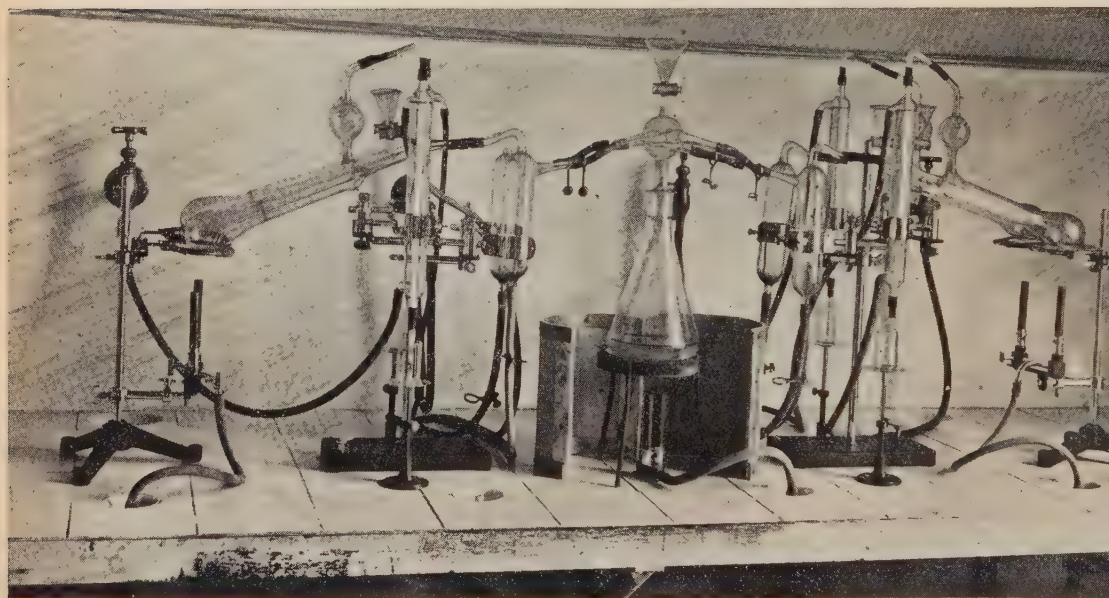


Fig. 3. — Distillazione contemporanea di quattro campioni.

I singoli palloni di distillazione sono anche riscaldati con debole fiamma, in modo da produrre, nell'ultima fase della distillazione, vapore acqueo che serve a lavare il tubo di quarzo.

Quando tutta l' NH_3 è distillata (al controllo con cartina di tornasole), si toglie il cilindretto graduato, avendo cura che per tutti i campioni si abbia la stessa quantità di liquido, in media di 5-6 cc. È questo un particolare della massima importanza, poichè avvenendo la titolazione per via jodimetrica, la sua sensibilità dipende dal grado di diluizione, come risulta dalla seguente tabella di nostri risultati:

H ₂ O cc.	H ₂ SO ₄ $\frac{N}{70}$ cc.	KJ 10 % cc.	KJO ₃ 5 % cc.	Na ₂ S ₂ O ₃ $\frac{N}{140}$ cc.
20	+ 2	+ 1	+ 1	4.67
25	+ 2	+ 1	+ 1	4.52
30	+ 2	+ 1	+ 1	4.45
40	+ 2	+ 1	+ 1	una goccia
45	+ 2	+ 1	+ 1	o
50	+ 2	+ 1	+ 1	o

Con altre parole, quando la diluizione raggiunge un certo grado, la reazione iodimetrica più non avviene.

È pertanto che abbiamo munito ogni apparecchio di distillazione di adatti cilindretti di vetro pyrex, del diametro di 2 cm. e dell'altezza di 5 cm., graduati da 5 a 8 cc.

V. *Titolazione.* — Al contenuto di ogni cilindretto si aggiungono cc. 2 di KJ 5 %; si chiude con un coperchietto; dopo 5 primi si aggiungono 3 gocce di salda d'amido 1 %; da una microburetta si fa quindi gocciare una soluzione di Na₂S₂O₃ $\frac{N}{200}$ fino a che il liquido agitato con un bastoncino non si decolori.

VI. *Calcolo.* — Il numero dei cc. di Na₂S₂O₃ $\frac{N}{200}$ adoperato per la prova in bianco, meno il numero dei cc. di Na₂S₂O₃ $\frac{N}{200}$ del campione, moltiplicato per 0,7 dà il contenuto per mille dell'N nel sangue. Il fattore costante 0,7 risulta dal calcolo che una soluzione di NH₃ $\frac{N}{200}$ contiene gr. 0.07 di N per litro.

Prima di procedere alle analisi, per controllare le soluzioni e tutto il materiale usato, si prepari una soluzione di urea nota e se ne determini il contenuto in N, operando nel modo descritto.

Le analisi per ogni frazione si eseguono in doppio campione.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli sforzi.* Nota II di C. CATTANEO, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Nella precedente Nota I ⁽²⁾ ho impostato il problema del « contatto » tra due corpi elastici premuti obliquamente e sono giunto a stabilire, tra le incognite componenti degli sforzi che si generano nell'areola σ di contatto, tre equazioni integrali (del tipo di Fredholm di prima specie); per due di queste, interessanti le sole componenti tangenziali, ho lasciato tuttavia ancora indeterminato il campo di validità σ^* , che corrisponde, da un punto di vista meccanico, alla porzione di σ nella quale non hanno luogo scorrimenti.

Nella Nota presente procedo a determinare, mediante l'ulteriore equazione, gli sforzi normali in tutta l'area di contatto e, subordinatamente, a caratterizzare in maniera diretta sia la zona σ^* degli scorrimenti nulli, sia il comportamento degli sforzi tangenziali nella rimanente parte di σ .

Le equazioni integrali divengono, in tal modo, atte a individuare la distribuzione delle azioni tangenziali in tutta l'area σ . Riservo a una terza Nota la loro determinazione effettiva.

I paragrafi e le formule che seguono sono numerati in continuazione di quelli della precedente Nota I, alla quale il Lettore è pregato di riferirsi.

5. *Determinazione degli sforzi normali.* — Come era presumibile, la (8) è la medesima equazione integrale che, nella teoria di Hertz, risolve il caso della compressione puramente normale; riguardo ad essa ricorderò solamente che, partendo dall'ipotesi che l'area di contatto sia un'ellisse, essa viene risolta interpretando il suo secondo membro come l'espressione del potenziale newtoniano generato da un ellissoide materiale omogeneo infinitamente schiacciato (disco ellittico). La teoria di Hertz fornisce per N l'espressione:

$$(9) \quad N = \frac{3}{2} \frac{N_0}{\pi ab} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

(1) Nella seduta del 1° maggio 1938.

(2) Pubblicata su questi « Rendiconti » (vol. XXVII, fasc. 7).

mentre a loro volta a e b , semiassi dell'area ellittica di contatto, sono individuati dalle relazioni seguenti:

$$(10) \quad \begin{cases} A a^3 = \frac{3}{8} N_0 \frac{\lambda + 2\mu}{\pi\mu(\lambda + \mu)} F\left(\frac{b}{a}\right) \\ B b^3 = \frac{3}{8} N_0 \frac{\lambda + 2\mu}{\pi\mu(\lambda + \mu)} F\left(\frac{a}{b}\right); \end{cases}$$

nelle quali con N_0 viene indicata l'azione normale risultante, e con F una ben determinata funzione di un solo argomento.

L'ultima delle (S) vale dunque non solo a individuare gli sforzi normali, ma altresì a determinare completamente, in base ai dati del problema, l'area σ cui sono estese anche le integrazioni figuranti nelle equazioni (7) del sistema (S).

Riguardo alla soluzione del sistema costituito da queste ultime, essa potrebbe, una volta nota la σ , essere perfettamente individuata, qualora le equazioni potessero ritenersi valide in tutta l'area di contatto.

Vediamo se questa ipotesi ci conduce a una soluzione possibile.

6. *Determinazione degli sforzi tangenziali.* — Supponiamo dunque per un momento che le equazioni (7) siano valide in tutta la σ , ammettiamo cioè che sia:

$$\sigma^* \equiv \sigma.$$

Esse bastano, è vero, in tal caso a definire univocamente in σ due funzioni \bar{L} ed \bar{M} che le soddisfino; queste però non possono costituire una soluzione del nostro problema meccanico, poichè ai bordi dell'areola σ esse assumono valori infinitamente grandi, e questo fatto, oltre a non essere fisicamente ammissibile, è in aperta contraddizione con la (5), la quale impone all'opposto, che L ed M si annullino ai margini di σ , dato che anche N vi si annulla.

Faccio notare tuttavia, per incidenza, che la suddetta soluzione, della quale tralascio di scrivere l'espressione formale, può essere considerata valida in un caso di aderenza completa, non subordinata all'attrito, quale, per esempio, si potrebbe ottenere mediante saldatura dei due corpi.

Resta però ad ogni modo provato che in generale le (7) non possono essere valide in tutta la σ o, in altri termini, che *l'attrito non può impedire che in qualche parte di σ si producano scorrimenti tangenziali.*

Dove si verificano questi spostamenti? La soluzione fallace sopra citata, ce lo può in linea di massima indicare: si produrranno scorrimenti tangenziali, là dove un'aderenza perfetta in tutta l'area di contatto produrrebbe le sollecita-

zioni tangenziali più grandi e ivi gli sforzi tangenziali effettivi assumeranno il valore massimo compatibile con le leggi dell'attrito.

Le considerazioni intuitive ora svolte e il fatto che lo sforzo normale assume valori eguali su ellissi omotetiche, conducono a formulare le seguenti ipotesi:

1) La zona degli scorrimenti nulli è un'ellisse interna a σ e ad essa omotetica.

2) Nell'anello ellittico τ che la circonda gli sforzi tangenziali soddisfano alle seguenti equazioni:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} L^2 + M^2 = f^2 N^2 \\ \frac{L}{M} = \frac{\bar{L}}{\bar{M}}; \end{array} \right.$$

dove con \bar{L} ed \bar{M} si sono indicate le soluzioni nel caso di aderenza totale, le quali, si è visto, sono perfettamente individuabili.

Una volta conosciuti in τ la L e la M mediante le (11), le (7) ovviamente divengono atte a individuare le stesse funzioni anche nell'area ellittica σ^* , della quale è poi facile stabilire le dimensioni.

Vedremo nella prossima Nota III come si giunga semplicemente alle effettive soluzioni; e come la distribuzione di sforzi tangenziali che ne risulta non presenti discontinuità nel passaggio dell'area interna σ^* all'anello τ : quest'ultima circostanza giustificherà a posteriori le ipotesi fatte.

Meccanica (Idraulica). — *Stabilità e propagazioni ondose in una rete idraulica con turbine a regolatore isodromico*. Nota di G. KRALL, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Il primo studio, rimasto classico, sulla *regolazione* delle turbine (considerate nel complesso *turbina + condotta*) risale allo Stodola.

Successivamente, R. H. Lorentz, Rateau e Bauersfeld, in trattati notissimi, hanno apportato contributi cospicui alla soluzione del fondamentale problema.

Molti autori hanno proseguito queste ricerche, sicchè al costruttore specialista di turbine e di impianti idraulici in genere è ormai offerta una letteratura completa, utile e interessante.

Tutte queste ricerche si affrancano da una impostazione idrodinamica generale del problema nello spirito della teoria dell'Allievi, considerando condizioni di impianto per le quali il fenomeno di propagazione ondosa è poco sensibile in raffronto alle oscillazioni globali, rappresentabili con un numero limitato di parametri, del liquido immesso nel bacino di carico, nella condotta e in eventuali pozzi piezometrici. I quali ultimi, come si sa, sono particolarmente atti ad attenuare quel fenomeno ondoso legato alla *elasticità* del fluido e della condotta stessa.

Se per gli intenti del costruttore meccanico tali trattazioni possono apparire esaurienti, per il costruttore idraulico non si può, in rigore, affermare altrettanto. Se non sono certamente preoccupanti le *sovrappressioni di regolazione in condizioni prossime a quelle di regime* sui valori del carico statico, ampie riserve di stabilità essendo offerte dalle sovrappressioni di ordinaria regolazione, non è così in riguardo al loro *persistere alla lunga*, che riporta nel campo speciale dei *carichi ripetuti* tanto insidiosi alla tenuta delle tubazioni, di quelle di cemento armato in particolare.

Io mi propongo qui di trattare la questione sotto questo punto di vista, che diviene appariscente ogni qualvolta si sta ad *ascoltare* una condotta in esercizio e, più ancora, a titolo preparatorio per ulteriori sviluppi della soluzione di questo fondamentale problema.

Farò vedere come è possibile stabilire le *equazioni alle variazioni* per l'analisi della stabilità di una *soluzione stazionaria* (corrispondente a condizioni cosiddette di *regime*) di un generale sistema di n turbine inserite in una rete idraulica costituita da tubi elastici comunque accoppiati (presenza di ripartitori). Penseremo le turbine con *regolazione a servomotore* idraulico e *dispositivo isodromico*.

(1) Nella seduta del 1° maggio 1938

Con riferimento alla fig. 1, che illustra un *regolatore* siffatto mettendone in luce i corrispondenti parametri lagrangiani $\xi_1, \xi_2, \zeta, \varphi$, si considerino, ponendosi in condizioni di giusta, ma non troppa, generalità due turbine T e T' inserite in parallelo (cfr. fig. 2) su una stessa condotta munita di ripartitore.

Senza richiami inutili mi limito ad affermare⁽¹⁾ che, nell'ambito dei *piccoli moti* attorno una soluzione stazionaria per le variazioni dei due para-

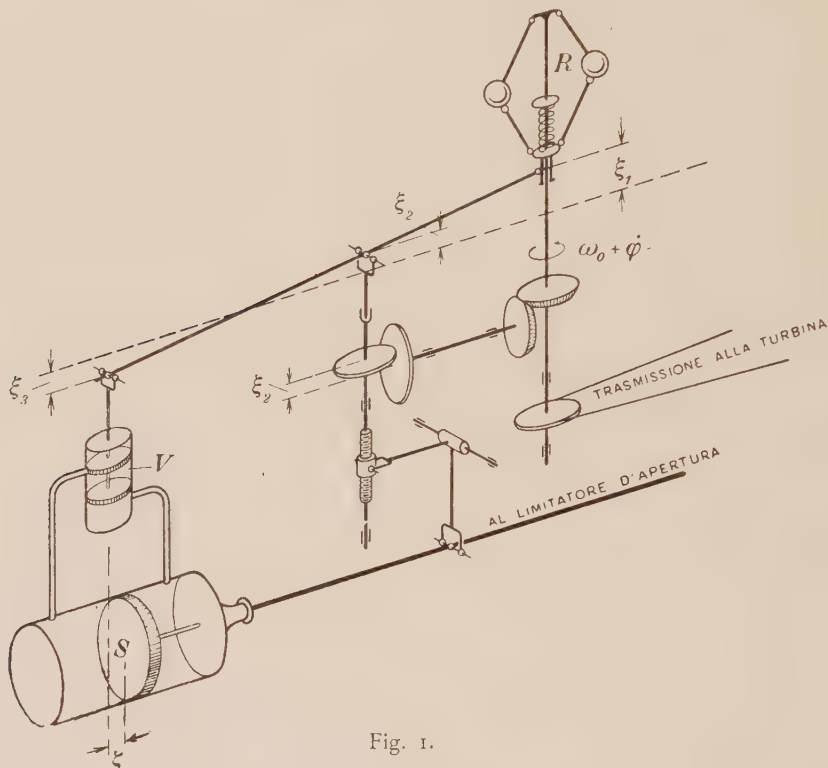


Fig. 1.

metri ξ_1 e ξ_2 del *regolatore*, ζ del *servomotore* che comanda l'intercettatore, contate dalla posizione di regime e per la variazione $\dot{\varphi}$ dalla velocità ω_0 della coordinata ciclica φ del rotore della turbina, sussistono le equazioni differenziali lineari seguenti:

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} a) \quad \ddot{\xi}_1 + \lambda \dot{\xi}_1 + \frac{4\delta}{T_c^2} \xi_1 - \frac{8x_m}{\omega_m T_s^2} \dot{\varphi} = 0, \\ b) \quad \ddot{\xi}_2 - k_2 \dot{\xi}_2 + k_1 \zeta = 0, \\ c) \quad \ddot{\zeta} - h \left(\frac{b-a}{a} \right) \xi_2 - h \frac{b}{a} \xi_1 = 0, \\ d) \quad \Theta \ddot{\varphi} + \mathfrak{M}_0 \left(\frac{\dot{\varphi}}{\omega_0} - \zeta - \frac{3}{2} \frac{p}{p_0} \right) = 0; \end{array} \right.$$

(1) Cfr. W. HORT, *Technische Schwingungslehre*, § 104; Springer, Berlin, 1922.

dove

$$\lambda = \frac{B}{M_1}, \quad T_s = \sqrt{\frac{8 x_m \overline{M_1}}{x_m \omega_m^2 M_2}},$$

essendo M_1 ed M_2 i coefficienti dell'energia cinetica del pendolo centrifugo espressa nei parametri di cui abbiamo indicate con ξ_i e $\dot{\phi}$ le variazioni. B caratterizza la *resistenza viscosa* — $B \dot{\xi}_1$; $2 x_m$ il valore medio del raccorciamento della molla di richiamo del pendolo alla velocità di regime $\omega_m = \dot{\phi}_m$.

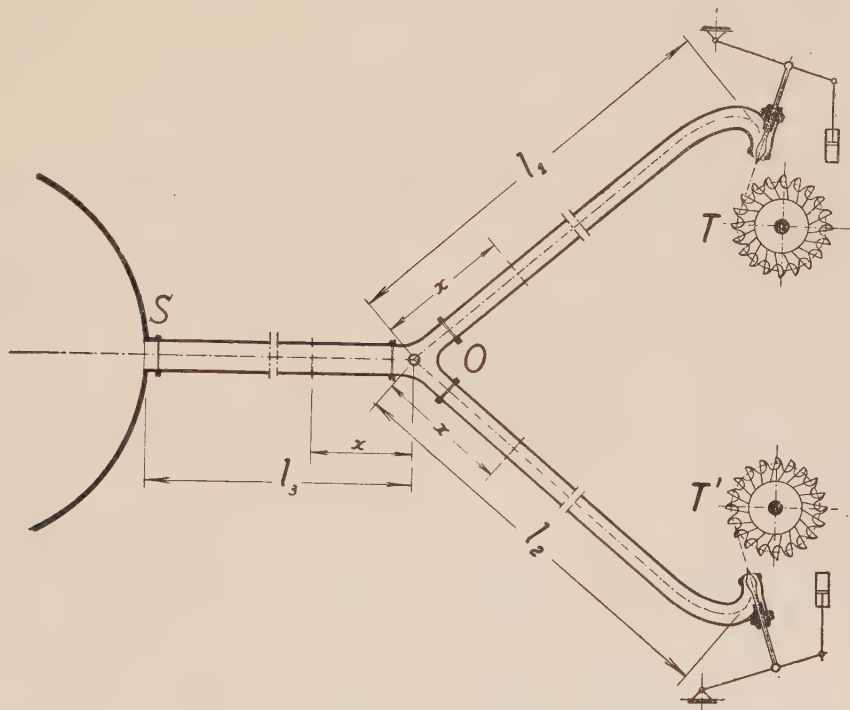


Fig. 2.

Inoltre, k_1 e k_2 sono costanti del *dispositivo isodromico* che intervengono nella relazione, che ne mette in luce l'ufficio,

$$\xi_2 + k_1 \dot{\xi} - k_2 \xi_2 = 0.$$

Le costanti a, b rappresentano i bracci del *bilancere* in virtù del quale

$$\frac{\xi_1 - \xi_2}{a} = \frac{\xi_2 - \xi_3}{b},$$

ξ_3 caratterizzando l'apertura della valvola del servomotore di cui il funzionamento è, per costruzione, tale che,

$$\dot{\xi} + k \xi_3 = 0.$$

Infine, \mathfrak{M}_0 è il momento motore medio (di regime), Θ il momento polare d'inerzia del rotore attorno l'asse, δ il cosiddetto *grado d'irregolarità* del pendolo centrifugo.

Ponendo, secondo lo spirito del metodo delle piccole oscillazioni,

$$\xi_1 = \bar{\xi}_1 e^{\lambda t}, \quad \xi_2 = \bar{\xi}_2 e^{\lambda t}, \quad \zeta = \bar{\zeta} e^{\lambda t}, \quad \dot{\phi} = \bar{\phi} e^{\lambda t}$$

le (1) si riducono alle equazioni algebriche (2) *a*), *b*), *c*) (scriviamone solo 3 riservando a dopo la discussione idraulica del problema la scrittura della equazione corrispondente alla (1) *d*).

Si ottiene precisamente

$$(2) \quad \begin{cases} a) \quad \left[\lambda (\lambda + \lambda) + \frac{4\delta}{T_s^2} \right] \bar{\xi}_1 - \frac{8x_m}{\omega_m T_s^2} \bar{\phi} = 0, \\ b) \quad (\lambda - k_2) \cdot \bar{\xi}_2 + k_1 \lambda \bar{\zeta} = 0, \\ c) \quad b \frac{b}{a} \bar{\xi}_1 + b \cdot \frac{b-a}{a} \cdot \bar{\xi}_2 - \lambda \cdot \bar{\zeta} = 0. \end{cases}$$

Analoghe equazioni sussistono per la turbina T'. Accentuando le (1), le scriveremo concisamente nella forma,

$$(1') \quad \mathfrak{D}_i (\xi'_i, \xi'_2, \zeta', \dot{\phi}') = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

$\mathfrak{D}_i ()$ stando a rappresentare gli stessi operatori differenziali che figurano nel gruppo delle (1). Seguono in conformità equazioni (2'), che non scrivo, analoghe alle (2).

Ciò posto, rivolgiamoci alla parte idrodinamica del problema. Ricordiamo che le propagazioni ondose, della variazione u della velocità di regime u_0 e variazione p del carico p_0 di regime, nelle condotte \overline{TO} , $\overline{T'O}$, \overline{OS} che concorrono nel ripartitore O, sono rette dalle equazioni dell'Allievi,

$$\frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2},$$

il significato della coordinata lineare x risultando dalle fig. 2, V essendo la velocità di propagazione, data da una formula ben nota in funzione delle caratteristiche elastiche dei tubi e del fluido immesso.

Le soluzioni che convengono al caso nostro, per il legame tra la u e la p stabilito dall'equazione di Eulero, ridotta da ipotesi quantitative opportune ad un semplice aspetto lineare, e per posizioni del tipo

$$u = u(x) e^{\lambda t}, \quad p = p(x) e^{\lambda t},$$

si scrivono sotto la forma

$$(3) \quad \begin{cases} u_r = \left(A_r \cos i\lambda \frac{x}{V_r} + B_r \sin i\lambda \frac{x}{V_r} \right) e^{\lambda t}, \\ ip_r = \left(-B_r \rho V_r \cos i\lambda \frac{x}{V_r} + A_r \rho V_r \sin i\lambda \frac{x}{V_r} \right) e^{\lambda t}, \end{cases} \quad (r = 1, 2, 3),$$

con $i = \sqrt{-1}$, A_r, B_r costanti *a priori* arbitrarie e i valori 1, 2, 3 dell'indice r stando a caratterizzare ordinatamente il 1°, 2° e 3° dei tre rami considerati. La χ che già compare nelle (2) è una costante da determinare in base alle *condizioni ai limiti* agli estremi di ogni tratto.

Si tratta ora di stabilirle.

In corrispondenza alle turbine sarà, per la (1) d) e la (3),

$$(2\,d, d') \quad \Theta \chi \bar{\phi} + \mathfrak{N}_0 \left[\frac{\bar{\phi}}{\omega_0} - \bar{\zeta} - \frac{3\,i}{2} \frac{\rho V_r \left(B_r \cos i\chi \frac{l_r}{V_r} - A_r \sin i\chi \frac{l_r}{V_r} \right)}{p_0} \right],$$

($r = 1, 2$).

Dovrà poi essere in S, $p_3 = 0$, almeno ove il bacino sia, come vogliamo supporre, praticamente di capacità infinita in raffronto alle erogazioni di liquido nei periodi di tempo che si considerano. Ne segue, con riferimento ad assi contati come in figura,

$$(4) \quad -B_3 \cos i\chi \frac{l_3}{V_3} + A_3 \sin i\chi \frac{l_3}{V_3} = 0.$$

Successivamente, al nodo O ($x_r = 0$), se $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ sono le aree delle sezioni dei tubi, l'equazione di continuità porge

$$\sum_1^3 \Omega_r u_r = 0$$

e quindi

$$(5) \quad \sum_1^3 \Omega_r A_r = 0.$$

Si dovrà avere anche, sempre in O, l'eguaglianza delle pressioni; dunque

$$(6) \quad B_1 V_1 = B_2 V_2 = B_3 V_3.$$

Occorre ora stabilire il legame idraulico e dinamico tra turbina + regolatore e la rete.

All'uopo osserviamo che, se ζ è la variazione del coefficiente λ_0 di riduzione dell'area del limitatore, si ha, secondo una fondamentale formola dell'Allievi,

$$\frac{u_0 + u(0, t)}{u_0} = (\lambda_0 + \zeta) \sqrt{\frac{p_0 + p(0, t)}{p_0}}$$

e quindi, poichè nel caso nostro u e p sono piccoli del 1° ordine al pari di ζ ,

$$\frac{u(0, t)}{u_0} = \zeta + \frac{\lambda_0}{2} \frac{p(0, t)}{p_0}.$$

Basta porre in questa relazione le espressioni (3) per u_1, p_1 per avere, con $\zeta = \zeta e^{\lambda t}$, nella relazione

$$(7) \quad \frac{1}{u_0} \left(A_1 \cos i\lambda \frac{l_1}{V_1} + B_1 \sin i\lambda \frac{l_1}{V_1} \right) - \bar{\zeta} + \frac{\rho \lambda_0 V_1}{2 i p_0} \left(B_1 \cos i\lambda \frac{l_1}{V_1} - A_1 \sin i\lambda \frac{l_1}{V_1} \right) = 0$$

l'equazione ulteriore che occorre, unitamente ad una analoga (7') in T', che si ottiene salvo a scambiare l'indice 1 in 2 e ζ con ζ' , per realizzare il numero di equazioni necessarie per le $6 \times 2 + 2$ costanti incognite $\xi_1, \xi_2, \zeta, \phi, A_1, B_1, \xi'_1, \xi'_2, \zeta', \bar{\phi}, \bar{A}_2, \bar{B}_2$ ed infine, A_3, B_3 .

La condizione di compatibilità di questo sistema di 14 equazioni nelle altrettante incognite $\xi_1, \xi_2, \dots, A_3, B_3$, testè specificate, fornito dalle (2), (2'), (3), (4), (5), (6), (7), (7'), porta ad una equazione trascendente in λ di cui la discussione mira a riconoscere se le corrispondenti radici sono reali negative o complesse coniugate a parte reale negativa nulla, come si richiede per la *stabilità futura*.

Notiamo subito a scanso di ambiguità che, per la *stabilità* nel senso ordinariamente inteso in Dinamica da $-\infty \leq t \leq \infty$, si richiede che siano tutte le radici immaginarie pure e si escludono radici reali negative in quanto la *stabilità* in meccanica celeste interessa così per il futuro come per il passato; nelle quistioni tecniche, invece, basta aver riguardo alla *stabilità avvenire*.

Naturalmente se, in sì alto numero di gradi di libertà, appare senza speranza una ricerca delle radici di codesta equazione considerata in generale, sono pur sempre a disposizione criteri per semplificare la questione, quali quelli della *stabilità ridotta* o *alla Routh* che mira a fissare l'attenzione su un numero limitato di parametri.

Comunque però, anche a ridursi a due soli gradi di libertà, le discussioni algebriche sono pur sempre penose. Allora conviene, ove si sia in vista di un esempio concreto, fissare l'attenzione su una perturbazione probabile legata per il più al momento resistente W e analizzare le ampiezze dei vari parametri.

Consideriamo ora un caso concreto particolarmente semplice per dimostrare come sia effettivamente possibile arrivare talvolta a conclusioni concrete.

Si tratti di una condotta con sola turbina senza regolatore, e sia p_0 la pressione di regime:

In tal caso si ha per la (1) d)

$$(8) \quad \Theta \ddot{\phi} + \frac{\mathfrak{M}_0}{\omega_0} \dot{\phi} - \frac{3 \mathfrak{M}_0}{2 p_0} p(0, t) = 0$$

Posto in conformità con le (3), inutile essendo l'introduzione di un indice, contando la x a partire dalla turbina,

$$u = \left(A \cos i\gamma \frac{x}{V} + B \sin i\gamma \frac{x}{V} \right) e^{\lambda t},$$

$$ip = \rho V \left(-B \cos i\gamma \frac{x}{V} + A \sin i\gamma \frac{x}{V} \right) e^{\lambda t},$$

si ricavano agevolmente, per $\dot{\phi} = \bar{\phi} e^{\lambda t}$, le 3 equazioni

$$(9) \quad \begin{cases} \left(\Theta \gamma + \frac{\mathfrak{M}_0}{\omega_0} \right) \bar{\phi} - \frac{3}{2} \frac{i}{p_0} \frac{\mathfrak{M}_0}{\rho} V B = 0, \\ \frac{1}{u_0} A + \frac{\rho V}{2 i p_0} B = 0, \\ \sin i\gamma \frac{l}{V} A - \cos i\gamma \frac{l}{V} B = 0, \end{cases}$$

dalle quali si ottiene immediatamente l'equazione delle frequenze,

$$\left(\Theta \gamma + \frac{\mathfrak{M}_0}{\omega_0} \right) \left(\frac{2 p_0}{\rho V u_0} + \mathfrak{E} g \gamma \frac{l}{V} \right) = 0.$$

Il primo fattore lineare ha un'unica radice *negativa* $\gamma = -\frac{\mathfrak{M}_0}{\Theta \omega_0}$. Il fattore trascendente si annulla per un valore pure negativo di γ , in quanto si ha praticamente, in ogni caso,

$$\frac{2 p_0}{\rho V u_0} < 1.$$

Si conclude pertanto per la stabilità lineare dello stato di regime $\dot{\phi} = \text{cost.}$ del sistema considerato.

Non è il caso di sviluppare qui ulteriormente degli esempi; conviene piuttosto rilevare come il metodo si presti bene, una volta fissata l'attenzione su un numero ridotto di parametri, considerati come più salienti del particolare fenomeno che si considera, a trattare come interdipendenti la rete idraulica, compendiata dalle equazioni dell'Allievi, dal complesso dinamico *turbina + regolatore*. Va tenuto conto però che la presente impostazione contempla l'ambito delle sole *piccole variazioni* da una condizione di regime: i fenomeni di regolazione ordinari, nelle forti variazioni di carico, portano in un campo di difficoltà di calcolo ben più elevate che incominciano con la introduzione, nella impostazione analitica, delle *caratteristiche* delle turbine e dei dispositivi regolatori. Ma anche allora parrebbe possibile, seguendo in linea di massima questo procedimento, se non decidere la *stabilità* (che del resto è pressochè assicurata quando sussiste quella *lineare*) seguire in rigore il fenomeno ed i suoi aspetti linearmente instabili onde riconoscere se questi, alla fine, per virtù di quei termini d'ordine superiore e delle azioni dissipative trascurate nella nostra impostazione sono alla fine praticamente tollerabili e praticamente stabili.

Meccanica. — *Sul pendolo di lunghezza variabile.* Nota di M. ZEULI, presentata⁽¹⁾ dal Socio G. FUBINI.

Il pendolo di lunghezza variabile è stato oggetto di studio da parte di vari autori⁽²⁾ e particolarmente notevoli sono i risultati ottenuti dal Lecornu⁽³⁾ sul caso di un allungamento (od accorciamento) uniforme. Fra l'altro questo autore dà una particolare integrazione approssimata per l'equazione delle piccole oscillazioni.

Noi riprendiamo la ricerca in base alla teoria degli invarianti adiabatici⁽⁴⁾ e cerchiamo, sotto le solite ipotesi quantitative degli invarianti adiabatici, l'integrazione nel caso generale. Nel caso in cui la lunghezza varii uniformemente giungiamo alla stessa soluzione approssimata di Lecornu; però possiamo calcolare esplicitamente un limite superiore per l'errore che si commette sostituendo la soluzione di Lecornu a quella esatta. E possiamo vedere ad esempio che, a parità di allungamento, l'errore è tanto più piccolo quanto minore è la velocità di allungamento, e quanto più grande è la radice quadrata della lunghezza iniziale. Si può così apprezzare in quale campo è valida l'ipotesi di Lecornu, campo che non appare direttamente dalla sua Memoria, e questo permette di precisare e semplificare suoi risultati.

Da ultimo osserviamo come il metodo degli invarianti adiabatici dia l'integrazione non soltanto nell'ipotesi di una variazione lineare ma anche in condizioni molto più generali e come anche in tal caso dia un limite superiore per l'errore che si commette ammettendo in pratica verificata l'ipotesi di variazione adiabatica. Come esempio trattiamo la questione dell'allungamento esponenziale.

1. Sia l la lunghezza, variabile, del pendolo, e φ l'angolo di deviazione dalla verticale. Dal teorema del momento della quantità di moto si ha subito, se t è il tempo e g l'accelerazione di gravità:

$$\frac{d}{dt} \left(l^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) + gl \sin \varphi = 0$$

(1) Nella seduta del 1° maggio 1938.

(2) LECORNU, PEANO, LORD RAYLEIGH, POPOFF, KRUTKOW e FOCK, THIRY, CASSINA ed altri.

(3) LECORNU, *Sur le pendule de longueur variable*. « Acta Math. », to. 19, 1895, pp. 201-249.

(4) Vedi D. GRAFFI, *Gli invarianti adiabatici come metodo di integrazione approssimata di equazioni differenziali*. « Rend. Acc. Lincei », 1932¹, p. 657; ID., *Limitazione dei valori degli invarianti adiabatici con applicazione al problema delle masse variabili*. Parte I e II « Atti Accad. di Torino », 1933; ID., *Sopra alcune applicazioni degli invarianti adiabatici*. « Annali di Matematica », ser. IV, to. 15, 1936, p. 86.

che, nell'ipotesi di piccole oscillazioni, porta a

$$(1) \quad l \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2 \frac{dl}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + g\varphi = 0$$

od' anche, ponendo $\varphi = \chi/l$,

$$(2) \quad \frac{d^2 \chi}{dt^2} + \frac{1}{l} \left(g - \frac{d^2 l}{dt^2} \right) \chi = 0.$$

La (2), posto

$$(3) \quad \omega^2 = \frac{1}{l} \left(g - \frac{d^2 l}{dt^2} \right)$$

come si è visto nei lavori citati in ⁽⁴⁾ a p. 444, colla sostituzione

$$(4) \quad \chi = \sqrt{\frac{2J}{\omega}} \sin \theta, \quad p = \frac{d\chi}{dt} = \sqrt{2J\omega} \cos \theta$$

si può ricondurre al sistema hamiltoniano

$$(5) \quad \frac{dJ}{dt} = -J \cos 2\theta \frac{d}{dt} \log \omega, \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega + \frac{\sin 2\theta}{2} \frac{d}{dt} \log \omega.$$

Di qui integrando si ha

$$(6) \quad J = J_0 e^{-\int_0^t \frac{d}{dt} \log \omega \cdot \cos 2\theta dt}, \quad \theta = \int_0^t \omega dt + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d}{dt} \log \omega \sin 2\theta dt + \psi_0.$$

e, nell'ipotesi adiabatica,

$$(6') \quad J = J_0, \quad \theta = \int_0^t \omega dt + \psi_0$$

con cui possiamo ricavare θ , e quindi χ e φ , in funzione di t nota la legge, $l = l(t)$, di variazione della lunghezza l del pendolo.

2. Tale integrazione è immediata se supponiamo uniforme l'allungamento o l'accorciamento, cioè se

$$(7) \quad l = bt + a, \quad (b, a = \text{cost.});$$

giungiamo, così, al caso trattato dal Lecornu (loc. cit.). È facile vedere che per la nostra via si ottengono subito i risultati a cui egli giunge collo studio di una funzione del tipo [loc. cit. p. 222 (20)]

$$Ax^p \cos(2\sqrt{x}) + Bx^p \sin(2\sqrt{x}), \quad (A, B, p = \text{cost} ; x = gl/b^2).$$

Infatti, per le (6') e (3), avremo

$$\theta = \int_0^t \sqrt{\frac{g}{bt+a}} dt + \psi_0 = \frac{2\sqrt{gl}}{b} - \psi_0, \quad \left(\psi = \frac{2\sqrt{ga}}{b} - \psi_0 = \text{cost} \right)$$

e la prima delle (4) ci darà

$$\tilde{\gamma} = \sqrt[3]{2J} \left| \frac{l}{g} \right| \sin \left(\frac{2}{b} \sqrt{gl} - \psi_0 \right)$$

e quindi

$$(8) \quad \varphi = R l^{-3/4} \sin \left(\frac{2}{b} \sqrt{gl} - \psi_0 \right) \quad (R = \sqrt[3]{2J/\sqrt{g}})$$

che è l'espressione data dal Lecornu [loc. cit., p. 223 (22)]. La seconda delle (4), poi, ci porterebbe all'espressione di $\frac{d\varphi}{dt}$.

Noi possiamo però valerci dei risultati ottenuti nella teoria degli invarianti adiabatici⁽¹⁾ per studiare l'ordine dell'errore che si commette assumendo la (8) come espressione di φ .

Infatti, ricordando la formula⁽²⁾

$$(9) \quad \left| \log \frac{J}{J_0} \right| \leq \left(\pi e^{\Delta_m \alpha} + \frac{1}{2} \right) \Delta_m \alpha V(\alpha, t) + \Delta_m \alpha + \Delta_m \alpha' V(\alpha, t)$$

con facili calcoli⁽³⁾ si ottiene nel caso di allungamento ($b > 0$) essendo l sempre crescente con t

$$\begin{aligned} \left| \log \frac{J}{J_0} \right| &\leq \frac{1}{4} \left(\pi \sqrt{1 + \frac{\pi b}{\sqrt{ag}}} + \frac{1}{2} \right) \log \left(1 + \frac{\pi b}{\sqrt{ag}} \right) \log \frac{l}{a} + \\ &+ \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{\pi b}{\sqrt{ag}} \right) + \frac{\pi^2 b^2}{2g} \log \frac{l}{a} / \left[a \left(1 + \frac{\pi b}{\sqrt{ab}} \right) \log \left(1 + \frac{\pi b}{\sqrt{ag}} \right) \right]; \end{aligned}$$

(1) Vedi specialmente l'ultimo lavoro citato in nota (4) a p. 444.

(2) È la (54) di p. 106 del lavoro di cui alla nota precedente. In essa ad a ($= \log \omega$) si è sostituito α per evitare confusione di notazioni.

(3) Essendo $\alpha \left[= \log \omega = \frac{1}{2} \log \frac{g}{l} \right]$ funzione decrescente di t la sua variazione totale nell'intervallo $(0, t)$, $V(\alpha, t)$, sarà

$$V(\alpha, t) = \alpha(0) - \alpha(t) = \frac{1}{2} \log \frac{l}{a}.$$

Invece la sua variazione nel periodo $T(\tau)$, corrispondente all'istante τ , sarà

$$\Delta_\tau \alpha = \alpha(\tau) - \alpha[\tau + T(\tau)] = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{\pi b}{\sqrt{gl(\tau)}} \right);$$

di qui, sviluppando in serie e trascurando le potenze di b/\sqrt{a} , otteniamo in fine

$$(10) \quad \left| \log \frac{J}{J_0} \right| \leq \frac{\pi b}{2\sqrt{ag}} \left[\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5}{4} \right) \log \frac{l}{a} + 1 \right].$$

Nel caso di accorciamento ($b < 0$) gli stessi calcoli portano a vedere che vale ancora la (10) quando a si interpreti come lunghezza finale del pendolo.

Abbiamo così un limite superiore per l'errore che si commette sostituendo la soluzione (8) a quella esatta ed inoltre possiamo dedurre che, a parità di allungamento (od accorciamento), l , la soluzione è tanto più approssimata quanto più grande è \sqrt{a} e quanto più piccolo è $|b|$. Questo non appare in modo evidente dalla ricerca del Lecornu in quanto, trascurando nell'equazione che studia, un termine dell'ordine di b^2/a pare, come implicitamente egli ammette, sia pure tale l'ordine di grandezza dell'errore. Ora dalla (10) appare come l'ordine di grandezza possa non essere tale, anzi possa essere quello di $|b|/\sqrt{a}$ e basta, ad es., confrontare la (8) con una soluzione completa della (1), relativa alle stesse condizioni iniziali, per vedere che è così (1).

questa è una funzione *decescente* di t quindi il suo massimo, $\Delta_m \alpha$, si avrà per $t=0$ e sarà

$$\Delta_m \alpha = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{\pi b}{\sqrt{ag}} \right).$$

Osserviamo infine che $\frac{d\alpha}{dt} \left[= -\frac{b}{2l} \right]$ è funzione *crescente* di t ; quindi, ricordando che per la definizione di $\Delta_\tau \alpha'$ (ved. p. 93 (11), loc. cit.) è

$$\Delta_\tau \alpha' = \left[\left(\frac{d\alpha}{dt} \right)_{\tau + T} - \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)_\tau \right] \frac{T(\tau)}{\Delta_\tau \alpha},$$

avremo, mettendo in evidenza un \sqrt{l} ,

$$(*) \quad \Delta_\tau \alpha' = \frac{\pi^2 b^2}{g} / \left[\sqrt{l} \left(\sqrt{l} + \frac{\pi b}{\sqrt{g}} \right) \log \left(1 + \frac{\pi b}{\sqrt{gl}} \right) \right];$$

e si vede subito che essa è una funzione *decescente* di t osservando che il suo denominatore vale

$$b^2 (x + K) \log (1 + K/x)^x \quad [x = \sqrt{l}/b, K = \pi/\sqrt{g} = \text{cost}].$$

Inoltre $(1 + K/x)^x$, se, come qui, è $x > 0$, è notoriamente una funzione sempre crescente di x , e quindi di l (ed ha per lim, e^K). Il massimo di $\Delta_\tau \alpha'$, cioè $\Delta_m \alpha'$, si otterrà quindi dalla (*) sostituendo in essa a ad l .

(1) Confrontando, ad es., la soluzione completa (ved. LECORNU, loc. cit., p. 207)

$$\varphi_1(x) = 2x^{-1} J_1(x) \quad , \quad x = 2 \cdot \sqrt{gl}/b,$$

Quindi, in generale, la soluzione del Lecornu è accettabile soltanto quando è $(|b|/\sqrt{a}) \ll 1$. Quest'osservazione semplifica notevolmente calcoli e risultati del nostro autore. Infatti ora l'espressione di $\frac{d\varphi}{dt}$ di cui egli si vale, ottenuta direttamente derivando la (8),

$$(11) \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{R\sqrt{g}}{b} l^{-5/4} \left[\cos\left(\frac{2}{b}\sqrt{gl} - \psi_0\right) - \frac{3b}{\sqrt{lg}} \sin\left(\frac{2}{b}\sqrt{gl} - \psi_0\right) \right]$$

si semplifica perchè essendo la soluzione approssimata coll'ordine di grandezza accennato si deve trascurare il secondo termine dell'ordine di grandezza $|b|/\sqrt{a}$ rispetto al primo. Mantenendolo l'approssimazione dei risultati è illusoria; ad esempio, siccome $\frac{d\varphi}{dt}$ ha il valore accennato, la differenza di ampiezza fra due elongazioni successive è dell'ordine di grandezza del termine trascurato cioè di b/\sqrt{a} , come il Lecornu trova (loc. cit. p. 227) ma non è possibile precisare di più.

3. Osserviamo infine che nel caso in cui la variazione di l avvenga, adiabaticamente, con una legge che non sia quella lineare, il nostro procedimento ci permette di giungere a determinare una soluzione approssimata ed un limite per l'errore che si commette sostituendola alla soluzione esatta.

Infatti la seconda delle (6') dà

$$(12) \quad \theta = \int_0^t \sqrt{\left(g - \frac{d^2 l}{dt^2}\right)/l} dt + \psi_0$$

che, essendo nota $l = l(t)$, riconduce il problema ad una quadratura e la (9) ci dà per l'errore il limite relativo. Possiamo però ancora semplificare questi risultati. Infatti ammesso $\frac{d^2 l}{dt^2}$ trascurabile rispetto a g , la (12) si semplifica e diventa

$$(13) \quad \theta = \int_0^t \sqrt{\frac{g}{l}} dt + \psi_0$$

dove J_1 è la funzione di Bessel di ordine 1, colla

$$\varphi_2(x) = x^{-3/2} [13.51109 \cos x - 7.461420 \sin x]$$

[che è la (8) relativa alle condizioni $\varphi_1(100) = \varphi_2(100)$, $\varphi_1'(100) = \varphi_2'(100)$] si trova, ad es., che per $x = 10$ è

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 0.23019 \dots$$

cioè tale differenza è dell'ordine di $1/x$ e non di $1/x^2$.

ed è facile vedere come dalla (9) si possa ancora ottenere un limite superiore per l'errore. Per questo ricordando che, come si ha dalla prima delle (6), è

$$(14) \quad \left| \log \frac{J}{J_0} \right| = \left| \int_0^t \cos 2\theta \frac{d}{dt} \log \omega dt \right|$$

e scrivendo

$$\omega = \sqrt{\left(g - \frac{d^2 l}{dt^2}\right)/g} \sqrt{\frac{g}{l}},$$

si ha, ponendo $\omega_1 = \sqrt{g/l}$,

$$\begin{aligned} \left| \log \frac{J}{J_0} \right| &\leq \left| \int_0^t \cos 2\theta \frac{d}{dt} \log \sqrt{\left(g - \frac{d^2 l}{dt^2}\right)/g} dt \right| + \\ &+ \left| \int_0^t \cos 2\theta \frac{d}{dt} \log \omega_1 dt \right|. \end{aligned}$$

Per il primo integrale a secondo membro, conservando $g - \frac{d^2 l}{dt^2}$ sempre lo stesso segno, si ha subito

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^t \frac{d}{dt} \log \sqrt{\left(g - \frac{d^2 l}{dt^2}\right)/g} \cos 2\theta dt \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d}{dt} \log \left[\left(g - \frac{d^2 l}{dt^2}\right)/g \right] dt \right| = \frac{1}{2} \left| \log \frac{g - \left(\frac{d^2 l}{dt^2}\right)_t}{g - \left(\frac{d^2 l}{dt^2}\right)_0} \right| \end{aligned}$$

e quest'ultima quantità nelle nostre ipotesi è trascurabile. Quanto al secondo integrale esso è del tipo (14) in cui al $\log \omega$ nel secondo fattore sotto il segno è sostituito $\log \omega_1$. Allora ripetendo la ricerca della (9) [Ved. Graffi, loc. cit., p. 94 e sg.] si può vedere che anche per esso la (9) può dare un limite superiore purchè si introducano le seguenti modificazioni. Anzitutto il II e III addendo vengano calcolati nel massimo intervallo $T = \pi/\omega$ e con $\alpha = \log \omega_1$. Poi il I addendo, se è sempre $\omega_1 > \omega$, venga calcolato come sopra e con $\alpha = \log \omega_1$; se è sempre $\omega_1 < \omega$, venga calcolato con $\alpha = \log \omega$ ⁽¹⁾.

Applichiamo, come esempio, queste considerazioni al caso in cui è

$$l = ae^{bt} \quad (a, b = \text{cost}).$$

(1) Resterebbe il caso generale di ω_1 non sempre maggiore (o sempre minore) di ω . Esso porterebbe a lievi modificazioni solo nel I addendo. Non ce ne occuperemo, osserveremo soltanto che del resto essendo ω_1 poco diverso da ω non si giungerebbe a grandi differenze.

La (13) dà

$$\theta = \chi - \frac{2}{b} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \left(\chi = \psi_0 + \frac{2}{b} \sqrt{\frac{g}{a}} \right)$$

e di conseguenza, per la seconda delle (4), essendo $\chi = l\varphi$, si ha

$$(15) \quad \varphi = R l^{-3/4} \operatorname{sen} \left(\chi - \frac{2}{b} \sqrt{\frac{g}{l}} \right), \quad \left(R = \sqrt{2 J_0 / \sqrt{g}} \right).$$

In questo caso il calcolo per il limite superiore dell'errore colla (9) è particolarmente facile. Infatti, col solito significato dei simboli [ved. nota (6)], essendo sempre $\omega_1 > \omega$ e posto $\alpha_1 = \log \omega_1$, si ha

$$V(\alpha_1, t) = \frac{1}{2} \log \frac{l}{a}, \quad \Delta_\tau \alpha_1 = \frac{1}{2} \log e^{bT(\tau)} = \frac{\pi b}{2} \sqrt{\frac{l(\tau)}{g - b^2 l(\tau)}}$$

e quindi, essendo quest'ultima funzione *crescente* di τ ,

$$\Delta_m \alpha_1 = \frac{\pi b}{2} \sqrt{\frac{l}{g - b^2 l}}.$$

Infine, essendo $\frac{d\alpha_1}{dt} = -\frac{b}{2} = (\text{cost.})$, sarà $\Delta_\tau \alpha'_1 = 0$ e, per questo,

$$\Delta_m \alpha'_1 = 0.$$

Perciò si avrà

$$\left| \log \frac{J}{J_0} \right| \leq \frac{\pi b}{2} \sqrt{\frac{l}{g - b^2 l}} \left[\left(\frac{1}{2} e^{\Delta_m \alpha_1} + \frac{1}{4} \right) \log \frac{l}{a} + 1 \right]$$

da cui, essendo nelle nostre ipotesi $d^2 l / dt^2$ trascurabile rispetto a g ,

$$\left| \log \frac{J}{J_0} \right| \leq \frac{\pi b \sqrt{l}}{2 \sqrt{g}} \left[\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \right) \log \frac{l}{a} + 1 \right].$$

L'errore che si commette sostituendo la (15) alla soluzione esatta è quindi dell'ordine di b ed, a parità di allungamento l , la (15) è tanto più approssimata quanto più b è piccolo.

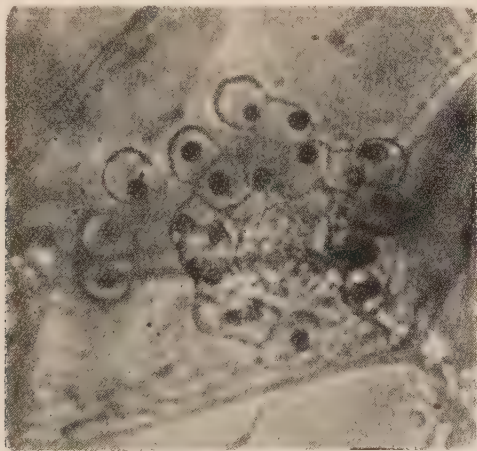
Fisica (Fisica matematica). — *Sopra un sistema di equazioni gravitazionali del 1° ordine.* Nota di G. WATAGHIN, presentata dal Socio T. LEVIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Botanica (Citologia vegetale). — *Leucoplasti lipidici delle Agavi*⁽¹⁾. Nota di L. VIGNOLI, presentata⁽²⁾ dal Socio E. CARANO.

Nell'epidermide fogliare delle Agavi, ho trovato e sto studiando degli organiti intracellulari, le cui caratteristiche corrispondono molto bene a quelle dei leucoplasti elaboratori di steridi, descritti da Savelli⁽³⁾ e da Manuel⁽⁴⁾ nelle Cactacee.

Più grandi e più numerosi in *Agave Ghiesbreghtii*, *A. Gilbeyi*, meno numerosi in *A. Zapuè*, *A. americana* e meno ancora in *A. mitis*, *A. Bouchéi*, essi sono costituiti da una massa stromatica che avvolge una sferula



di natura lipidica. Lo stroma in alcune specie è pochissimo sviluppato, ridotto ad una sottile pellicola inapprezzabile all'osservazione ordinaria. In altre è ben manifesto e di volume assai più vistoso della goccia lipidica. La qui unita microfotografia (ingr. 1100 X) mostra i leucoplasti, che coronano il nucleo, di una cellula epidermica di *A. Ghiesbreghtii*. In questi casi la goccia lipidica ha, di solito, posizione eccentrica.

(1) Lavoro eseguito nel R. Istituto Botanico di Palermo.

(2) Nella seduta del 1° maggio 1938.

(3) R. SAVELLI, *Leucosterinoplasto*. «Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei», vol. XXIII, 1936.

(4) J. MANUEL, *Recherches sur la formation des stérides dans les chloroplastes de certaines Cactées*. «Rev. gén. Bot.», to. 48, 1936.

Le numerose reazioni istochimiche finora eseguite permettono di concludere che questi lipidi hanno costituzione complessa: fra i componenti prevalgono forse steridi a cui si associano grassi neutri.

Anche senza dimostrarne direttamente l'origine mitocondriale, è lecito elevare queste strutture intracellulari al grado di veri e propri plastidi. Lo indica il comportamento positivo di fronte al *verde Giano*, colorante vitale dei plastidi e del condrioma. Lo indica ancora il numero crescente di esse nelle varie specie, con l'aumento numerico dei cromosomi. Lo indica infine, nello stesso tessuto epidermico, il palese diretto rapporto volumetrico col volume cellulare.

Microbiologia. — *Coltura in serie del «Trypanosoma brucei» nell'embrione di pollo* ⁽¹⁾. Nota di E. BIOCCA, presentata ⁽²⁾ dal Socio D. DE BLASI.

Sono note le difficoltà di coltivare i protozoi in genere. Tali difficoltà si presentano in maniera evidentissima, quando si tratta di coltivare in serie i Tripanosomi e specialmente i Tripanosomi patogeni.

Esistono, è vero, numerosi terreni preparati a tale scopo, quali i classici di MC. NEALE e NOVY, PONSELLE, NÖLLER, N. N. N., quello di GAILLARD e il più recente di BONACCI, ma in realtà, mentre i Tripanosomi non patogeni si sviluppano spesso in maniera rigogliosa, ciò non avviene col *Trypanosoma brucei*, *gambiense*, *rhodesiense*.

Infatti, anche in base ai lavori di questi ultimi anni del PRATES, LWOFF, PACKCHANIAN, RAZGHA, FRANCHINI, REICHENOW, ARNAUD, PANNIER, BRUTSAERT e HENRARD, ecc., ed i recentissimi del CASTELLANI e JACONO, si è autorizzati a concludere che, se pure qualche volta si sia riusciti ad ottenere culture trapiantabili in serie, tali culture molto spesso si sono esaurite spontaneamente e hanno perduto quasi sempre e in poco tempo la virulenza. In tutti gli Istituti, quindi, tali ceppi di Tripanosomi vengono mantenuti e trapiantati da animale in animale.

Convinti che i Tripanosomi patogeni hanno bisogno, per crescere e riprodursi, di trovarsi in un essere vivente, abbiamo pensato di coltivarli nell'embrione di pollo.

Ci siamo serviti di un ceppo di *Trypanosoma brucei* fornitoci gentilmente dal prof. Vanni, Direttore dell'Istituto di Parassitologia della R. Università di Roma.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto d'Igiene della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 1° maggio 1938.

Siamo riusciti a far sviluppare in cultura rigogliosa i Tripanosomi nel torrente circolatorio dell'embrione. Abbiamo adoperato uova fecondate e tenute in incubazione nel termostato a 38°-39° C. da almeno nove giorni. Osservando per transilluminazione, abbiamo segnato sul guscio, con un lapis, la circonferenza della camera d'aria. Un centimetro sopra alla linea da noi tracciata, dopo aver disinfettato localmente il guscio con tintura di iodio ed alcool, abbiamo praticato un piccolo foro con uno spillo. Per quanto è possibile, è bene perforare il guscio senza lacerare la membrana sottostante. Con una pipetta molto affilata si aspirano un paio di gocce di sangue di cavia malata con Tripanosomi in circolo, e, appoggiandola sopra il foro praticato nel guscio, si lacera delicatamente la «membrana testacea» per modo che il sangue viene aspirato e penetra lentamente nell'interno dell'uovo. Il foro si chiude con qualche goccia di cera fusa al momento, quindi l'uovo infestato si rimette subito in termostato.

Abbiamo osservato che il periodo migliore per ottenere rigogliose culture è compreso tra il nono e il quattordicesimo giorno di incubazione in termostato. Tre giorni dopo la semina, già si osservano numerosi Tripanosomi in circolo nell'embrione, che aumentano il quarto giorno e il quinto sono in cultura ricchissima (fino a trenta e quaranta per campo microscopico).

Questi Tripanosomi hanno mantenuta la virulenza verso la cavia, alla quale li abbiamo iniettati, provocandone la morte dopo qualche giorno dall'inoculazione. Dalla cavia abbiamo di nuovo infestato, con la stessa tecnica, gli embrioni di pollo. Dalle uova, così infestate, abbiamo fatto passaggi in altre uova.

Stiamo eseguendo contemporaneamente tre serie di trapianti che sono stati fatti, tutte le volte, da otto in otto uova.

I serie: Cavia- Uovo- Cavia- Uovo- Uovo- Uovo- Uovo- Uovo...

II » : Cavia- Uovo- Uovo- Uovo- Uovo- Uovo...

III » : Cavia- Uovo- Uovo...

Ad ogni passaggio si è eseguito il controllo della virulenza nelle cavie. Finora questa si è mantenuta in tutti i casi costante e i caratteri morfologici dei Tripanosomi si sono riscontrati identici nella cavia e nell'embrione.

Si è avuto sviluppo rigoglioso solo nelle uova fecondate, con embrione vivo. Qualche uovo, privo assolutamente di Tripanosomi, aveva l'embrione macerato, per ragioni che, probabilmente, vanno ricercate in questioni di tecnica riguardanti il tempo di incubazione delle uova, il punto di inoculazione e la quantità di sangue iniettato; questioni che stiamo risolvendo. Tutte le modalità della tecnica un po' delicata, saranno descritte esattamente in un prossimo lavoro.

Ci è parso interessante vedere come si comportino anche i volatili adulti verso questo ceppo di *Trypanosoma*. Abbiamo perciò tentato d'infe-
stare sperimentalmente tre colombi, praticando ad essi tre inoculazioni nei
muscoli pettorali di cc. 1 e 1,5 di sangue di cavia ricchissimo di *Tripano-*
somi, a distanza di sette giorni l'una dall'altra. Tali tentativi sono sempre
falliti. Analoghe esperienze stiamo eseguendo sui polli, finora con lo stesso
risultato. Sembrerebbe quasi che solo tra il nono e il quattordicesimo giorno
di incubazione sia possibile infestare le uova e che, successivamente, com-
paiano nell'embrione in via di sviluppo, le proprietà difensive che possiede
l'adulto.

Una osservazione da noi fatta e che ci sembra molto interessante di
porre in evidenza è la seguente: mentre non si trovano più *Tripanosomi*
nella cavia e nell'embrione poco dopo la morte provocata dagli stessi *Tri-*
panosomi, al contrario, mantenendo la capsula Petri, dove abbiamo versato
e ucciso l'embrione di pollo infestato, a temperatura ambiente o meglio in
ghiacciaia, è possibile trovare i *Tripanosomi* vivi e mobili anche dopo parecchi
giorni dall'apertura dell'uovo (oltre otto giorni). Comportamento che ricorda
quello osservato dal CASTELLANI e JACONO della sopravvivenza del *Try. gam-*
biense (*Castellanella*) nel sangue stesso defibrinato dell'animale ammalato.

Ci proponiamo pertanto di seguire altri passaggi in serie nelle uova
controllando i caratteri morfologici e di virulenza del *Trypanosoma*, volta
per volta, e di studiare, dato il risultato incoraggiante dei primi esperimenti,
la conservabilità di tali microrganismi in provette in cui sia stato aperto
l'uovo stesso embrionato.

Infine, poichè questi risultati sono molto promettenti, pensiamo di esten-
dere le nostre ricerche ad altri protozoi fino ad oggi ritenuti incoltivabili.

LETTERATURA.

- ARNAUD, « Ann. Soc. Belge de Méd. Trop. », vol. XIV, 1934.
BONACCI H., « Rev. Inst. Bacteriol. », Buenos Aires, vol. VI, 1934.
BRUTSAERT P., HENRARD C., « Ann. Soc. Belge de Méd. Trop. », vol. XVI, 1936.
CASTELLANI A. e JACONO I., « Riv. Parassit. », vol. VII, 1937.
FRANCHINI G., « Bull. Soc. Path. Exot. », vol. XVII, 1924.
GAILLARD H., « Ann. Parasit. », vol. VII, 1929.
LWOFF M., « Bull. Soc. Path. Exot. », vol. XXII, 1929.
PACKCHANIAN A., « Science », vol. LXXX, 1934.
PANNIER E., « C. R. Soc. Biol. », vol. CXXII, 1936.
PRATES M., « Rapp. defin. Comm. Intern. Tryp. hum. Soc. des Nations. C. H. », 629,
Genève, 1928.
RAZGHA A., « Zeitschr. f. Parasitenk. », vol. II, 1929.
REICHENOW E., « Arch. f. Schiffs- u. Trop. Hyg. », vol. XXXVIII, 1934.

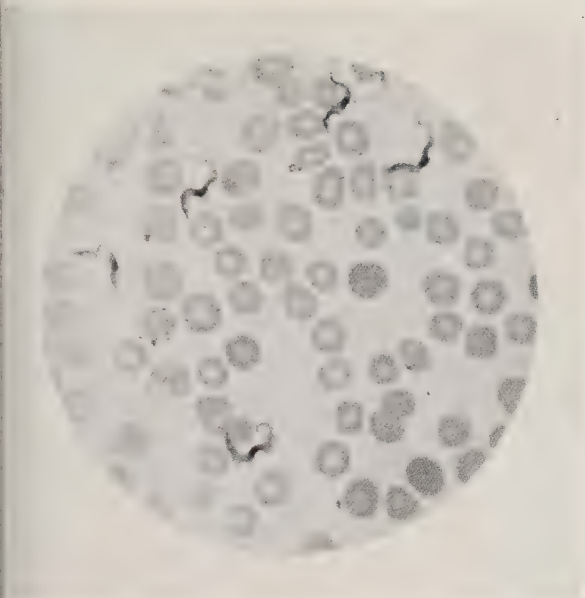


Fig. 1 - Sangue di cavia con *Trypanosoma brucei*.

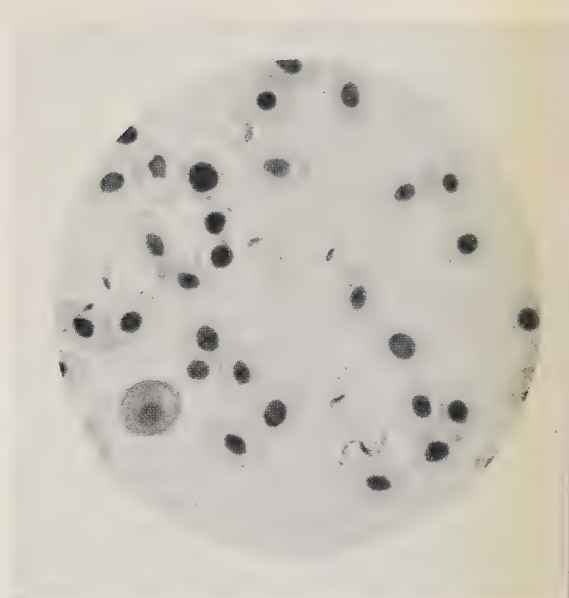


Fig. 2 - Sangue prelevato dal cuore di embrione di pollo con *Trypanosoma brucei*.

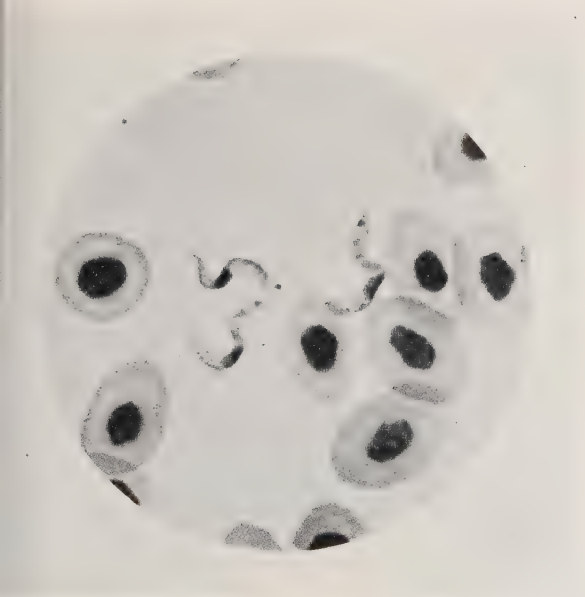


Fig. 3 - Sangue dei vasi dell'allantoide dell'embrione di pollo con *Trypanosoma brucei*.



Fig. 4 - Sangue dei vasi dell'allantoide dell'embrione di pollo con forme in divisione di *Trypanosoma brucei*.

Commemorazione del Socio Gian Antonio Maggi

letta dal Corrisp. ANTONIO SIGNORINI nella seduta del 1° maggio 1938

Gian Antonio Maggi nacque a Milano il 19 febbraio 1856, da nobile famiglia di origine piacentina. Dal padre Giuseppe Pietro — noto orientalista, membro dell'Istituto Lombardo — dal nonno Giovanni Antonio — editore di classici greci, amico e collaboratore nella *Proposta* di Vincenzo Monti — precocemente ereditò la passione per le lettere, tanto che al termine degli studi medî molto esitò prima di iscriversi alla Facoltà di Scienze dell'Università di Pavia. In questa Facoltà fu allievo di Eugenio Beltrami, di Giovanni Cantoni, di Giovanni Schiaparelli, di Felice Casorati; del quale più tardi sposava la figlia Eugenia, il 23 settembre 1883.

Si laureò in Fisica il 7 dicembre 1877 e in Matematica solo un mese dopo, l'8 gennaio 1878. Sua prima sede d'insegnamento fu l'Università stessa di Pavia, dal 1878 al 1885, salvo un anno di perfezionamento a Berlino, alla scuola del Kirchhoff. Nell'Università di Pavia il Maggi fu, in ordine di tempo, assistente alla cattedra di Fisica sperimentale, incaricato del corso di Fisica per i farmacisti, libero docente di Fisica matematica, professore aggiunto alla Scuola di Magistero. Nel 1885 venne nominato professore all'Università di Modena. A trent'anni, nell'86, era già ordinario all'Università di Messina.

* * *

A Messina teneva, come a Modena, una cattedra di Analisi, ma i Suoi colleghi non ignoravano che poteva insegnare anche altre discipline ed effettivamente Egli insegnava per incarico della Sua Facoltà anche la Fisica matematica: e fino da allora era ben risaputo come pochi fossero i campi dello spirito che Egli non avesse esplorati o che non si proponesse di esplorare; fino da allora questa Sua regola di vita faceva acquistare a un insegnamento essenzialmente tecnico un'alta efficacia educativa; tanto che nel 1891, l'unanime deferenza dei colleghi, sorpassando la questione di età per consentire all'affettuosa ammirazione di tutta una cittadinanza, lo eleggeva alla carica di Rettore, ch'Egli tenne per due anni.

È nel 1895 che s'inizia il Suo insegnamento di Meccanica razionale e e Fisica matematica all'Università di Pisa. La scuola pisana già rifulgeva per i nomi di Ulisse Dini, Luigi Bianchi, Eugenio Bertini e il Maggi non

poteva non essere attratto dal fascino di così alto magistero e dalla nobiltà di tradizioni di quella Scuola.

Poco dopo di Lui anche Paolo Pizzetti si trasferiva a Pisa. Aumentava il numero dei Maestri, ma nessuno era inferiore agli altri nel collaborare all'educazione matematica dei giovani con zelo instancabile ed elevatissima serietà d'intenti: con una tale, intima armonia che oggi gli antichi allievi non sanno disgiungere il ricordo dell'uno da quello degli altri. I risultati sono ben noti: gli avvisi di concorso della Scuola Normale Superiore sono alquanto allungati dall'elenco dei professori universitari che a quella Scuola debbono la formazione del loro pensiero scientifico.

E noi ben sapevamo il compiacimento dei nostri Maestri per la buona riuscita dei loro allievi, da essi sempre favorita, mai favoreggiata: nè certo io potrò dimenticare che subito dopo la mia abilitazione fu proprio il Maggi, e unicamente Lui, a indurmi a continuare i miei studi col Levi-Civita. Anzi, una frase che Egli ebbe a dirmi in quell'occasione, s'impresse indelebilmente nella mia memoria, quantunque a quell'epoca non fossi in grado di apprezzarla nel suo giusto valore: « Non tutti - Egli disse - sono ugualmente adatti per avviare un giovane che promette; mi occuperò io stesso del suo trasferimento a Padova ».

Nel 1924, quando viene istituita l'Università di Milano, il Maggi, benchè ormai quasi settantenne, cede all'invito di continuare gli insegnamenti di Meccanica razionale e Fisica matematica nella Sua città natale, assumendo in pari tempo la carica di Preside della nuova Facoltà di Scienze.

A Milano l'attività del Maggi continua indefessa, fino alla vigilia della morte. « Alla terra che mi è madre - soleva Egli dire scherzando - ho domandato di ritentare, se le riusciva, il mito di Anteo ».

Nel '27 - col concorso dell'Università, del Politecnico e dell'Osservatorio astronomico - il Maggi fonda il Seminario matematico e fisico di Milano, che sotto la Sua direzione in pochi anni diviene sede di conferenze dei più rappresentativi Matematici e Fisici italiani, compreso il Corbino.

* * *

Collocato a riposo per raggiunti limiti di età nel 1931, è nominato professore emerito dell'Università di Milano e continua ancora la direzione del Seminario. Poco dopo il collocamento a riposo, il 10 marzo 1932, colleghi, discepoli, amici, ammiratori vollero tributargli solenni onoranze, offrendogli, nell'Aula magna dell'Università, la prima copia di una raccolta delle principali Sue Memorie scientifiche, stampata a Milano col titolo *Selecta*.

Nè io saprei tratteggiare la nobilissima figura del Maestro meglio che ricordando alcuni brani del discorso pronunziato in quel giorno da un Suo grande amico, il Vivanti:

« La tua esperienza della vita universitaria, la tua equanimità, la tua obbiettività serena hanno segnato ai colleghi la via giusta... Ma la tua figura non sarebbe completa se io tacessi che, anche al di là della Scienza a cui hai dedicato il meglio delle tue forze, nulla vi è di umano o di divino che sia a te estraneo: profondo nelle discipline storiche e filosofiche, ammiratore dei grandi classici dell'antichità, conoscitore di un numero infinito di lingue... È ben raro che si ricorra al tuo aiuto senza averne i lumi richiesti... Concedimi anche di dire della saldezza del tuo carattere e della profondità della tua fede, che ti hanno permesso di risollevare il tuo spirito dopo i più gravi dolori e di ritornare con immutata vigoria alla tua vita di lavoro e di dovere ».

* * *

Gian Antonio Maggi era Socio Nazionale di questa Accademia dal 31 agosto 1910, corrispondente dal 18 luglio 1899. L'Accademia di Torino lo contava fra i suoi soci da quasi un ventennio, l'Istituto Lombardo fino dai primi dell'84. Apparteneva anche all'Accademia Gioenia, all'Accademia Peloritana, alla Società Matematica di Kharkoff, alla Società Fisico-matematica di Kasan. Dal '36 era uno dei XL della Società Italiana delle Scienze.

Negli ambienti universitari e accademici il rimpianto è stato veramente unanime. Fin dal 16 giugno l'Accademia di Torino affidava l'incarico di commemorarlo al Somigliana. Pochi giorni dopo veniva commemorato dal prof. Finzi all'Università di Milano e dal Cisotti all'Istituto Lombardo. La commemorazione del prof. Finzi è stata stampata anche nel « Periodico di Matematiche » che lo ebbe fra i collaboratori più affezionati. Il Seminario di Milano prepara una solenne commemorazione per il primo anniversario della morte, il 12 giugno prossimo.

* * *

Fatto eccezionale trattandosi di un matematico, una necrologia del Maggi è comparsa anche nella rivista ⁽¹⁾ « Atene e Roma ».

Il Maggi possedeva il greco antico tanto da poter leggere correntemente i principali autori senza aiuto di dizionario. Molti passi dei lirici e dei tragici sapeva a memoria e dal greco tradusse in milanese una satira di Simonide di Amorgo. Amico di un eminente grecista, Giuseppe Fraccaroli, lo aiutò nella traduzione di alcuni passi di Platone attinenti alla matematica.

Oltre le lingue moderne principali conosceva il russo, l'ungherese, l'ebraico, il romeno: anzi dal russo tradusse poesie di Puškin, dall'inglese

(1) A. M. PIZZAGALLI, *Gian Antonio Maggi*, « Atene e Roma », ser. III, anno V (1937-XV), fasc. 3.

l'opera di Clifford: *Il senso comune nelle Scienze esatte*. A Lui e al cugino L. Medici è dovuta un'edizione delle poesie di Carlo Maria Maggi citata anche nell'*Enciclopedia Italiana*. Il suo stile smagliante rifulse in numerosi discorsi inaugurali, fino all'ultimo, dal titolo *Cosmo newtoniano e nuovi cosmi* letto all'Istituto Lombardo, nell'adunanza solenne del 6 gennaio 1932.

* * *

Passando a parlare dell'opera scientifica, spontaneo mi si presenta il rilievo della sua continua, perfetta aderenza alle vicende, ai progressi della Fisica.

Ad es. è del 1929 la Memoria *Sul significato, nel passato e nell'avvenire, delle equazioni dinamiche* dove è desunto dal teorema di Hamilton sull'azione variata un criterio di corrispondenza per la Meccanica ondulatoria. Le *Riflessioni* sulle esperienze del Miller ne seguono il primo annunzio solo a qualche settimana di distanza e dopo qualche mese sono integrate dalla Nota: *Sull'applicazione della formola di Stokes all'aberrazione astronomica*.

Nè sono questi gli unici contributi del Maggi alle teorie di relatività, perchè la Sua esposizione compendiosa dei principi sostanziali della Relatività generale figura tra le più lucide sintesi di quella teoria.

* * *

Tutte le opere del Maestro portano l'impronta di una squisita « sensibilità matematica » secondo una denominazione proposta dallo Scorza per indicare che si può essere più o meno disposti a subire il fascino di una teoria matematica, più o meno pronti a coglierne le armonie patenti o nascoste.

Talè dote mi sembra che eccella nell'aureo volume sulla Teoria fenomenologica del campo elettromagnetico, pubblicato nel 1931. Non sono che 300 piccole pagine, eppure in esse è raccolto tutto ciò che basta per passare dai teoremi di trasformazione degli integrali di superficie alla Teoria unitaria di Einstein. Se c'è un difetto, è che in quest'opera il Maggi non ha dato un posto adeguato alle Sue ricerche personali di Teoria del potenziale e di Elettrostatica, fino alla completa dimenticanza delle varie Sue Memorie sull'induzione elettrostatica. Tali ricerche appartengono, per la maggior parte, agli anni giovanili, ma il Maggi le aveva riprese anche in epoca molto più recente, fino agli ultimi Suoi giorni. È del '34 la Nota sulla teoria dell'elettroforo di Volta, dei primi dell'anno scorso quella ove risponde a un'obiezione del Fubini circa la rappresentazione analitica della tensione elettrostatica: un'ultima Nota sulle derivate tangenziali delle funzione potenziale di superficie è stata stampata nei Rendiconti di questa Accademia solo dopo la Sua morte.

*
* * *

La prima Memoria di Ottica fisica — anteriore di più di un anno alla divulgazione delle classiche esperienze di Hertz — naturalmente è modellata sulla Teoria elastica della luce, ma il successivo assetto della Teoria elettromagnetica, in quanto non modifica il tipo delle equazioni fondamentali, non riduce la sua portata: e il Maggi stesso ne ricavò nel '14 una dimostrazione del teorema di Huygens-Kirchhoff che sembra proprio irriducibile.

Nelle note successive — anche in quelle del '26 e '27 sulla raggio di luce nell'Ottica fisica, anche nella conferenza del 1933 sulla questione della superficie d'onda — la Teoria elettromagnetica ha il dovuto posto, ma neppure è reietta la Teoria elastica, perchè, Egli diceva «a malgrado della fortunata concorrenza di altre teorie, mantiene tuttavia un intrinseco significato».

A questo rispetto per una teoria ormai sorpassata, forse non erano estranei due potenti fattori: i continui contatti del Maggi con la Teoria dell'Elasticità, la Sua passione per l'indagine storica in genere.

Nei Rendiconti di questa Accademia, tra il 1905 e il 1921, furono stampate varie Note del Maggi sulla Teoria delle distorsioni elastiche, ma non sono questi i soli Suoi contributi all'Elastomeccanica: gli appunti che io possiedo di un Suo corso su tale argomento potrebbero dar luogo a un prezioso volume.

E per quanto riguarda la Sua passione per l'indagine storica, mi basterà ricordare che proprio nei primi anni della Sua carriera scientifica, iniziando la teoria generale delle piccole oscillazioni dei fili flessibili e inestendibili, Egli volle fare uno studio diretto di tutto quanto precedentemente era stato scritto pel caso particolare dei fili gravi: e così ebbe occasione di ricavare dai più antichi atti dell'Accademia di Pietroburgo una notizia ancor oggi poco diffusa: le due funzioni cilindriche di ordine zero, prima che da Bessel e da Fourier, sono state adoperate da Bernoulli e da Eulero.

Con riattacco alle Sue ricerche del 1920 sulla propagazione delle onde di forma qualsivoglia nei mezzi isotropi, tra il 1933 e il 1936 numerose Note furono dedicate dal Maggi (qualche volta in collaborazione con il prof. Finzi) a un tipo particolare di onde elettromagnetiche ch'Egli chiama «armoniche»: forza elettrica e forza magnetica si presuppongono del tipo $\mathbf{F}_1 \cos \varphi + \mathbf{F}_2 \sin \varphi$, dove $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ corrispondono a vettori puramente posizionali, mentre φ si specifica nel prodotto di una costante per $\frac{n}{a}t$, essendo n la distanza normale del punto generico dello spazio da una superficie fissa ed a la velocità di propagazione.

Questo tipo di onde elettromagnetiche risulta avere un grado di generalità piuttosto ristretto, ma dalle Sue ricerche il Maggi sa trarre occasione per raggiungere qualche risultato di carattere generale, fino a un notevole complemento delle condizioni del Love sul fronte d'onda.

*
* *

Le equazioni del Maggi per i sistemi anolonomi sono già contenute ed applicate nel Suo primo trattato di Meccanica razionale, pubblicato nel 1896: cioè precedono almeno di tre anni le così dette equazioni di Appell; altra forma delle equazioni dei sistemi anolonomi scoperta in America dal Gibbs, nel 1879, ma sconosciuta ai matematici europei fino al suo ritrovamento da parte dell'Appell.

La Meccanica dei sistemi anolonomi è intimamente legata alla Teoria dell'attrito: ed a questa il Maggi ha portato un duplice contributo, con un'acuta critica della teoria di Painlevé e con la proposta di annoverare l'attrito fra le forze attive invece che tra le reazioni vincolari. La critica riduce la definizione di Painlevé delle forze d'attrito a postulare l'indipendenza dall'attrito delle reazioni che fanno lavoro nullo per ogni spostamento virtuale reversibile: la proposta vuol conferire a quelli che si sogliono chiamare vincoli lisci la qualità di vincoli del tipo più generale, prima ancora che il sistema risenta una qualsiasi tendenza a sfuggire all'attrito. Critica e proposta hanno una base comune: quando sia assegnata la legge delle forze attive, per un qualunque sistema di solidi, anche anolonomo, la condizione che il lavoro delle reazioni vincolari si annulli per ogni spostamento virtuale reversibile, basta sempre per ridurre il risultante e il momento risultante delle reazioni relative a ciascun solido a funzioni ben determinate del tempo esplicito, della posizione attuale del sistema e dell'atto di moto.

Proprio al Maggi è dovuta la felice denominazione di « atto di moto » per l'insieme delle velocità attuali dei singoli punti di un sistema materiale.

Ancor più diffusa è ormai la denominazione « Stereodinamica » introdotta dal Maggi per avvertire, per rimarcare le difficoltà che troppo spesso avversano la schematizzazione efficace dei solidi naturali in sistemi rigidi: ad es., essa ricorre in vari capitoli del grande *Handbuch der Physik* edito da Springer e c'è da domandarsi se anche nell'insegnamento della Meccanica applicata non converrebbe perfezionare l'ambigua denominazione di « problemi staticamente indeterminati » sostituendola, a seconda del caso, con quella di « problemi *stereostaticamente* indeterminati » o con quella di « problemi *stereodinamicamente* indeterminati ».

*
* *

Il mio sunto fugace lascia ancor fuori la più vasta opera del Maggi, la Sua personale esposizione della Meccanica razionale.

Questa è sostanzialmente contenuta nei *Principi della Teoria matematica del movimento dei corpi* pubblicati, come ho già detto, nel 1896; ma uno sviluppo molto più ampio essa ebbe in ben cinque volumi che, dopo qualche edizione in litografia, furono tutti stampati tra il 1903 e il 1925:

e precisamente, i *Principi di Stereodinamica* nel 1903, la *Dinamica fisica* nel 1912, la *Geometria del movimento* nel 1914, la *Dinamica dei sistemi* nel 1917, gli *Elementi di Statica* nel 1925. Quasi tutti questi trattati già da tempo hanno raggiunto la terza edizione.

L'esposizione del Maggi non può non essere la preferita di chi voglia attribuire alla Meccanica razionale un carattere spiccatamente macroscopico, perchè Egli prende le mosse non già dal punto materiale, ma dalla « figura materiale » mobile continuo omogeneo.

I Suoi postulati non sono gli ordinari. Sono più simili a quelli proposti dal Mach e collimano coi concetti di Clifford: massa e « forza motrice » di una figura materiale vengono *definite*, conferendo opportuni attributi all'accelerazione media della figura. Successivamente Egli passa al « sistema » di figure materiali, di densità generalmente diverse; da questo, con un procedimento di limite, al più generale « corpo naturale ».

Punto cardinale della Dinamica del Maggi è la netta, decisa distinzione della « Dinamica fisica » dalla « Dinamica dei sistemi ». La « Dinamica fisica » attinge dall'esperienza i postulati fondamentali, per fornire in ricambio un'espressione matematica delle principale modalità comuni a tutti i moti che si possono osservare in natura; la « Dinamica dei sistemi » altera deliberatamente il fatto fisico, pur di rendere calcolabili, entro convenienti limiti d'approssimazione, le singole categorie di moti concreti. Per questo scopo, caso per caso, occorre render più espressiva l'immagine messa a disposizione dalla Dinamica fisica, facendo risaltare certi caratteri del moto risaputi dall'Esperienza e marcando le parti del mobile soggette a forze esterne che non si sanno dedurre da una legge elementare concreta, quale la legge newtoniana; occorre cioè, come sinteticamente dice il Maggi, una « convenzione dinamica » e una « convenzione cinematica ».

* * *

La convenzione dinamica — tanto per l'intero mobile quanto per ogni sua parte — riassume la sollecitazione in un sistema di forze di massa deducibile da leggi elementari concrete e in un sistema di forze superficiali, le « pressioni » al contorno, da concepirsi anch'esse assegnabili coll'aiuto dell'Esperienza. Non è escluso che una particolare sollecitazione ugualmente si presti ad essere rappresentata da sole forze di massa e da sole forze al contorno: è quello che mirabilmente fece rilevare Maxwell colle celebri sue « tensioni »; è l'alterna vicenda delle teorie d'azione a distanza colle teorie di contatto. Neppure è esclusa la spontanea assenza di ogni pressione interna: è il caso che di recente si è presentato al Levi-Civita nellè sue ricerche sui moti per sola gravitazione di un sistema disgregato.

La convenzione cinematica si traduce in « vincoli » imposti al mobile, inclusa la scelta del suo contorno tra le infinite superficie matematiche che

ugualmente si prestano a dar forma macroscopica allo sterminato sciame di particelle costituente il mobile effettivo.

Questo microscopico elemento di arbitrarietà in definitiva deve riuscire numericamente insensibile, o quasi, anche quando si profitti di esso per ottenere dei vantaggi analitici dall'adozione di una superficie con punti singolari: in ogni caso, tra le due convenzioni deve stabilirsi un mutuo compenso per la più conforme riproduzione del moto concreto.

L'opera scientifica di Gian Antonio Maggi è indubbiamente poderosa; ma altrettanto grande è la Sua figura di educatore.

Nella Scuola, nella vita i Suoi discepoli faranno proprio l'unico desiderio da Lui espresso il giorno delle onoranze di Milano, quand'Egli chiuse il Suo discorso di ringraziamento dicendo:

Gli studi, coltivati con amore, con zelo, con fiducia, sono destinati a promuovere quella educazione dell'animo, i cui benéfici frutti si devono aspettare sui più molteplici campi, e, supremo frutto, se ne deve aspettare la formazione di una generazione atta a prestare opera veramente valida alla conservazione, al progresso, alla difesa dell'amato nostro Paese. Ch'io possa restare colla convinzione che la mia Scuola ha contribuito a questo insegnamento, e veramente mi consolerò del riposo, col dire fra me e me, senza bisogno che altri mi senta *non omnis morior*.

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI SCIENTIFICHE

DI G. A. MAGGI IN ORDINE CRONOLOGICO

1879. *Graduazione di un filo per misure elettriche*. « La Natura » Rivista di Sc. Fis. e Mat., Firenze, III.
Sulla misura del rapporto di due forze elettromotrici col metodo di compensazione. Ibidem.
Sull'elettrometro Mascart (in collaborazione con MOISÈ ASCOLI). « Rend. Ist. Lomb. » (2), XII.
1880. *Distribuzione dell'elettricità in equilibrio sopra due conduttori piani, indefiniti, paralleli, assoggettati all'induzione di un punto, situato nello spazio compreso tra essi*. « Memorie Lincei » (3), VII.
Sopra un problema di elettrostatica. « Rendiconti Ist. Lomb. » (2), XIII.
Sulla storia delle funzioni cilindriche. « Rendiconti Lincei » (4), IV.
1881. *Sul moto di un filo flessibile e inestensibile che si sposta pochissimo dalla sua posizione di equilibrio*. « Giorn. di Mat. », XIX.
- Induzione elettrica su conduttori limitati da piani indefiniti, assoggettati all'azione dei coibenti, caricati simmetricamente intorno a un asse*. « Memorie Lincei » (3), IX.
1882. *Intorno ad alcune formule relative al calcolo degli errori di osservazione*. « Rend. Ist. Lomb. » (2), XV.

1883. *Sul significato cinematico della superficie d'onda.* « Rend. Ist. Lomb. » (2), XVI.
Sulla trasmissione dei moti ondulatori e particolarmente dei moti ondulatori luminosi da un mezzo isotropo in un altro. Ibidem.
1884. *Sull'equilibrio delle superficie flessibili e inestendibili.* « Rend. Ist. Lomb. » (2), XVII.
Sull'integrazione delle equazioni differenziali del pendolo conico. Ibidem.
1886. *Sull'integrazione delle equazioni differenziali nel movimento oscillatorio di un filo flessibile e inestendibile, intorno a una configurazione di equilibrio.* « Rend. Ist. Lomb. » (2), XIX.
Riduzione di un integrale multiplo. Ibidem.
Deduzione della formula di Taylor. Ibidem.
Traduzione, con note, dell'opera: W. K. CLIFFORD, *The common sense of the exact sciences.* Milano, Fr. Dumolard.
1887. *Sulla propagazione libera e perturbata delle onde luminose in un mezzo isotropo.* « Ann. di Mat. » (2), XVI.
1889. *Sulla teoria dei doppi strati agenti.* « Rend. Ist. Lomb. » (2), XXII.
1890. *Sui principii della teoria della funzione potenziale.* « Nuovo Cimento » (3), XXVII.
1891. *Aggiunta alla N. — Sui principii ecc.* — « Rend. Ist. Lomb. » (2), XXIV.
Sulla teoria della funzione potenziale di superficie. I e II, Ibidem.
Osservazioni sulla N. — Sulla teoria ecc. — Ibidem.
1892. *Teorema di Stokes in coordinate generali.* « Atti Acc. Gioenia » (4), IV.
1893. *Sulle proprietà fondamentali della funzione potenziale nell'immediata prossimità e nell'estensione dell'agente.* « Nuovo Cimento » (3), XXXIII (pp. 71-82, 106-115, 249-59).
Sopra una serie inequabilmente convergente. « Rend. Ist. Lomb. » (2), XXVI.
 Estratto da una lettera al prof. PEANO in « Rivista di Matematica » III (Sulla formula di Simpson).
1894. *Sulle proprietà fondamentali della funzione potenziale nell'immediata prossimità e nell'estensione dell'agente.* « Nuovo Cimento » (3), XXXIV (pp. 22-31, 81-85).
1896. *Principii della teoria matematica del movimento dei corpi. Corso di Meccanica razionale.* Milano, Hoepli.
Sull'area delle superficie curve. « Rendiconti Lincei » (5), V (2°).
1899. *Lezioni sulla teoria del movimento dei sistemi di corpi rigidi.* Appunti del prof. G. A. MAGGI. Litografie.
1900. *Sulla teoria del pendolo.* « Giorn. di Mat. » XXXVIII.
Corso di Fisica matematica. Appunti del prof. G. A. MAGGI. Anno Acc. 1899-900. Litografie.
1901. *Réflexions sur l'exposition des principes de la mécanique rationnelle.* « Enseign. Math. » III.
Di alcune nuove forme delle equazioni della dinamica applicabili ai sistemi anonomi « Rendiconti Lincei » (5), X (2°).
Recensione dell'opera: H. WEBER, *Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik.* « Boll. di bibl. e storia delle scienze matematiche ».
Commemorazione di Eugenio Beltrami. « Annuario R. Univ. di Pisa ».
1903. *Principii di Stereodinamica. Corso sulla formazione, l'interpretazione e l'integrazione delle equazioni del movimento dei solidi.* Milano, Hoepli.
Sopra un punto della teoria del campo elettrostatico. « Rend. Ist. Lomb. » (2), XXXVI.
Lezioni di Fisica matematica, Anno Acc. 1902-03. Litografie.
1905. *Sull'interpretazione del nuovo teorema di Volterra sulla teoria della elasticità.* « Rendiconti Lincei » (5), XIV (2°).
Sulla teoria dell'attrito in relazione con la cinetostatica. « Nuovo Cimento » (5), X.

1907. *Appunti alla N. — Sulla teoria ecc.* — Ibidem (5), XIV.
1908. *Sugli spostamenti elastici discontinui.* « Rendiconti Lincei » (5), XVII.
1910. *Giacinto Morera. Commemorazione comunicata alla Società Mat. di Kharkoff.*
« Giorn. di Mat. » LXVIII [in russo; *Giazint Morera — Nekrolog* in « Soobs' cenza Karjkovskago Matematicheskago Obs' cestva » (*Communications de la Société Mathématique de Kharkoff*) (2), VI].
1911. *Sulle relazioni fondamentali del movimento relativo.* « Giorn. di Mat. » (2), XLIX.
1912. *Dinamica fisica. Lezioni sulle leggi generali del movimento dei corpi naturali, con un'appendice sul calcolo del movimento, il calcolo vettoriale e la cinematica.* Pisa, Spoerri.
1913. *Su alcune circostanze attinenti alla presenza di superficie di discontinuità e al passaggio all'infinito nella teoria del campo vettoriale.* « Rendiconti Lincei » (5), XXII (2°).
Fondamenti e stabilità della teoria razionale del movimento. « Annuario R. Univ. di Pisa ».
1914. *Sulla definizione del raggio luminoso dell'ottica fisica.* « Nuovo Cimento » (6), VII.
Sul teorema di Kirchhoff traduce il principio di Huygens. « Ann. di Mat. » (3), XXII.
Geometria del movimento. Lezioni di cinematica con un'appendice sulla geometria della massa. Pisa, Spoerri.
1915. *Elementi di Statica e Teoria dei vettori applicati. Elementi di Idrodinamica e Teoria delle pressioni intrinseche.* Pisa, Spoerri (litografie).
1916. *A proposito della spiegazione di una dimostrazione di scuola.* « Nuovo Cimento » (6), XII.
1917. *Posizione e soluzione di alcune questioni attinenti alla teoria delle distorsioni elastiche.* « Rendiconti Lincei » (5), XXVI (1°).
Sopra una formula commutativa e alcune sue applicazioni. Ibidem.
Nuove applicazioni di una formula commutativa. Ibidem (2°).
Sul collegamento di una funzione data nei punti di una superficie con una funzione dei punti dello spazio e sua applicazione alla teoria della funzione potenziale di doppio strato. « Nuovo Cimento » (6), XIV.
Dinamica dei sistemi. Lezioni sul calcolo del movimento dei corpi naturali. Pisa, Spoerri.
Elementi di Statica e Teoria dei vettori applicati. 2ª ed., Pisa, Spoerri (litografie).
1918. *Dinamica fisica. Lezioni ecc.* 2° ed., Pisa, Spoerri.
1919. *Geometria del movimento. Lezioni di cinematica con un'appendice, sulla geometria della massa.* 2ª ed., Pisa, Spoerri.
1920. *Sulla propagazione delle onde di forma qualsivoglia nei mezzi isotropi.* « Rendiconti Lincei » (5), XXIX (2°).
Elementi di statica e Teoria dei vettori applicati. 3ª ed., Pisa, Spoerri (litografie).
1921. *Dinamica fisica, Lezioni ecc.,* 3ª ed., Pisa, Spoerri.
Dinamica dei sistemi. Lezioni ecc. 2ª ed., Pisa, Spoerri.
Calcolo delle discontinuità delle derivate di ordine superiore dello spostamento di equilibrio elastico. « Rendiconti Lincei » (5), XXX (2°).
Esposizione compendiosa dei principii sostanziali della nuova teoria della relatività generale. « Nuovo Cimento » (6), XXI.
1922. *Elementi di Statica e Teoria dei vettori applicati.* 4ª ed., Pisa, Spoerri (litografie).
1923. *Sulle varie interpretazioni della trasformazione di Lorentz.* « Rendiconti Lincei » (5), XXXII (1°).

1924. *Commemorazione del Socio straniero Van der Waals*. « Rendiconti Lincei » (5), XXXIII (1°).
- Recensione dell'opera*: N. E. NÖRLUND, *Videnskabelige Causeries*. « Bollettino U. M. I. » III.
- Recensione dell'opera*: A. V. VASILJEF, *Prostranstvo, Vremja, Dvizgenie* (Spazio tempo, movimento). « Boll. di mat. (sezione storico-bibliografica) ».
- Corso di Fisica matematica. Appunti raccolti dagli studenti* GIOVANNI RICCI e GIORGIO RONCALI — Anno acc. 1923-24. Litografie.
1925. *Elementi di statica e Teoria dei vettori applicati con una introduzione sul calcolo vettoriale*. Bologna, Zanichelli.
- Riflessioni sulle recenti esperienze del prof. D. C. MILLER attinenti alla teoria della relatività*. « Rend. Ist. Lomb. » (2), LVIII.
- Sull'applicazione della formola di Stokes all'aberrazione astronomica*. Ibidem.
- Di una estrinsecazione energetica della tensione elettrostatica*. Ibidem.
- Che cos'è la forza centrifuga?* « Nuovo Cimento » N. S., II.
1926. *Sul raggio di luce nell'ottica fisica*. « Rend. Ist. Lomb. » (2), LIX.
- Recenti vicende della teoria della relatività*. « Per. di Mat. » (4), VI.
1927. *Discorso pronunciato per l'inaugurazione del Seminario matematico e fisico di Milano*. « Rend. Sem. Mil. » I.
- Di un recentissimo studio del Somigliana attorno al Geoide*. Ibidem.
- In memoria di G. Joung*. Ibidem.
- Il raggio energetico nelle onde sferiche longitudinali*. « Rend. Ist. Lomb. » (2), LX.
- Commemorazione di Giuseppe Joung*. Ibidem.
- In quanto tempo un pianeta, fermato, cadrebbe nel sole?* « Per. di Mat. » (4), VII.
- Geometria del movimento, Lezioni ecc.* 3^a ed., Bologna, Zanichelli.
- Recensione dell'opera*: A. V. VASILJEF, *Zeloe Cisko* (Numero intero). « Boll. di Mat. (sezione storico-bibliografica) » e « Scientia ».
1928. *Sulla propagazione delle onde di forma qualsivoglia da un mezzo isotropo in un altro*. « Atti del Congresso Int. di Mat. di Bologna » V.
1929. *Appunti sull'estensione del principio delle velocità virtuali alle pressioni d'attrito*. « Rend. Ist. Lomb. » (2), LXII.
- Sulla funzione potenziale di un doppio strato*. « Rendiconti Lincei » (6), IX.
- Sul significato, nel passato e nell'avvenire, delle equazioni dinamiche*. « Rend. Sem. Mil. » III.
1930. *Sulla generalizzazione e applicazione di un teorema di univocità*. « Rend. Ist. Lomb. » (2), LXIII.
- Come va intesa la forza centrifuga*. « Per. di Mat. » (4), X.
- In memoria del prof. Aldo Pontremoli: discorso*. « Annuario R. Univ. di Milano ».
1931. *Complemento ad un teorema di analisi*. « Rend. Ist. Lomb. » (2), LXIV.
- Albert Abraham Michelson. Cenno necrologico*. Ibidem.
- Per Luigi Cremona*. « Rend. Sem. Mil. » V.
- Sull'attrito, in rapporto con la cinetostatica e con la classificazione dei vincoli*. Ibidem.
- Dimostrazione di una proprietà attinente alla teoria della funzione potenziale di superficie*. « Rendiconti Lincei » (6), XIII.
- Teoria fenomenologica del campo elettromagnetico*. Milano, Hoepli.
- Selecta*. Milano, E. S. T.
1932. *Cosmo newtoniano e nuovi cosmi: discorso inaugurale*. « Rend. Ist. Lomb. » (2), LXV.
- Discorso pronunciato in occasione delle onoranze tributategli*. « Annuario R. Univ. di Milano ».

1933. *Sul problema della riflessione e rifrazione delle onde elettromagnetiche armoniche di forma qualsivoglia ad una superficie piana.* « Rend. Ist. Lomb. » (2), LXVI.
Sulla teoria dell'elettroforo di Volta. Ibidem.
Riflessione e rifrazione delle onde elettromagnetiche di forma qualsivoglia ad una superficie piana. « Rendiconti Lincei » (6), XVIII.
La questione della superficie d'onda. « Rend. Sem. Mil. », VII.
1934. *Complementi alla N. — Riflessione ecc. —* « Rendiconti Lincei » (6), XIX.
Nuovi complementi alla N. — Riflessione ecc. Ibidem.
Soluzione del problema della riflessione e rifrazione delle onde elettromagnetiche armoniche ecc. « Rend. Ist. Lomb. » (2), LXVII.
(e B. FINZI) *Condizioni di esistenza delle onde elettromagnetiche armoniche.* Ibidem.
1935. *Onde elettromagnetiche armoniche.* « Rend. Sem. Mil. », IX.
Eugenio Beltrami nel centenario della nascita. Ibidem.
Sulla costante universale nella teoria delle dimensioni delle quantità elettromagnetiche. « Rend. Ist. Lomb. » (2) LXVIII.
(e B. FINZI) *Una questione relativa alle onde elettromagnetiche armoniche.* « Rendiconti Lincei » (6), XXII.
1936. *Complemento alle condizioni di Love.* « Boll. U. M. I. », XV.
Luigi De Marchi, Cenno necrologico. « Rend. Ist. Lomb. » (2), LXIX.
Notevole complemento alle condizioni di Love e sue applicazioni. « Rendiconti Lincei » (6), XXIII.
(e B. FINZI) *Condizioni sulla fronte d'onda e onde elettromagnetiche armoniche.* Ibidem.
1937. *Sulla rappresentazione matematica della tensione elettrostatica.* « Rend. Ist. Lomb. » (2), LXX.
Sulle derivate tangenziali della funzione potenziale di superficie. « Rendiconti Lincei » (6), XXV.
Una singolare riserva. « Per. di Mat. » (4), XVII.

Commemorazione del Socio VITTORIO ADUCCO, fatta dal Corrisp. S. VISCO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

PERSONALE ACCADEMICO

Il PRESIDENTE dà ai Colleghi il doloroso annuncio della morte di ALFONSO DI LEGGE, decano dell'Accademia e degli astronomi italiani e invia alla Sua memoria un mesto e reverente saluto.

Il Socio ARMELLINI rievoca brevemente la figura del suo venerato Maestro ed esprime il cordoglio per la Sua morte a nome di tutti i discepoli, dell'Osservatorio Astronomico di Roma e dell'Accademia Pontificia delle Scienze.

I Corrispondenti SIGNORINI e VISCO commemorano rispettivamente i Soci MAGGI e ADUCCO.

Il Presidente MILLOSEVICH ringrazia ambedue gli oratori.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Presidente MILLOSEVICH presenta alla Classe il volume dal titolo *Augustus*, pubblicato dall'Accademia in occasione del Bimillenario Augusteo e comunica che la prima copia di esso è stata inviata in omaggio a S. M. il Re Imperatore e un'altra copia è stata presentata personalmente dal Presidente e dal Vice-Presidente dell'Accademia a S. E. il Capo del Governo, che ha avuto parole di elogio per l'attività dei Lincei.

L'Accademico Segretario PARRAVANO presenta i libri giunti in omaggio all'Accademia segnalando: il volume « Centri Rurali » pubblicato dall'Istituto per la bonifica della Sicilia; N. Mazzocchi Alemanni, « La Conquista rurale dell'Agro Pontino »; C. Charrier, « Guida all'analisi chimica quantitativa »; il vol. II°, parte IIª della « Enciclopedia delle Matematiche Elementari ».

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per l'inserzione nei Rendiconti i Soci: BLANC, BAGLIONI, CARANO, CARNERA, DE BLASI, GIORGI e LEVI-CIVITA.

Sull'argomento della Nota presentata dal Socio BLANC chiede la parola il Socio TARAMELLI, il quale afferma che la posizione degli archeologi preistorici è tale da dimostrare la grande utilità delle Accademie del tipo misto, nelle quali lo studioso delle scienze morali può essere aiutato dagli studiosi delle scienze fisiche e naturali. Gli archeologi che ricercano le antichissime tracce delle famiglie umane sentono quanta luce giunge loro, nel vagolare nei bui campi dei millenni passati, dallo studio delle traccie della flora e della fauna che si accompagnano agli avanzi delle industrie umane negli strati delle stazioni e delle grotte da loro esplorate. Si augura che nelle esplorazioni delle grotte del Mediterraneo e dell'Italia in special modo sia data importanza alla collaborazione tra archeologi, studiosi del materiale umano e scienziati, studiosi degli avanzi di flora e di fauna.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 1° maggio 1938.

- ARAMBOURG C. — Contribution à l'étude des poissons du lias supérieur. (Extr. des «Annales de Paléontologie». Tome XXIV). Paris, 1935. 4°, pp. 1-32, pl. I-III.
- ARAMBOURG C. — Description de vertébrés fossiles (poissons et reptiles) provenant de la mission du Tibesti. (Extr. des «Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France». T. 61). Paris, 1934. 4°, pp. 1-7.
- ARAMBOURG C. — La grotte de la carrière Anglade à Guyotville (Alger) (Extr. du «Bulletin de la Société d'Histoire Naturelle de l'Afrique du Nord», T. XXVI, pp. 15-22). Alger, 1935. 8°.
- ARAMBOURG C. — Le Dinotherium des gisements de l'Omo (Abyssinie). (Extr. du «Bulletin de la Société géologique de France». T. IV, 1934, pp. 305-310). Paris, 1934. 8°.
- ARAMBOURG C. — Les formations éruptives du Turkana (Afrique Orientale). (Extr. des «Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences». T. 198). Paris, 1934. 4°, pp. 1-3.
- ARAMBOURG C. — Les formations pré-tertiaries de la bordure occidentale du lac Rodolphe (Afrique Orientale). (Extr. des «Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences». T. 197). Paris, 1933. 4°, pp. 1-3.
- ARAMBOURG C. — Mission scientifique de l'Omo (1932-1933). Tome I. Géologie, Antropologie. (Muséum National d'Histoire Naturelle). Paris, 1935. 4°, pp. 1-59, Pl. I-III.
- ARAMBOURG C. — Note préliminaire sur les vertébrés fossiles des phosphates du Maroc. (Extr. du «Bulletin de la Société géologique de France». T. V, pp. 413-440). s. l. 1935. 8°.
- ARAMBOURG C. — Note préliminaire sur une nouvelle grotte à ossements des environs d'Alger (Extr. du «Bulletin de la Société d'Histoire Naturelle de l'Afrique du Nord». T. XXIII, pp. 154-162). Alger, 1932. 8°.
- ARAMBOURG C. — Notice sur les travaux scientifiques de C. A. Paris, 1936. 4°, pp. 1-110.
- ARAMBOURG C. — Observations sur quelques poissons fossiles de l'ordre des Halécostomes et sur l'origine des Clupéidés. (Extr. des «Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences». T. 200). Paris, 1935. 8°, pp. 1-3.
- ARAMBOURG C. — Poissons fossiles du bassin sédimentaire du Gabon. (Extr. des «Annales de Paléontologie». T. XXIV). Paris, 1935. 4°, pp. 1-160, Pl. I-III.
- BERZOLARI L., VIVANDI G. e GIGLI D. — Enciclopedia delle matematiche elementari. Vol. II, parte II. Milano, Editore Hoepli Ulrico, 1938. 8°, pp. I-XI, 1-572.
- BOK BART J. and LINDSAY ERIC M. — Note of the stellar distribution in the vicinity of a southern galactic Window. (Reprinted from the «Proceedings of the National Academy of Sciences». Vol. XXIV). S. l. 1938. 8°, pp. 1-9.
- CHARRIER G. — Guida all'analisi chimica quantitativa. Torino, 1938. 8°, pp. I-XII, 1-193.
- DE TONI GIUSEPPE. — La nomenclatura botanica sistematica ed i suoi problemi. (Estr. dalla «Rivista di Biologia» Vol. XXIV). Firenze, 1938. 8°, pp. 1-12.
- GIGLI D. — Vedi BERZOLARI L.

- GAPOSCHKIN SERGEI. — Asymmetry of light curves in the great sequence as a function of frequency of period. (Reprinted from the «Proceedings of the National Academy of Sciences». Vol. XXIV). S. l. 1938. 8°, pp. 1-4.
- Istituto Vittorio Emanuele III per il bonificamento della Sicilia. (Centri rurali. Studi monografie, rapporti. IV). Palermo, 1937. 8°, pp. 1-148.
- LONGO BIAGIO. — Relazione per l'anno 1937 sulla Stazione sperimentale per le piante officinali annesse al R. Orto Botanico di Napoli. (Estr. dal «Bull. dell'Orto Botanico della R. Università di Napoli». T. XIV, pp. 43-58). Napoli, 1937. 8°.
- LUPO VINCENZO. — Revisione delle cocciniglie italiane (Estr. dal «Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici». Vol. XXX, pp. 123-162). Portici, 1938. 8°.
- MAZZOCCHI ALEMANNI NALLO. — La conquista rurale dell'Agro Pontino; aspetti tecnici, economici e sociali. (Estr. da «La Conquista della Terra». 1937). Roma, 1938. 8°, pp. 1-102.
- R. Osservatorio per le malattie delle piante di Portici. — La Dorifera, flagello della coltivazione della patata. (Ministero dell'Agricoltura e Foreste). S. l. s. d. 8°.
- PEARL RAYMOND. — Biological factors in Fertility. (Reprinted from the «Annals of the American Academy of Political and Social Science». 1936). Philadelphia, 1936. 8°, pp. 1-12.
- PEARL RAYMOND. — Fertility and Contraception in New York and Chicago. (Reprinted from the «Journal of the American Medical Association». Vol. 108). Chicago, 1937. 8°, pp. 1-16.
- PEARL RAYMOND. — Karl Pearson, 1857-1936. (Reprinted from the «Journal of the American Statistical Association». Vol. XXXI, pp. 653-664. S. l. 1936. 8°.
- PEARL RAYMOND. — On biological principles affecting populations: human and other. (Reprinted from the «American National». Vol. LXXI, pp. 50-68). S. l. 1937. 8°.
- PEARL RAYMOND. — On the weight of the parathyroids. (Reprinted from «Human Biology». Vol. IX, pp. 245-250). Baltimore, 1937. 8°.
- PEARL RAYMOND. — Potential and actual reproductive performance in man. (Reprinted from «Human Biology». Vol. VIII, pp. 508-530). Baltimore, 8°. 1936.
- PEARL RAYMOND. — Specific fertility and contraceptive rates in New York City and Chicago. (Reprinted from the «American Journal of Hygiene». Vol. XXV, pp. 507-519). S. l. 1937. 8°.
- PEARL RAYMOND. — Variation in parity of women bearing children in the U. S. birth registration area in 1934. Part. I. (Reprinted from «Human Biology». Vol. IX, pp. 65-244). Baltimore, 1937. 8°.
- PEARL RAYMOND and PEARL MAUD DEWITT. — The prices of biological books in 1936. (Reprinted from the «Quarterly Review of Biology». Vol. XI). S. l. 1936. 8°, pp. 1-3.
- SILVESTRI FILIPPO. — Descrizione di tre specie africane di Margarodini (Insecta Homoptera, Coccidae). (Estr. dal «Bollettino dell'Istituto di Entomologia della R. Università di Bologna». Vol. X, pp. 35-43). Bologna 1938, 8°.
- SILVESTRI F. — Termitidi raccolti nel Fezzan dal prof. Scortecci. (Missione della R. Società Geografica). (Estr. dagli «Atti della Soc. It. di Scienze Naturali». Vol. LXXVII, pp. 65-72). Milano, 1938. 8°.
- SILVESTRI F. — Tisanuri raccolti nel Fezzan dal prof. G. Scortecci. (Missione della R. Società Geografica). (Estr. dagli «Atti della Soc. It. di Scienze Naturali». Vol. LXXVII, pp. 61-64). Milano, 1938. 8°.
- VIVANTI G. — Vedi BERZOLARI L.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 15 maggio 1938 — Anno XVI

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica (Geometria algebrica). — *Sulla costruzione delle serie di equivalenza sopra una curva algebrica riducibile.* Nota di G. GHERARDELLI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio F. SEVERI.

1. In una Nota recente ⁽²⁾ F. Severi caratterizza le serie unirazionali o razionali involutorie sopra una curva riducibile: i gruppi di una tal serie sono somme di gruppi di serie lineari date sulle componenti della curva omologhi in una corrispondenza plurilineare assegnata fra le serie stesse.

In questa Nota si considerano quelle (particolari) plurilinearità che corrispondono a serie di equivalenza.

2. Si considerino t spazi lineari $[r_1], [r_2], \dots, [r_t]$ indipendenti cioè appartenenti ad uno spazio di $r + t - 1$ dimensioni ($r = \sum r_i$). La varietà V dei $[t - 1]$ incidenti ai t spazi $[r_i]$ rappresenta birazionalmente senza eccezioni le t -ple di punti tolte dai t spazi: è un modello proiettivo della corrispondente varietà di Segre ⁽³⁾. Si consideri entro V la V_ρ (razionale) costituita dai $[t - 1]$ che incontrano un generico S_ρ ($\rho < r$); è facile scrivere le relazioni che legano le coordinate omogenee x_i, y_h, \dots, z_k dei t punti (indipendenti) nei quali un $[t - 1]$ di V_ρ incontra i t spazi fondamen-

(1) Nella seduta del 15 maggio 1938.

(2) « Rend. Acc. Lincei », vol. XXVII, ser. 6^a, fasc. 2, p. 53, n. 6.

(3) Cfr. F. SEVERI, *Conferenze di Geometria Algebrica* (Bologna, Zanichelli), p. 68.

($\alpha, \beta, \dots, \gamma$ fattori di proporzionalità). Inversamente le (2) rappresentano in ogni caso una serie di equivalenza su C . Sieno infatti:

$$\sum x_i f_i = 0 \quad \sum y_h \varphi_h = 0 \dots \sum \chi_k \psi_k = 0$$

i sistemi lineari di forme che segano su $C_1 C_2 \dots C_t$ le serie lineari elementari $g^{r_1} g^{r_2} \dots g^{r_t}$: sistemi che senza restrizione possiamo supporre d'un medesimo ordine. Se F_i ($i = 1, 2, \dots, t$) è una forma contenente tutte le componenti di C salvo C_i , il sistema lineare:

$$F_1 \sum x_i f_i + F_2 \sum y_h \varphi_h + \dots + F_t \sum \chi_k \psi_k = 0$$

di dimensione $r + t - 1$ sega su C la serie d'equivalenza g^r e, con i suoi subordinati, tutte le serie di equivalenza subordinate di g^r : è il sistema lineare « aggiunto » ⁽¹⁾ di Severi. Ora le (2) determinano un sistema lineare subordinato di quel sistema aggiunto e perciò una g^e subordinata della g^r .

Si osservi ora che affinchè le (2) riguardate come equazioni lineari omogenee nelle $\alpha\beta \dots \gamma, \lambda_0 \dots \lambda_e$ risultino compatibili per valori non tutti nulli di queste indeterminate è necessario e sufficiente che la matrice di $r + t$ righe e $\rho + t + 1$ colonne:

$$(3) \quad \left| \begin{array}{cccccc} x_0 & 0 & \dots & 0 & a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0e} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{r_1} & 0 & \dots & 0 & a_{r_1 0} & a_{r_1 1} & \dots & a_{r_1 e} \\ & 0 & y_0 & \dots & 0 & b_{00} & b_{01} & \dots & b_{0e} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & y_{r_2} & \dots & 0 & b_{r_2 0} & b_{r_2 1} & \dots & b_{r_2 e} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & 0 & 0 & \dots & \chi_0 & c_{00} & c_{01} & \dots & c_{0e} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \chi_{r_t} & c_{r_t 0} & c_{r_t 1} & \dots & c_{r_t e} \end{array} \right|$$

sia di caratteristica $\rho + t$. Si rappresentino omograficamente i gruppi di $g^{r_1} \dots g^{r_t}$ con i punti di t spazi lineari indipendenti $[r_1] [r_2], \dots, [r_t]$; la g^r è rappresentata birazionalmente senza eccezioni dalla varietà V dei $[t - 1]$ incidenti ai t spazi $[r_i]$. Ora il fatto che la matrice (3) sia di caratteristica $\rho + t$ esprime che i $[t - 1]$ di V corrispondenti ai gruppi della g^e sono incidenti allo spazio lineare S_e le cui coordinate grassmanniane sono i minori d'ordine $\rho + 1$ estratti dalla matrice delle $ab \dots c$. Si conclude che:

Una serie di equivalenza g^e contenuta nella serie di equivalenza completa che subordina sulle singole componenti di C date serie lineari $g^{r_1} g^{r_2} \dots g^{r_t}$, si ottiene ponendo fra queste serie elementari una plurilinearità nucleata di dimensione ρ .

(1) F. SEVERI, loc. cit.

Matematica. — *Sulle superficie totalmente geodetiche negli spazi di Finsler.* Nota di M. HAIMOVICI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli sforzi.* Nota III di C. CATTANEO, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Oggetto della Nota presente è la determinazione effettiva delle azioni tangenziali nell'area σ di contatto di due corpi elastici premuti obliquamente, sulla base delle equazioni integrali stabilite e precisate nelle due precedenti Note I e II ⁽²⁾. La numerazione dei paragrafi e delle formule che seguono è in continuazione di quella delle Note citate, alle quali faccio riferimento.

Dalle considerazioni svolte nel n. 6 è risultato che alla determinazione in σ degli sforzi tangenziali si giunge, nel caso generale, attraverso due fasi:

a) determinazione degli sforzi tangenziali nell'ipotesi di *aderenza completa*, o, in altri termini, risoluzione delle equazioni (7) supponendo $\sigma^* \equiv \sigma$; questa soluzione ausiliaria permette di precisare, nella zona anulare τ compresa fra σ e σ^* , la direzione dello sforzo tangenziale, la cui intensità, d'altra parte, è parimenti individuata [(12)];

b) risoluzione delle (7) subordinatamente ai risultati ausiliari ottenuti.

Praticamente il procedimento risulta molto semplificato, dato che la direzione degli sforzi nell'area τ si può *a priori* individuare, salvo verifica successiva, senza ricorrere alla determinazione completa della distribuzione ausiliaria.

7. CASO DI UN'AZIONE TANGENZIALE RISULTANTE DIRETTA SECONDO UNO DEGLI ASSI PRINCIPALI DELL'AREA ELLITTICA DI CONTATTO. — Poniamo:

$$(12) \quad L_0 = \int_{\sigma} L d\sigma, \quad M_0 = \int_{\sigma} M d\sigma, \quad N_0 = \int_{\sigma} N d\sigma,$$

e supponiamo:

$$M_0 = 0.$$

È spontaneo in tal caso presumere che in tutta la σ risulti identicamente:

$$M(x, y) \equiv 0$$

(1) Nella seduta del 15 maggio 1938.

(2) Pubblicate in questo stesso volume dei « Rendiconti », fascicoli 7 e 8.

e le equazioni (7), avuto riguardo al significato meccanico delle costanti a secondo membro, si scrivono in conseguenza così:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\pi\mu} \int_{\sigma} L \frac{1}{r} d\sigma - \frac{\lambda}{2\pi\mu(\lambda + \mu)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{\sigma} Lr d\sigma = \alpha \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_{\sigma} Lr d\sigma = 0. \end{array} \right\} \text{ valide in } \sigma^*$$

Integrando due volte la seconda equazione e sostituendo convenientemente nella prima, si ottiene la conseguenza *necessaria*:

$$(14) \quad \int_{\sigma} L \frac{1}{r} d\sigma = l \quad \text{valida in } \sigma^*$$

nella quale l indica una costante.

Avvertiamo per inciso che, qualora si supponesse $\sigma^* \equiv \sigma$ (caso di aderenza perfetta), la distribuzione di L risulterebbe uguale a quella di una carica elettrica L_0 in un disco ellittico conduttore isolato. Ma tale soluzione, lo ripetiamo, è incompatibile con le leggi empiriche dell'attrito, assumendo valori infiniti ai bordi di σ .

Si soddisfa invece alle esigenze del problema fisico, conformemente alle ipotesi del n. 6, ponendo:

$$(15) \quad L = fN \quad \text{in } \tau$$

in conseguenza della quale l'equazione (14) si scrive così:

$$(16) \quad \int_{\sigma^*} (fN - L) \frac{1}{r} d\sigma = f \int_{\sigma} N \frac{1}{r} d\sigma - l \quad \text{in } \sigma^*$$

ovvero, tenendo conto della (8):

$$(17) \quad \int_{\sigma^*} (fN - L) \frac{1}{r} d\sigma = f \frac{2\pi(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} (\gamma - Ax^2 - By^2) - l \quad \text{in } \sigma^*.$$

È la (17) un'equazione perfettamente analoga alla (8) e, come questa, permette di precisare, mediante il geniale procedimento di Hertz, sia i valori assunti in σ^* dalla funzione incognita $fN - L$, sia la grandezza dei semiassi dell'areola σ^* .

Precisamente, tenuto conto dei risultati del n. 5, si ha:

$$(18) \quad \left(\frac{a^*}{a}\right)^3 = \left(\frac{b^*}{b}\right)^3 = \frac{fN_0 - L_0}{fN_0},$$

$$(19) \quad fN - L = \frac{3}{2} \frac{fN_0 - L_0}{\pi a^* b^*} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^{*2}} - \frac{y^2}{b^{*2}}} \quad \text{in } \sigma^*.$$

La (18) conferma che la zona degli scorrimenti nulli è un'ellisse omotetica a σ , la quale coincide con la σ medesima quando $L_0 = 0$ e si riduce a un punto, come è naturale, quando $L_0 = fN_0$ (stato prossimo allo scorrimento mutuo dei due corpi).

Riassumendo e tenendo conto dell'espressione di N fornita dalla (9), possiamo finalmente dare la distribuzione dello sforzo tangenziale in tutta la σ :

$$(20) \quad \begin{cases} L = fN = \frac{3}{2} \frac{fN_0}{\pi ab} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} & \text{in } \tau \\ L = \frac{3}{2} \frac{fN_0}{\pi ab} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} - \frac{3}{2} \frac{fN_0 - L_0}{\pi a^* b^*} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^{*2}} - \frac{y^2}{b^{*2}}} & \text{in } \sigma^*. \end{cases}$$

Lo sforzo tangenziale è dunque costante su ellissi omotetiche; la sua distribuzione è inoltre continua in tutta la σ , cosicchè le ipotesi del n. 6 risultano in certo modo giustificate.

8. VERIFICA DEI RISULTATI OTTENUTI. — È necessario ora accertarsi che i risultati precedenti, dedotti dalla (14), soddisfanno effettivamente alle (13).

Allo scopo poniamo:

$$(21) \quad U(x, y) = \int_{\sigma} Lr \, d\sigma, \quad V(x, y) = \int_{\sigma^*} (L - fN) r \, d\sigma, \\ W(x, y) = \int_{\sigma} fNr \, d\sigma,$$

cosicchè

$$(22) \quad U(x, y) = V(x, y) + W(x, y) \quad \text{in } \sigma^*.$$

Posto inoltre

$$k = f \frac{2\pi(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu}, \quad h = \frac{3}{2} \frac{fN_0 - L_0}{\pi a^* b^*}$$

e tenute presenti le (17) e (19), abbiamo:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = x \int_{\sigma^*} \frac{L - fN}{r} \, d\sigma - \int_{\sigma^*} (L - fN) \frac{\xi}{r} \, d\sigma \\ = x \{ k (Ax^2 + By^2 - \gamma) + l \} - \int_{\sigma^*} (L - fN) \frac{\xi}{r} \, d\sigma.$$

Deriviamo ora rispetto a y :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 2kBy - \int_{\sigma^*} (L - fN) \xi \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} \, d\sigma;$$

considerando ora che $\frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{\partial r}{\partial \eta}$ e che la funzione $L - fN$ si annulla sul contorno di σ^* , l'integrale a secondo membro si può eseguire per parti onde si può scrivere:

$$(23) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 2k B xy - \frac{b}{b^{*2}} \int_{\sigma^*} \frac{\xi \eta}{\sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^{*2}} - \frac{\eta^2}{b^{*2}}}} d\sigma.$$

Eseguendo in ordine inverso le derivazioni di $V(x, y)$ si ottiene ancora:

$$(24) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 2k A xy - \frac{b}{a^{*2}} \int_{\sigma^*} \frac{\xi \eta}{\sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^{*2}} - \frac{\eta^2}{b^{*2}}}} d\sigma,$$

ed eliminando la quantità $b \int_{\sigma^*} \frac{\xi \eta}{\sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2}}} d\sigma$ tra (23) e (24):

$$(25) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 2k \frac{b^{*2} B - a^{*2} A}{b^{*2} - a^{*2}} xy.$$

In modo identico, avendo riguardo alle (8) e (10), si ottiene ancora:

$$(26) \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = -2k \frac{b^2 B - a^2 A}{b^2 - a^2} xy$$

e quindi, visto che $\frac{a}{b} = \frac{a^*}{b^*}$, si deduce

$$(27) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{in } \sigma^*.$$

La seconda delle (13) è quindi soddisfatta. Facilmente si constata poi, mediante la (27) e la (14), che:

$$(28) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = m \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = n \quad \text{in } \sigma^*,$$

essendo m e n due costanti tali che

$$(29) \quad m + n = l;$$

di modo che anche la prima delle (13) risulta soddisfatta.

9. CASO DI UN'AZIONE TANGENZIALE RISULTANTE DIRETTA SECONDO UNA DIREZIONE QUALSIASI. — Supponiamo adesso

$$L_0 = 0 \quad \text{e} \quad M_0 = 0,$$

e indichiamo con σ_1^* e con σ_2^* due aree ellittiche omotetiche a σ e ad essa interne, e con τ_1 e τ_2 i rispettivi anelli marginali.

Risolveremo le (7), soddisfacendo separatamente ai due sistemi di equazioni:

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\pi\mu} \int_{\sigma} L \frac{1}{r} d\sigma - \frac{\lambda}{2\pi\mu(\lambda + \mu)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{\sigma} Lr d\sigma = \alpha \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_{\sigma} Lr d\sigma = 0 \end{array} \right\} \text{ in } \sigma_1^*$$

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\pi\mu} \int_{\sigma} M \frac{1}{r} d\sigma - \frac{\lambda}{2\pi\mu(\lambda + \mu)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{\sigma} Mr d\sigma = \beta \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_{\sigma} Mr d\sigma = 0 \end{array} \right\} \text{ in } \sigma_2^*$$

che sono del tipo (13) considerato nel numero 7.

Completiamo tali equazioni ponendo:

$$(32) \quad L = pfN \quad \text{in } \tau_1$$

$$(33) \quad M = qfN \quad \text{in } \tau_2$$

dove p e q , costanti, sono definite così:

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} p^2 + q^2 = 1 \\ \frac{p}{q} = \frac{L_0}{M_0} \end{array} \right.$$

Per ciascuno dei due sistemi (30) (31) si possono applicare senz'altro i risultati del n. 7, pur di sostituire ad f una volta pf e una volta pq . Si ha immediatamente:

$$\left(\frac{a_1^*}{a_2^*} \right)^3 = \left(\frac{b_1^*}{b_2^*} \right)^3 = \frac{q(pfN_0 - L_0)}{p(qfN_0 - M_0)}$$

e quindi, per la (34):

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1^* = a_2^* \\ b_1^* = b_2^* \end{array} \right.$$

Resta perciò definita anche nel caso generale l'area σ^* degli scorri-menti nulli; quanto alla distribuzione degli sforzi, costanti su ellissi omo- tetiche, essa è data in $\tau \equiv \tau_1 \equiv \tau_2$ dalle (32) e (33) e in $\sigma^* \equiv \sigma_1^* \equiv \sigma_2^*$ dalle formule seguenti:

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} L = \frac{3}{2} \frac{pfN_0}{\pi ab} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} - \frac{3}{2} \frac{pfN_0 - L_0}{\pi a^* b^*} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^{*2}} - \frac{y^2}{b^{*2}}} \\ M = \frac{3}{2} \frac{qfN_0}{\pi ab} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} - \frac{3}{2} \frac{qfN_0 - M_0}{\pi a^* b^*} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^{*2}} - \frac{y^2}{b^{*2}}} \end{array} \right.$$

Fisiologia. — *Nuova conferma sperimentale per la necessaria partecipazione della via afferente congenita al meccanismo dei riflessi condizionati*⁽¹⁾. Nota di A. ALIBRANDI, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. C. CIACCIO.

È stato oggetto di studio in questi ultimi anni nell'Istituto di Fisiologia di Messina un particolare riflesso motorio condizionato del cane: il riflesso dell'ammiccamento (G. Martino⁽³⁾ e G. Martino e A. Alibrandi⁽⁴⁾).

L'analisi di esso ha consentito interessanti osservazioni e deduzioni relativamente all'intimo meccanismo dei riflessi associativi. Si è infatti sostenuto che l'azione dello stimolo sensoriale condizionato si esplica solo mercé fenomeni di agevolazione (o Bahnung), e che la reazione associativa (o condizionata) avviene per le medesime vie del riflesso assoluto congenito.

Non già sostituzione della via centripeta innata con una nuova via afferente come dal Pavlov era stato ammesso, ma facilitazione della reazione ordinaria per forte esaltamento dell'eccitabilità nel centro riflesso. Abbiamo infatti potuto dimostrare che la soglia dell'eccitabilità del centro riflesso marcatamente si abbassa sotto l'azione dello stimolo condizionato.

Il riflesso dell'ammiccamento consiste nella rapida contrazione del m. orbicolare palpebrale per effetto della stimolazione di un territorio cutaneo compreso nella metà omolaterale della faccia; esso è dominato da un centro corticale della zona sigmoidea controlaterale, facilmente identificabile mediante la stimolazione faradica unipolare; esso può essere provocato, in ogni cane, colla stimolazione artificiale della rispettiva zona cutanea. È questo il riflesso assoluto o fisiologico o congenito dell'ammiccamento: associando ad esso segnali di opportune, costanti e ben note caratteristiche fisiche, ci è stato possibile provocare la comparsa delle reazioni associative o condizionate. Le luci monocromatiche si dimostrarono menò efficaci rispetto ai segnali sonori nel provocare la comparsa del riflesso associativo: non solo si ottenne mediante il suono una più facile elaborazione del riflesso, ma

(1) Dall'Istituto di Fisiologia umana della R. Università di Messina.

(2) Nella seduta del 15 maggio 1938.

(3) G. MARTINO, *Necessità dell'ordinaria via afferente, costante ed insostituibile nel meccanismo del riflesso associativo*. «Atti R. Acc. Peloritana», 1936; *Sobre el mecanismo de los reflejos condicionados*. «Tribuna Universitaria», 1936.

(4) G. MARTINO e A. ALIBRANDI, *Analisi di un particolare riflesso condizionato (dell'ammiccamento), nel cane*. «Boll. Soc. It. di Biol. sper.», 1936; *L'attività riflessa dei centri sensitivo-motori corticali sotto l'azione di stimoli condizionati*. «Arch. di Fisiol.», 534, 37, 1937; *L'agevolazione e l'inibizione, in rapporto alla qualità dello stimolo luminoso nel riflesso condizionato dell'ammiccamento*. «Arch. di Fisiol.», 1938.

questo si manifestò pure più pronto, più energico, notevolmente più resistente al fenomeno dell'estinzione⁽¹⁾.

Nel corso di queste precedenti esperienze avevamo visto che l'anestesia della cute riflessogena partecipante al riflesso congenito provoca la scomparsa non solo di quest'ultimo ma anche di quello dovuto allo stimolo fotico; ciò che ci aveva indotto ad affermare che la persistenza e la pervietà della via afferente ordinaria è condizione indispensabile al manifestarsi della reazione associativa.

Risultando, a parità di altre condizioni, come si è detto, molto più energica l'azione dello stimolo acustico, rispetto a quello luminoso, parve opportuno ripetere nel cane educato al riflesso condizionato per stimolo acustico la prova di stovainizzazione della cute riflessogena precedentemente eseguita nel cane educato al riflesso condizionato per stimolo luminoso.

Educammo pertanto, colla medesima tecnica descritta in una precedente comunicazione⁽²⁾ un cane giovane, ma a completo sviluppo, a due riflessi condizionati dell'ammiccamento: per l'occhio destro con la nota fa₇ (5.568 vibrazioni) e per il sinistro con la nota mi₇ (5.520 vibrazioni).

Pur essendo l'intervallo tra le due note corrispondente ad appena un semitono, il cane cominciò dopo un certo numero di sedute a discriminare sempre meglio i due suoni sino a dare risposte condizionate assolutamente corrette.

Il segnale sonoro (condizionale) precedeva sempre di due secondi la stimolazione faradica (incondizionata).

Allorchè ci parve che lo stimolo sonoro avesse raggiunto un'attività molto netta ed il riflesso condizionato una sufficiente costanza ed una grande energia, procedemmo colla massima delicatezza all'anestesia della zona cutanea riflessogena di destra, a mezzo dell'iniezione intradermica di una soluzione al 10 % di stovaina.

Contemporaneamente, per controllo, si iniettava nel derma della regione riflessogena controlaterale una quantità di acqua distillata uguale alla soluzione di stovaina iniettata nella cute di destra.

Assicuratici della totale scomparsa del riflesso assoluto nell'orbicolare di destra e della sua persistenza in quello di sinistra, molte volte ed in varie riprese applicammo il segnale sonoro fa₇, senza potere osservare alcuna contrazione dell'orbicolare destro; il sinistro invece rispondeva sempre al segnale mi₇ come di norma. Prolungando la serie di stimolazioni col fa₇

(1) Ciò concorda colle osservazioni eseguite dagli sperimentatori russi sul riflesso della secrezione salivare: « Nos agents auditifs dans le complexe masquent toujours les lumineux ». (I. P. PAVLOV, *Leçons sur l'activité du cortex cérébral*. A. Legrand, Paris, 1929, p. 368).

(2) G. MARTINO e A. ALIBRANDI, *L'agevolazione e l'inibizione in rapporto alla qualità dello stimolo luminoso, nel riflesso condizionato dell'ammiccamento*. « Arch. di Fisiol. », 1938.

si ottenne anzi, verso la fine, la comparsa di qualche rara e debole contrazione dell'orbicolare sinistro.

Quattro giorni dopo si ripeté la medesima prova stovainizzando la cute di sinistra ed infiltrando di acqua distillata quella di destra. Ottenemmo risultati assolutamente corrispondenti.

Anche nel caso dei riflessi condizionati da stimoli acustici pare dunque necessario l'intervento degli stimoli incondizionati sulla zona riflessogena della reazione congenita o incondizionata. Ciò costituisce un'ulteriore conferma delle nostre precedenti osservazioni e deduzioni.

Fisiologia (Chimica biologica). — *Nuove osservazioni sull'ormone pancreatico iperglicemizzante di G. Martino*⁽¹⁾. Nota di G. ARAGONA, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. C. CIACCIO.

Dopo la scoperta dell'insulina gli Autori che si occuparono di studiarla furono colpiti dall'osservazione di una iperglicemia che si manifestava dopo pochi minuti dall'iniezione di questa sostanza. Le prime osservazioni in proposito si trovano nei lavori di Collip⁽³⁾ e Delezenne⁽⁴⁾, che si limitarono a rilevare il fenomeno, senza cercare di approfondirne la conoscenza. Il primo accenno alla presenza di una sostanza ad azione iperglicemica negli estratti pancreatici è nel lavoro di Fisher⁽⁵⁾ che, nel preparare l'insulina, ottenne per aggiunta di un volume di alcool assoluto al prodotto impuro disciolto in acqua, un precipitato bruno, tossico per gli animali, ad azione iperglicemizzante. J. Murlin, H. Clough, C. Gibbs e A. Stokes⁽⁶⁾ ammisero la presenza nell'estratto pancreatico di una frazione destinata ad elevare il tasso glicemico, considerandola non come impurità dovuta a difetto di tecnica, ma come sostanza normalmente presente e dal pancreas stesso elaborata: Gibbs, Root e Murlin⁽⁷⁾ riuscirono successivamente ad isolarla, dando ad essa il nome di « glucagone ». Anche Foerster ed Heuner⁽⁸⁾ poterono ottenere durante l'estrazione dell'insulina, una sostanza capace di elevare il tasso glicemico nel coniglio. Eseguendo estrazioni con alcool ed etere, di tessuto pancreatico, Belfanti⁽⁹⁾ ottenne una sostanza, cui diede il nome di sostanza Y,

(1) Dall'Istituto di Fisiologia Umana della R. Università di Messina.

(2) Nella seduta del 15 maggio 1938.

(3) J. B. COLLIP, « Amer. Journ. of Physiol. », LXIII, 391, 1923.

(4) C. DELEZENNE, « Compt. Rend. Acad. Scienc. », CLXXV, 18, 1922,

(5) N. F. FISHER, « Amer. Journ. of Physiol. », LVII, 57, 1923.

(6) J. MURLIN, H. CLOUGH, C. GIBBS e A. STOKES, « Journ. Biol. Chem. », LVI, 253,

1923.

(7) C. GIBBS, E. ROOT, J. MURLIN, « Quart. Journ. of exper. Physiol. », 128, 1923.

(8) A. FOERSTER e E. HEUNER, « Klin. Wochenscr. », III, 1099, 1924.

(9) S. BELFANTI, « Rend. R. Ist. Lombardo Sc. e Lett. », LVII, 146, 1924.

che, secondo l'Autore, esisterebbe « a lato dell'ormone ipoglicemizzante ». Nel 1927 Martino ⁽¹⁾, tentando di estrarre l'insulina dal succo pancreatico di cane normale, ottenne da questo « una sostanza che, iniettata sotto cute, si è dimostrata capace di determinare nel coniglio un aumento sempre ben apprezzabile del tasso glicemico ». Eseguendo l'estrazione dal pancreas l'Autore ottenne sostanze ad effetto opposto a seconda delle condizioni di digiuno o di normale alimentazione degli animali: dal pancreas degli animali digiunanti ottenne la sostanza iperglicemizzante; da quello degli animali normali un estratto ad azione nettamente ed esclusivamente ipoglicemica. L'aumento del tasso glicemico, provocato dalla sostanza iperglicemizzante, era a volte preceduto, a volte seguito da una fugace ipoglicemia. Chiusa in tubi saldati alla fiamma, la sostanza si è dimostrata attiva ancora 51 giorni dopo l'estrazione. Circa la natura della sostanza da lui estratta, G. Martino ⁽²⁾ scrive: « Alcuni fatti ci sembra inducano a far considerare l'azione iperglicemica come dovuta ad una sostanza a sè, talora associata ma comunque distinta da quella ad azione opposta »; e per la sua origine « nulla induce ad escludere che possa essere lo stesso pancreas l'organo produttore anche della sostanza iperglicemizzante; siccome poi tale sostanza, resistente agli enzimi stessi pancreatici, passa nel succo pancreatico, mentre si accumula nell'organo durante la sospensione della sua secrezione esterna, si può pensare che sia la parte acinosa dell'organo ad elaborarla... ».

La presenza di sostanze iperglicemizzanti fu successivamente negata da Norgaard e Hess Thaysen ⁽³⁾, Ionesco, Cosmulesco e Tomesco ⁽⁴⁾, Rathery, Kourilsky, Laurent e Gibert ⁽⁵⁾ che, pur ammettendo la fase iperglicemica, dopo iniezione d'insulina, come quasi costante (e più marcata dopo iniezione endovenosa), la considerarono come determinata da mobilitazione del glicogeno epatico ad opera della sostanza ipoglicemizzante. Bürger e Kramer ⁽⁶⁾, nel 1929, affermarono che l'iperglicemia iniziale, per iniezione di insulina non cristallizzata, è dovuta all'azione di una sostanza ad effetto opposto, associata all'insulina e che, come questa, verrebbe elaborata dal pancreas. L'ipotesi degli Autori trovò conferma nei risultati di Geiling e De Lawder ⁽⁷⁾,

(1) G. MARTINO, « Arch. Sc. Biol. », X, 4, 1927.

(2) G. MARTINO, loc. cit.

(3) A. NORGAARD e TH. E. HESS THAYSEN, « Acta Medica Scandinava », LXXII, 492, 1929.

(4) D. IONESCO, I. COSMULESCO, M. TOMESCO, « Compt. R. Soc. Biol. », CII, 167, 1929.

(5) F. RATHERY, R. KOURILSKY, Y. LAURENT e S. GIBERT, « Compt. R. Soc. Biol. », CIII, 563-565-881-1235, 1930.

(6) M. BÜRGER e H. KRAMER, « Compt. R. d. XIII Congrès Intern. de Physiol. », 41, 1929.

(7) E. GEILING e A. DE LAWDER, « Journ. of Pharmac. a. exper. Therap. », XXXIX, 369, 1930.

Neuwirth, Co Tui e Wallace ⁽¹⁾, Bellido e Puche Alvarez ⁽²⁾ ed Hennequin ⁽³⁾ il quale ultimo affermò che la sostanza iperglicemizzante può essere presente, come tale, nel tessuto pancreatico, a fianco dell'insulina da cui è completamente indipendente. Bürger e Brandt ⁽⁴⁾, nel 1935, imputarono al glucagone la comparsa dell'iperglicemia, dando come caratteristica di questa sostanza l'attività in dosi di 5-10 γ pro Kg. di peso corporeo, quando venga introdotta per via endovenosa, ed affermarono che nessuna delle altre sostanze ad azione iperglicemica studiate dai precedenti Autori avesse così elevata attività. Essi scrissero che: « während unsere Präparate in der Größenordnung von Gamma wirken, haben andere Autoren grammweise ihre Produkte in die Blutbahn injiziert ». È evidente che agli Autori tedeschi erano sfuggite le precedenti osservazioni del Martino (che infatti non si trovano citate nel testo dei loro lavori), il quale aveva osservato netta elevazione del tasso glicemico, nel coniglio, già per l'iniezione sottocutanea di 0,05 mg. della sostanza pro Kg. di peso corporeo. Avendo a disposizione dei campioni delle sostanze estratte nelle citate esperienze di Martino, abbiamo voluto saggiarne l'attività dopo 10 anni dall'estrazione, esaminando anche il comportamento di dosi inferiori a quelle adoperate dall'Autore. Abbiamo sperimentato su conigli adulti, in buone condizioni generali, iniettando le sostanze ottenute nelle esperienze di cui ai protocolli N. VIII e XII di questo Autore ⁽⁵⁾: per la somministrazione è stata scelta a volte la via sottocutanea, a volte quella endovenosa. È da notare che Bürger e collaboratori, i quali ottennero l'aumento del tasso glicemico già per iniezione di 5-10 γ pro Kg. di peso corporeo nel coniglio, somministrarono sempre per via endovenosa la soluzione del loro « glucagone »; mentre G. Martino, che aveva trovato, come dose ancora efficace, quella corrispondente a mg. 0,05 pro Kg. di peso del corpo, aveva sempre iniettato per via sottocutanea le soluzioni dei suoi estratti. Le dosi adoperate si sono aggirate tra i mg. 13,88 e i mg. 0,006 pro Kg. di peso del corpo: quelle da mg. 1,133 a mg. 0,0066 sono state iniettate per via endovenosa, quelle superiori per via ipodermica. L'animale era sempre digiuno da 12 ore ed il tasso glicemico è stato determinato col metodo di Hagedorn-Jensen secondo la modificazione di Barelli ⁽⁶⁾, procedendo, però, alla determinazione per pesata, colla bilancia analitica, della quantità di sangue prelevata per l'esame.

Abbiamo eseguito undici esperienze i cui protocolli sono, per brevità, riassunti nella seguente tabella:

(1) I. NEUWIRTH, I. Y. CO TUI e G. WALLACE, « Proc. Soc. exper. Biol. Med. », XXVII, 194, 1929.

(2) J. M. BELLIDO e J. PUCHE ALVAREZ, « Trabajos Inst. d. Fisiol. de Barcelona », II, 177, 1927.

(3) L. HENNEQUIN, « Rev. Franç. d'Endocrin. », II, 83, 1933.

(4) M. BÜRGER e W. BRANDT, « Z. exp. Mediz. », XCVI, 375, 1935.

(5) G. MARTINO, « Arch. di Sc. Biol. », X, 420, 1927; X, 426, 1927.

(6) L. BARELLI, « Diagn. e Tecn. di Labor. », II, 219, 1931.

TABELLA.

N° dell'esperimento	Peso del coniglio gr.	Peso sost. iniettata mg.	Sost. pro Kg. di peso corporeo mg.	Via di somministrazione	Glicemia iniziale gr.	Massimo valore glicemico gr.	Massimo aumento percentuale	Tempo del mass. aumento dopo la iniezione	Osservazioni
I	1800	10	5,55	sottocutanea	0,81	0,08	17	90'	Sost. estr. esp. VIII
II	1800	25	13,88	»	1	1,11	11	30'	»
III	1750	5	2,85	»	1,14	1,14	—	—	»
IV	1800	10	5,55	»	1,1	1,30	29	60'	»
V	1700	5	2,94	»	1,11	1,34	12	90'	»
VI	1500	17	11,33	»	1,05	1,77	68	45'	Sost. estr. esp. XII
VII	1500	1,7	1,133	endovenosa	1,15	2	70	45'	»
VIII	2000	0,60	0,30	»	1,30	1,54	18	45'	»
IX	1500	0,010	0,0066	»	1,33	1,66	24	15'	»
X	1500	0,015	0,010	»	0,9	1,07	9	15'	»
XI	1500	0,015	0,010	»	1,05	1,65	57	3'	»

Le sostanze da noi studiate hanno presentato, dopo dieci anni, attività analoga a quella manifestata durante le ricerche del Martino. Mentre l'aumento del tasso glicemico fu costante per entrambi i campioni esaminati, le percentuali dell'aumento stesso variarono, per la sostanza ottenuta dal Martino nell'esperienza VIII, tra l'11 % e il 29 %, e, per quella ottenuta nell'esperienza XII, raggiunsero, per introduzione sottocutanea, il 70 %: valori questi quasi sovrapponibili a quelli ottenuti con la somministrazione della sostanza all'epoca dell'estrazione. Non abbiamo mai riscontrato diminuzioni del tasso glicemico, pur seguendo il comportamento della glicemia per un tempo abbastanza lungo (3 ore). Per le prove eseguite con la somministrazione della sostanza per via endovenosa (sostanza estratta da G. Martino nella XII esperienza, di cui avevamo saggiato l'attività con l'esperienza di cui al N. VI della nostra tabella) le determinazioni sono state eseguite di 10 in 10 minuti e protratte per due ore.

In tutte le prove abbiamo notato un aumento del tasso glicemico che raggiunse il massimo del 70 % nell'esperienza VII.

Come risulta dalla tabella, non è stato possibile mettere in evidenza un rapporto tra entità dell'iperglicemia e dose iniettata; la stessa quantità di sostanza ha dato, nelle esperienze X e XI, un aumento del tasso glicemico rispettivamente del 9 % e del 57 %. Anche il tempo intercorso tra l'iniezione ed il massimo dell'azione non è stato costante: in tre esperienze il massimo della curva è stato raggiunto dopo 45', in due dopo 15', in una dopo 30'. La massima rapidità d'azione si è presentata nelle esperienze IX e X, nelle quali avevamo iniettato, rispettivamente, mg. 0,0066 e mg. 0,010 di sostanza per Kg. di peso del corpo.

Concludendo, dalle nostre ricerche risulta che la sostanza iperglicemizzante estratta dal Martino nel 1927 e conservata in tubi di vetro saldati alla fiamma, presenta ancora oggi inalterata la sua attività; che essa determina aumento del tasso di zucchero del sangue sia per iniezione ipodermica che endovenosa; che è attiva a dosi pari a 0,0066 mg. pro Kg. di peso corporeo. Ci pare quindi che possa essere identificabile col cosiddetto « glucagone » di Murlin e Bürger.

Fisiologia (Chimica biologica) — *Sul valore del pH del secreto delle vescichette seminali di ratto albino.*⁽¹⁾ Nota di V. CAPRARO, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Esistendo dati scarsi, frammentari e non controllati circa le costanti fisico-chimiche del liquido seminale, e avendo l'argomento interesse, non solo dal punto di vista puramente scientifico, ma altresì dal lato di eventuali applicazioni pratiche (fecondazione artificiale), da qualche tempo, in questo Istituto, si sono iniziate sistematiche ricerche al riguardo.

V. Zagami⁽³⁻⁴⁾ ha già pubblicato due Note, sul pH del liquido seminale umano normale e sul pH del liquido seminale normale di gallo domestico; ed ha trovato che il pH del liquido seminale umano si aggira intorno ad una media di 7,58, e quello di gallo presenta come valori medi 7,02-7,18.

Dato che il piano di lavoro, che si segue, implica non solo indagini sul liquido seminale come tale, ma anche sui singoli secreti che lo compongono, allo scrivente è stato assegnato il compito di studiare il valore del pH del secreto delle vescichette seminali.

Nel ratto albino è difficile ottenere in buone condizioni una sufficiente quantità di liquido spermatico per la misurazione del pH, mentre è agevole procurarsi il secreto delle vescichette seminali; abbiamo pertanto utilizzato tale animale per eseguire ricerche, di cui appunto riferiremo i risultati nella presente Nota.

Per le indagini, eseguite sotto la guida del Prof. V. Zagami, si sono scelti ratti adulti e in ottimo stato generale, i quali si sono sempre operati con anestesia locale.

Aperta la cavità addominale, si identificavano e isolavano agevolmente le vescichette seminali, e si procedeva senz'altro al prelevamento del secreto. Questo veniva fatto infiggendo nella cavità di una vescichetta un ago innestato sulla siringa-elettrodo di Mislowitzer già contenente un po' di chini-drone, e aspirando così tutto o in parte il liquido che vi si trovava. In tal modo veniva evitato al massimo grado ogni contatto con l'aria o con altre sostanze. Aspirata la quantità voluta, si procedeva immediatamente alla determinazione elettrometrica del pH, usando come elettrodo di riferimento

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica biologica della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 15 maggio 1938.

(3) V. ZAGAMI, *Ricerche sperimentali sul liquido seminale*. — I. *Sul valore del pH del liquido seminale umano normale*. «Rendic. R. Acc. Naz. Lincei», 25, 268, 1937.

(4) V. ZAGAMI, *Ricerche sperimentali sul liquido seminale*. — II. *Sul valore del pH del liquido seminale di gallo*. «Rendic. R. Acc. Naz. Lincei», 26, 123, 1937.

l'elettrodo a calomelano con soluzione satura di KCl, e tenendo conto della temperatura, che del resto non è variata che dai 18° ai 20° C. Fatta la misurazione si lavava la siringa con acqua distillata, e si ripeteva, usando la stessa tecnica, la determinazione del pH sul secreto dell'altra vescichetta seminale.

Numero d'ordine degli animali	Peso gr.	Attività sessuale	pH del secreto della vescichetta seminale destra	pH del secreto della vescichetta seminale sinistra	Media fra i due valori
1	180	In riposo sessuale da lungo tempo	6,54	6,55	6,55
2	170		6,51	6,51	6,51
3	265		—	6,31	6,31
4	195		6,16	6,49	6,33
5	150		6,59	6,60	6,60
6	210		6,61	6,58	6,60
7	210	Periodo di riposo sessuale ignorato	—	6,63	6,63
8	110		6,62	6,45	6,54
9	165		6,57	6,56	6,57
10	165		6,52	6,58	6,55
11	145		6,57	6,55	6,56
12	135		—	6,61	6,61
3	265	Circa un mese dopo il primo prelevamento e svuotamento sperimen- tale; nel frattempo ri- poso sessuale	6,33	6,27	6,30
5	150		6,51	6,58	6,55
9	165		6,53	6,47	6,50
10	165		6,50	6,53	6,52
11	145		6,50	6,49	6,50
13	185		6,43	6,46	6,45
14	190	Tre-quattro giorni dopo l'accoppiamento nor- male	6,58	—	6,58
15	200		6,29	—	6,29
16	200		6,51	6,57	6,54
17	185		6,53	6,52	6,53
			Valore medio . . . 6,51		

In tal modo abbiamo misurato il pH del secreto delle vescichette seminali di ratti, che da lungo tempo erano a riposo sessuale, o che solo da

pochi giorni avevano avuto accoppiamenti, anche ripetuti; come pure di altri, la cui precedente attività sessuale non ci era nota.

Infine un gruppo di ratti, già esplorati una volta e guariti, è stato riperato alla distanza di un mese circa dal primo prelevamento, facendo sul secreto, che nel frattempo si era accumulato, una seconda determinazione del pH: è da rilevare, che in questo intervallo si era impedito l'accoppiamento.

Come risulta dai dati della tabella annessa, il pH del liquido delle vescichette seminali di ratto albino, alla temperatura di 18°-20° C., si aggira attorno ad un valore medio di 6,51, con oscillazioni tra 6,29 e 6,63, sia che il liquido sia stato prelevato dopo pochi giorni dallo svuotamento naturale, sia che sia stato prelevato dopo un mese ed anche più dallo svuotamento naturale o sperimentale. Dimodochè non sono risultate variazioni sostanziali in rapporto con l'attività sessuale.

Fisiologia (Chimica biologica). — *Ricerche sperimentali sul liquido seminale*. — III. *Sulle variazioni del pH del liquido seminale umano in dipendenza della temperatura e della diluizione*⁽¹⁾. Nota di V. ZAGAMI, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

In una precedente Nota ⁽³⁾ abbiamo dimostrato, che il liquido seminale umano, per la determinazione del pH, va raccolto, conservato ed esaminato al riparo assoluto dall'aria; che in tali condizioni sperimentali presenta, nelle prime ore dalla emissione, alla temperatura di 18° C., a pressione parziale di CO₂ pressochè corrispondente a quella esistente « in vivo », ed usando il metodo elettrometrico per la misura, un valore medio di pH 7,58; che il contatto con l'aria modifica notevolmente e rapidamente questo valore, spostandolo verso l'alcalinità, molto verosimilmente per perdita di CO₂; e che la conservazione sotto olio di vasellina modifica invece solo lievemente e lentamente lo stesso valore, spostandolo verso l'acidità, probabilmente per accumulo di prodotti acidi provenienti dall'attività degli spermatozoi.

Continuando lo svolgimento del nostro programma d'indagini chimico-fisiche, già riferito nella accennata Nota, abbiamo ritenuto utile stabilire, per lo stesso liquido seminale umano, le variazioni del pH connesse con la temperatura e con la diluizione del liquido.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica biologica della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 15 maggio 1938.

(3) V. ZAGAMI, *Ricerche sperimentali sul liquido seminale*. — I. *Sul valore del pH del liquido seminale umano normale*. « Rendic. R. Acc. Naz. Lincei », XXV, 268, 1937.

La determinazione del pH del liquido seminale è stata, infatti, da noi eseguita alla temperatura ambiente (18° C.), e il pH misurato corrisponde naturalmente alla concentrazione in ioni H^+ , che il liquido stesso prende a questa temperatura. Tenendo presente che la concentrazione idrogenionica varia con la temperatura, e che questa nell'organismo umano normale differisce da quella ambiente, abbiamo già rimarcato nella precedente Nota, che, dal punto di vista fisiologico, vi era maggiore interesse a conoscere il pH del liquido seminale alla temperatura di 37-38° C.

Questa questione è stata posta già da Autori vari per altri liquidi dell'organismo, ma soprattutto per il sangue; e si è potuto accertare, che il pH del sangue, mantenuto sempre al riparo dall'aria in maniera da evitare una modificazione del contenuto globale di CO_2 , diminuisce quando la temperatura si eleva.

La diminuzione è di pH 0,21-0,22, in media, per una variazione di temperatura da 18° a 38° C., secondo i risultati di Michaelis e Davidoff⁽¹⁾, ottenuti sperimentando sul siero di sangue umano.

La diminuzione è di pH 0,22, in media, per una variazione di temperatura da 20 a 38° C., secondo i risultati di Cullen⁽²⁾ sul plasma umano, e in base ai quali è stata stabilita la seguente formula di correzione in funzione della temperatura, per misure fatte tra il 15° e 25° C., e ammettendo che il pH varia di 0,01 per grado di temperatura nelle vicinanze immediate di 20° C.:

$$pH\ 38^\circ = pH\ t^\circ + 0,01\ (t^\circ - 20^\circ) - 0,22$$

Secondo Cullen la diminuzione del pH, per una variazione di temperatura da 20° a 38° C., sarebbe differente e specifica per il sangue delle varie specie animali (0,12 e 0,16, rispettivamente, per il plasma e per il siero di cavallo; 0,17 per il plasma di coniglio; 0,22 per il plasma umano; 0,35 per il siero di cane).

Austin, Stadie e Robinson,⁽³⁾ sempre per variazione di temperatura da 20° a 38°, danno invece diminuzioni del pH solo lievemente differenti per il sangue di varie specie animali (0,18 per il plasma e il siero di montone; 0,18 per il siero di ratto; 0,24 e 0,25 rispettivamente per il siero e per il plasma di cane; 0,24 e 0,26 rispettivamente per il plasma e per il siero umano normale e patologico), e Bigwood, Liegeois, Reding e Slosse⁽⁴⁾ riferiscono, infine, che la diminuzione del pH del plasma o del

(1) L. MICHAELIS e W. DAVIDOFF, *Methodisches und Sachliches zur elektrometrischen Bestimmung der Blutalkalescenx*. « Bioch. Zeitschr. », XLVI, 131, 1912.

(2) G. E. CULLEN, *The colorimetric determination of the hydrogen ion concentration of blood plasma*. « Journ. Biol. Chem. », LII, 501, 1922.

(3) I. H. AUSTIN, W. C. STADIE e H. W. ROBINSON, *The relation between colorimetric reading and true pH of serum or plasma*. « Journ. Biol. Chem. », LXVI, 505, 1925.

(4) E. J. BIGWOOD, F. LIEGEOIS, R. REDING e A. SLOSSE, *De la variation du pH du plasma sanguin avec la température*. « C. R. Soc. Biol. », XCVII, 1187, 1927.

siero di sangue, per una variazione di temperatura da 20° a 38° C., è di 0,20 (\pm 0,05), in media, e che questo valore è sempre lo stesso, sia che si tratti di sangue umano, normale o patologico, sia che si tratti di sangue di altri mammiferi.

La diluizione dei liquidi dell'organismo è spesso di grande utilità per la determinazione del pH, e ricerche sono state fatte per stabilire le variazioni di questo valore in dipendenza della diluizione su quasi tutti i liquidi dell'organismo. Come è noto, questi sono dotati di un notevole potere tampone dal punto di vista dell'equilibrio acido-base, in maniera da consentire di essere diluiti, entro certi limiti, senza che ne risulti una sensibile variazione del pH; ma la natura del liquido di diluizione, nonchè il grado della diluizione stessa debbono essere stabiliti sperimentalmente per ciascun liquido biologico, non potendo essere previsti a causa della loro diversa e complessa composizione.

Numerosi sono i lavori eseguiti in proposito dai vari Autori per potere essere ricordati in questa breve Nota; rimandiamo perciò, per maggiori dettagli, ad una completa esposizione di Bigwood ⁽¹⁾ su tale argomento. Qui ci limitiamo a ricordare soltanto, che il sangue consente una diluizione da 1 a 20, a mezzo di soluzione di NaCl a 0,9 ‰, con una variazione di pH inferiore a 0,05; che la urina consente una diluizione da 1 a 10 con una variazione di pH inferiore a 0,10; ecc.

Le nostre indagini, sia per quanto riguarda le variazioni dovute alla temperatura, sia per quanto riguarda le variazioni dovute alla diluizione, sono state eseguite sul liquido seminale umano raccolto, nell'accoppiamento normale, con la tecnica esposta nella nostra citata Nota, a fine di evitare ogni eventuale perdita di CO₂.

Le determinazioni del pH sono state fatte, al solito, con il metodo elettrometrico (servendoci del potenziometro Allocchio Bacchini), adoperando la siringa-elettrodo a chinidrone di Mislowitzer; e un elettrodo a calomelano di riferimento.

Per la prima serie di ricerche, le determinazioni del pH sono state eseguite sugli stessi campioni di liquido alla temperatura di 20° e alla temperatura di 38° C. Per raggiungere questo scopo, le determinazioni venivano fatte tenendo, durante la misura, in termostato, regolato rispettivamente a 20° e a 38° C., non solo il liquido in esame, ma altresì tutta la pila di concentrazione. Si comprende che per il calcolo del pH si teneva conto del differente potenziale degli elettrodi alle due diverse temperature.

Per la seconda serie di ricerche, le determinazioni sono state eseguite, alla temperatura di 20° C., sul liquido seminale non diluito e sullo stesso diluito in varie proporzioni con soluzione neutra di NaCl a 0,9 ‰.

(1) E. J. BIGWOOD., *Méthodes de détermination du pH des liquides de l'organisme*. «Bull. Soc. Chim. Biol.», X, 15, 1928.

Nella Tabella I sono riportati i valori del pH del liquido seminale umano riscontrati alla temperatura di 20° e alla temperatura di 38° C.

Nella Tabella II sono riportati i valori del pH del liquido seminale umano non diluito, e quelli dello stesso liquido diluito, in varie proporzioni, con soluzione neutra di NaCl a 0,9 ‰, assunti tutti alla temperatura di 20° C.

TABELLA I.

Numero progressivo delle esperienze	pH		Differenza fra i due valori
	a 20° C.	a 38° C.	
1	7,51	7,25	0,26
2	7,43	7,17	0,26
3	7,44	7,21	0,23
4	7,51	7,20	0,31
5	7,47	7,17	0,30
6	7,47	7,19	0,28
7	7,40	7,17	0,23
8	7,42	7,19	0,23
9	7,48	7,15	0,33
10	7,48	7,18	0,30
Media . . .	7,46	7,19	0,27

La Tabella I ci permette di rilevare che, per effetto della variazione di temperatura da 20° e 38° C., o viceversa, il pH del liquido seminale, pari rimanendo la concentrazione globale di CO₂, si è rispettivamente abbassato o elevato, in media, di 0,27.

Tale variazione del pH è nello stesso senso e quasi nella stessa misura di quella che subisce il pH corrispondente alla neutralità per una simile variazione di temperatura, a causa del differente valore della costante di dissociazione dell'acqua K_{H₂O}.

Abbiamo ragione perciò di ritenere che la variazione di [H⁺] da noi riscontrata nel liquido seminale per la variazione di temperatura da 20° a 38° C. più che essere interpretata come modificazione dell'equilibrio acido-base avvenuta in seno al liquido, ossia come variazione inversa di [H⁺] e di [OH⁻], debba essere interpretata invece come variazione assoluta, nello stesso senso e quasi nella stessa misura, degli ioni H⁺ e degli ioni OH⁻.

La Tabella II ci permette, infine, di rilevare che il liquido seminale umano può essere diluito, con soluzione neutra di NaCl a 0,9 %, entro certi limiti, senza variazioni notevoli del pH. Le variazioni del pH non sono infatti quasi apprezzate per diluizioni in ragione di 1 a 4 e di 1 a 5; esse sono dell'ordine di pH 0,04 al massimo per diluizioni in ragione di 1 a 8 e di 1 a 10, ma cominciano a divenire sensibili per diluizioni maggiori, notandosi variazioni di pH 0,11-0,12 per diluizioni in ragione di 1 a 20.

TABELLA II.

Numero progressivo delle esperienze	pH (a 20° C.) del liquido se- minale non diluito	pH (a 20° C.) del liquido seminale diluito con soluzione neutra di NaCl a 0,9 % in ragione di							
		1 : 1	1 : 4	1 : 5	1 : 8	1 : 10	1 : 12	1 : 15	1 : 20
1	7,52	7,52	7,51	—	—	—	—	—	—
2	7,47	—	—	7,47	7,45	—	—	—	—
3	7,50	—	7,50	7,49	7,47	—	—	7,42	7,39
4	7,54	7,54	—	7,52	7,52	7,50	—	—	—
5	7,51	—	—	7,48	—	—	—	—	—
6	7,37	—	7,37	7,36	—	7,33	7,31	—	7,29
7	7,52	—	—	7,52	7,51	7,52	—	—	7,47
8	7,48	—	—	7,40	—	7,40	7,38	—	7,36
9	7,37	—	—	7,37	—	7,35	7,34	7,31	7,25
10	7,48	—	—	7,46	—	7,46	—	7,41	7,37
11	7,41	—	—	7,40	—	7,40	—	7,36	—

Possiamo dedurre da queste osservazioni, che il liquido seminale umano possiede un discreto potere tampone, la cui natura e il cui valore globale meritano di essere ben precisati e ben determinati.

Per concludere, rimane fissato da queste nostre indagini, che il liquido seminale umano, per una variazione di temperatura da 20° a 38° C., pari rimanendo la concentrazione globale di CO₂, presenta una diminuzione media del pH di 0,27; e che esso consente di essere diluito, con soluzione neutra di NaCl a 0,9 %, in ragione di 1 a 10 senza presentare variazioni superiori a pH 0,04.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 3 giugno 1938 - Anno XVI

Presidenza del prof. F. MILLOSEVICH

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari.* Nota ⁽¹⁾ del Socio F. ENRIQUES.

1. La Memoria su *Un teorema fondamentale della geometria sulle superficie algebriche ed il principio di spezzamento* pubblicata or ora nel to. XVII della serie IV degli « Annali di Matematica » (p. 107) dal sig. Beniamino Segre, vuol recare una dimostrazione algebrico-geometrica completa dell'la proprietà caratteristica delle superficie irregolari (di generi p_a e p_g) di possedere serie continue di $\infty^{p_g - p_a}$ curve disequivalenti, colmando così la nota lacuna che rimane per $p_p > 0$, nella dimostrazione originale da me datane nel 1905, e similmente nelle altre dimostrazioni fondate allora sullo stesso modello, siccome risulta da una critica del sig. Severi del 1921. Il Segre esamina in questa Memoria la via che io ho indicato in Note più recenti per superare la difficoltà, colla considerazione delle curve infinitamente vicine, e con poche osservazioni ritiene di togliere a tali considerazioni qualsiasi valore.

Risponderò, sia pur brevemente, a queste critiche, rilevando ciò che in esse parmi men giusto; intanto il sentimento che mi porta a mettere al di sopra di ogni questione personale gl'interessi della scienza, m'induce a rallegrarmi del tentativo nuovo fatto dal Segre e a coglierne il miglior frutto. Invero a chi legga la dimostrazione proposta appare una lacuna d'ordine delicato, che a prima vista si sarebbe indotti a ritenere come errore irrimedi-

(1) Presentata nella seduta del 3 giugno 1938.

diabile; ma andando oltre la stretta logica per comprendere il fatto che si presenta in concreto, si può sperare che venga fortunatamente colmata. Benchè l'esame approfondito che noi abbiain fatto della questione⁽¹⁾, mostrerebbe che la difficoltà resta intera.

2. Espongo, riassumendola, la dimostrazione proposta dal Segre, e la riduco alla più semplice espressione liberandola da ogni appello a nozioni superflue.

Sia $|C| = |C'| = |C''|$ un sistema lineare regolare sopra la superficie F di generi p_a e p_g ; è lecito supporre che il sistema doppio $|D| = |2C|$ segghi su una C generica una serie completa e non speciale, e così anche $|E| = |3C|$ segghi sopra la curva D di $|D|$ una serie completa e non speciale.

Indicheremo con n il grado e con π il genere di $|C|$, quindi la sua dimensione sarà

$$r = n - \pi + p_a + 1.$$

Consideriamo una particolare curva D che sia spezzata in due parti C e C' (con n punti comuni); la $C + C'$ si può ritenere come limite di una $D = D'$ dotata di $n - p_g$ punti doppi che tendono ad altrettanti punti del gruppo $\Gamma = (CC')$, i cui residui p_g punti formeranno un gruppo Γ' . Se questa D' , in conseguenza delle $n - p_g$ condizioni impostele, acquista altri p_g punti doppi tendenti ai p_g punti di Γ' , essa è riducibile, e le componenti sue descrivono un sistema continuo di dimensione $n - \pi + p_g + 1$ (composto di $\infty^{p_g - p_a}$ sistemi lineari disequivalenti), che è ciò che si vuole dimostrare. Se invece la D' non si spezza in tal guisa, è facile vedere che essa è irriducibile e anche che non possiede altri punti doppi che sieno conseguenza degli $n - p_g$ imposti e tendano a qualcuno dei residui p_g punti di Γ' , costituenti il Γ' (quest'ultima possibilità, appare non essenziale scartare per ciò che segue).

Ora si può valutare la dimensione della serie lineare completa, g , che viene segata su la detta D' dal sistema delle curve E' di $|E|$ che passino per gli $n - p_g$ punti doppi ed inoltre per le $2n$ intersezioni di D' con una curva C'' di $|C|$: questa dimensione vale (almeno)

$$2(n - \pi) + 2p_g + 1.$$

Ma, se si fa avvicinare la D' alla $C + C'$, la detta serie si riduce alla serie \bar{g} dei gruppi di punti segati su questa curva spezzata dalle curve E' che passano per gli n punti del Γ e per i $2n$ punti intersezioni della C'' con C e C' (cui vanno aggiunti i punti fissi del Γ'); e quest'ultima serie ha la dimensione

$$2(n - \pi) + 2p_g,$$

(1) Questo esame, cui si accenna alla fine del n. 2, è stato fatto in occasione della revisione delle bozze.

dunque \bar{g} avrebbe *dimensione minore di quella della serie g su D' che ad essa converge*.

In ciò l'A. vede un *assurdo* (n. 7, p. 120 della Memoria citata). E questo a me *non appare evidente*.

Accade, per esempio, sopra le superficie iperellittiche, di generi $p_a = -1$ e $p_g = 1$, che la serie lineare segata su una curva C da un sistema lineare appartenente alla serie continua $\{C\}$ diminuisca di dimensione, quando $|K|$ vari fino ad identificarsi con $|C|$. È ben vero che, passando al limite in un modo determinato, la serie (CK) tenderà ad una serie di egual dimensione, più ampia della (CC), la quale conterrà dunque la serie caratteristica incompleta di $|C|$; ma la corrispondenza fra gli elementi (curve) di $|K|$ e i gruppi della (CK) diventa degenere. L'eventualità di una simile degenerazione getta un dubbio sulla deduzione del Segre.

Reco un altro esempio più vicino al caso di cui si tratta⁽¹⁾. Si consideri la serie ∞^{29} delle curve piane C_8 , d'ordine 8 e genere 6, con 15 punti doppi, e dentro di questa la serie ∞^{28} delle curve spezzate in due quartiche C_4 . Qui la serie canonica, segnata su C_8 dalle quintiche pei suoi punti doppi, diventa, al limite, la serie formata dalle due serie canoniche delle C_4 , cui si aggiunge il punto fisso O che cade nel 16° punto comune alle C_4 . Così la serie variabile di dimensione 5 diventa di dimensione 4, ma a ciascun gruppo di quest'ultima serie ∞^4 si aggiunge un punto variabile infinitamente vicino ad O .

In stretta logica quest'esempio invalida il ragionamento del Segre: ciò che pareva assurdo si realizza! Ma giova esaminare in concreto il caso a cui il discorso si riferisce. Le curve E' passanti per un gruppo della serie $g = (E'D')$ su D' sono ∞^{r+1} (r dimensione di $|C|$) e si toccano negli $n - p_g$ punti doppi di D' ; ma quando la D' tenda alla curva spezzata $C + C'$, le E' passanti per un gruppo della serie limite \bar{g} , che ha dimensione minore di unità in confronto alla g , non saranno più ∞^{r+1} bensì ∞^{r+2} e perciò non avranno più le medesime tangenti nei punti comuni a C e C' costituenti il gruppo Γ . Così appare possibile che dal sistema $|E'|$ si stacchi C senza che si stacchi insieme C' : insomma non s'incontra affatto l'assurdo cui si voleva far capo!

3. Debbo ancora rispondere, sia pure in breve, alle critiche del Segre che concernono direttamente le mie Note del Seminario matematico di Roma e di questa R. Accademia, degli anni 1936 e 1937.

Prèmettiamo l'analisi della questione. Si ammetta dunque stabilito il teorema fondamentale di cui si tratta, e perciò si abbia su la superficie F

(1) Proprio questo esempio m'indusse ad abbandonare un tentativo analogo a quello del Segre, che avevo fatto molti anni or sono per dimostrare il teorema fondamentale, nel caso $p_g \Rightarrow 1$.

una serie continua $\infty^{p_g - p_a}$ di curve disequivalenti. Ragiono, per semplicità, come se ciascuna di queste curve appartenga ad un sistema lineare ∞^0 .

Se A è una curva della serie, posso considerare un'altra curva \bar{A}' di essa, e nella varietà di Picard viene definito, com'è noto, un gruppo continuo ∞^1 di trasformazioni, generato dalle potenze a esponente qualsiasi della $\pi = (A \bar{A}')$. Se poi si considera un'altra curva B (pure appartenente ad un sistema lineare ∞^0) il gruppo ∞^1 indicato porta un corrispondente gruppo che agisce sulla serie delle B , e in questa vale a definire una curva \bar{B}_1 , che chiamerò associata ad \bar{A}' , tale che la curva composta $\bar{A}' + \bar{B}_1$ riuscirà equivalente alla $A + B$. Inoltre la trasformazione π farà corrispondere ad \bar{A}' una successiva curva \bar{A}'' , cui verrà associata una curva \bar{B}_2 (corrispondente a \bar{B}_1 in π^{-1}) tale che $\bar{A}'' + \bar{B}_2$ riuscirà ancora equivalente ad $A + B$ ecc.

Se si fa variare \bar{A}' tendendo ad A , e si indica con A' la curva infinitamente vicina ad A , (entro la nostra serie-varietà di Picard), la \bar{A}'' diverrà la curva A'' successiva ad A' , cioè la curva infinitamente vicina ad A nell'intorno del 2° ordine ecc.

Ora la curva A' infinitamente vicina ad A si lascia costruire, com'è noto, entro il fascio delle curve del sistema lineare $|D| = |A + B|$ che passano per il gruppo comune ad A e B e per due gruppi caratteristici su A e B rispettivamente: la A' vien data dalla curva di questo fascio infinitamente vicina alla curva spezzata $A + B$, che è anch'essa spezzata. Operare sulla curva A' infinitamente vicina ad A si può dunque senza valersi della serie continua in cui A' si prolunga (cioè di \bar{A}') operando sopra la D e sul ramo di essa che tende alla A . Le operazioni così effettuate hanno un senso preciso ed equivalgono a quelle che si facciano su curve della varietà di Picard, passando poi al limite.

Questa osservazione mostra che la successione delle curve infinitamente vicine A, A', A'', \dots , che viene definita dalla varietà di Picard, si lascia anche costruire a partire soltanto dall'esistenza di A' , cioè della curva D che tende alla curva spezzata, vicina ad $A + B$, che è la $A' + B_1$. Le operazioni da fare si eseguiranno sulla D variabile, e su quel ramo di essa che tende ad A . Così, per esempio, staccare A' dalle curve di un sistema lineare $|A + B + C|$ (come io faccio nell'ultima delle Note citate) significa imporre ad esse di passare per tanti punti di D e del detto ramo, quanti basterebbero a staccare una parte di essa che tendesse veramente ad A : nell'infinitesimo si viene allora a costruire una curva che deve contenere proprio A' . È ovvio che — usando il *linguaggio delle curve infinitamente vicine*, dietro cui vedo sempre una realtà analitica — io non potevo sognarmi di operare su curve, tendenti ad A e A' , che stieno nello spazio ambiente fuori della superficie F , se pure mi valga di queste per mostrare che l'esistenza di A' ha un senso effettivo.

Il risultato dell'analisi che precede è che: la costruzione delle successive curve A, A', A'', \dots infinitamente vicine ad A , si lascia fare, senza

ricorrere all'ipotesi della serie continua prolungante A' , con operazioni che sono definite in base all'esistenza della detta curva A' nell'intorno del primo ordine di A . Si riesce, per esempio, a trovare una effettiva rete di curve, contenente le $A + B$, $A' + B_1$ e una terza curva spezzata $A'' + B_2$, e così di seguito. Ora nella *sintesi*, si assume che questa operazione conduca in effetto all'esistenza delle nuove curve infinitamente vicine di cui si tratta. C'è, se si vuole, un'assunzione intuitiva mercè cui si prevede il risultato di un calcolo verificatore, che — quando si riesca a stabilire — *deve* dimostrare la cosa con pieno rigore: non c'è in alcun modo un circolo vizioso.

Per assicurare l'esattezza della previsione indicata, io ho fatto ricorso, nelle Note che precedono (del 1936), alla considerazione delle varietà di Jacobi corrispondenti alle sezioni piane di F che formino un fascio. Si può supporre che le curve A e B seghino le sezioni K del detto fascio (di genere p) in p punti variabili. La curva infinitamente vicina $A' + B$, definisce allora due traiettorie di un medesimo gruppo ∞' di trasformazioni, entro tali varietà di Jacobi. In via di approssimazione si può costruire una piccola trasformazione su ciascuna di tali varietà, che si accosti alla trasformazione infinitesima, e facendone il quadrato costruire così una curva che tenda alla A'' successiva alla curva A' , infinitamente vicina ad A nell'intorno del 1° ordine. L'operazione che si eseguisce non è, come dice il mio critico, una integrazione, bensì un'operazione *algebrica*, che dà risultato univoco quando si applichi al gruppo dei p punti sezioni della curva D (prossima alla $A + B$) che sono vicini ad A . È ben vero che questi gruppi di p punti (poichè D è irriducibile) si scambiano con altri che contengono punti lontani da A , traverso le diramazioni di D ; così si ottiene una curva E che incontrerà le K in più che p punti; ma quando si passa al limite, e già nell'infinitesimo, essa dovrà essere riducibile, staccandosene una parte che dipende soltanto da A' .

In tutto ciò che precede è essenziale soprattutto di dare tutto il suo significato all'esistenza di A' , ossia alla riducibilità della curva $D = A' + B_1$, infinitamente vicina alla $A + B$, e dotata come questa di n punti doppi. Occorre perciò giustificare il principio di degenerazione nell'infinitesimo. E ciò ho fatto in varie guise, una delle quali viene richiamata dal Segre: posso aggiungere che essa si riduce, nel modo più semplice, alla dimostrazione del principio con riferimento alle rette multiple, quale è accennata in Enriques-Chisini (*Lezioni*, vol. III, p. 405).

4. Ponendo termine a questa Nota voglio chiarire che nel mio concetto le indicate considerazioni infinitesimali danno la ragione profonda per cui un ragionamento incompleto è valso tuttavia a scoprire il teorema fondamentale; non pretendo affatto di confrontare la dimostrazione che possa darsi per questa via, colla nuova dimostrazione che si riuscisse a trarre dalla Memoria del Segre... *se si riuscisse*.

Ma l'uso dei punti e delle curve infinitamente vicini, e del relativo linguaggio, anche se non rigoroso, è fecondo e riesce pure a risultati giusti e coerenti, per chi sappia comprenderlo e adoperarlo, così come sono riuscito a dimostrare in maniera luminosa e definitiva in altre parti della mia opera. L'atteggiamento scettico rispetto a tale ordine d'idee è facile, ma poco produttivo. Per chi invece sia animato da più fidenti disposizioni, questi concetti possono dare, e sono persuaso che daranno, in più campi, risultati di alta importanza.

Meccanica (Meccanica del volo). — *Il coefficiente balistico dei velivoli.*
Nota del Socio G. A. CROCCO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geodesia. — *Stazione astronomico-geodetica eseguita sul vertice trigonometrico di Montecastello, presso Alessandria, nell'agosto 1934.* Nota ⁽¹⁾ del corrisp. U. BARBIERI.

A ulteriore compimento delle stazioni da me eseguite lungo il meridiano di Mondovì ⁽²⁾, nei vertici di primo ordine della rete geodetica italiana, ho stimato opportuno compierne un'ultima a Montecastello, presso Alessandria.

Nella presente Nota ne espongo i risultati.

Il vertice di terzo ordine di Montecastello è costituito dall'asse del cupolino, sovrastante la torre del castello sito sul poggio omonimo, e la stazione fu mestieri disporla ex-centro, determinandone, in un sopraluogo precedente l'andata definitiva, gli elementi di riduzione, che risultarono i seguenti:

$$\begin{array}{ll} \log e = 1.3738679 & \alpha = 124^{\circ} 38' 58''.7 \\ \varepsilon = 195^{\circ} 00' 58'' & \varphi = 44^{\circ} 56' 59'' \end{array}$$

essendo e l'eccentricità; ε l'angolo nella stazione ex-centro fra il vertice di Montecastello e S. Giovanni Nuovo, punto di terzo ordine, a circa 8 chilometri; α l'azimut osservato di quest'ultimo, e φ la latitudine. Le operazioni si protrassero dal 28 luglio al 5 agosto 1934, non favorite nella seconda metà da tempo sempre possibile; non mi fu peraltro fattibile, per varie ragioni, darne conto fino ad oggi. In esse fu determinata la latitudine, l'azimut della direzione al vertice anzidetto di S. Giovanni Nuovo, e la longitudine per via radiotelegrafica.

Le modalità seguite nello svolgimento delle operazioni, furono identiche a quelle tenute nelle altre stazioni, onde non ci soffermiamo a descriverle,

(1) Presentata nella seduta del 3 giugno 1938.

(2) V. questi « Rendiconti », dal 1925 al 1934.

passando senz'altro a dare, nei tre specchi che seguono, i risultati delle osservazioni di latitudine, di tempo e di azimut.

Latitudine.

Data	1° Gruppo	2° Gruppo	3° Gruppo	4° Gruppo
28 luglio 1934	44°56'60''.4	44°56'59''.1	44°56'59''.3	44°56'58''.4
29 » »	60''.3	58''.6	59''.8	60''.3
30 » »	60''.0	59''.1	—	—
Media	44°56'60''.2	44°56'58''.9	44°56'59''.5	44°56'59''.3

Facendo la media dei valori trascritti nell'ultima orizzontale si ottiene

$$46^{\circ}56'58''.3$$

che, ridotto al centro, dà come latitudine astronomica del vertice di Montecastello

$$44^{\circ}56'58''.6 \text{ (epoca 1934.6)}$$

.....

Tempo.

Data	Oraria (B. A. J.)	Correzione del Kullberg	Ora siderale corrispondente	Andamento orario
1° agosto 1934	(690) 109 Herc. (703) 110 Herc. (725) Aquilae	+ 20 ^s .52	18 ^h 35 ^m 43 ^s	0 ^s .0608
2 » »	(656) α Ophiuci (681) o Herc.			
(1)	(690) 109 Herc.	+ 21 .94	17 56 13	0 .0810
4 » »	(690) 109 Herc. (703) 110 Herc. (732) β Cygni	+ 25 .89	18 12 43	0 .0577
5 » »	(681) o Herc. (690) 109 Herc. (703) 110 Herc.			
		+ 27 .25	18 17 11	

(1) La sera del 3 agosto non si osservò, a causa delle mutate condizioni atmosferiche, guastate da violento temporale. In corrispondenza si riscontra una brusca variazione nell'andamento del cronometro, che tende a ritornare normale tra il 4 e 5 agosto.

Azimut di S. Giovanni Nuovo.

Data	Reiterazione	Azimut	Media
1° agosto 1934	0°	124°38'55".5	124°38'56".4
» » »	45°	57 .5	
5 » »	90°	57 .1	
» » »	135°	55 .7	

Calcolata ed applicata la riduzione in centro all'azimut osservato, si ottiene, quale azimut astronomico di S. Giovanni Nuovo, sull'orizzonte di Montecastello

$$124^{\circ}36'16''.8$$

.....

ATTRAZIONE LOCALE.

Da quanto precede, e dai dati forniti dall'Istituto Geografico Militare ne consegue

$$\text{Latitudine di Montecastello} \left\{ \begin{array}{l} \text{astronomica } \varphi_a = 44^{\circ}56'58''.6 \\ \text{geodetica } \varphi_g = 56''.3 \end{array} \right.$$

.....

$$\varphi_a - \varphi_g = + 2''.3$$

$$\text{Azimut della direzione di S. Giovanni Nuovo} \left\{ \begin{array}{l} \text{astronomico } \alpha_a = 124^{\circ}36'16''.8 \\ \text{geodetico } \alpha_g = 14''.8 \end{array} \right.$$

.....

$$\alpha_a - \alpha_g = + 2''.0$$

Calcolati da questi dati gli elementi dell'attrazione locale e il suo azimut ellissoidico, si ottiene

$$\xi = + 2''.3 \quad \eta = 2''.0 \quad \theta = 3''.05 \quad A = 41^{\circ}03'32''$$

.....

LONGITUDINE DI MONTECASTELLO SU GREENWICH.

La determinazione radiotelegrafica della differenza di longitudine fra Montecastello e Greenwich fu basata sulla ricezione dei segnali di Parigi, che sempre furono percepiti in maniera perfetta dall'apparato.

Gli elementi principali della determinazione vengono raccolti nella tabella seguente.

Longitudine di Montecastello da Greenwich.

Data 1934	Ora siderale locale alla ricezione 1° segnale	Ora Greenwich al 1° segnale	Differenza longitudine su Greenwich non corretta	Anda- mento R. T. orario	Correzione R. T. alla ricezione 1° segnale	Differenza longitudine su Greenwich corretta secondo l'andamento R. T.	Anda- mento astro- nomico orario	Correzione astronomica alla ricezione 1° segnale	Differenza longitudine su Greenwich corretta secondo l'andamento astronomico
1° agosto (sera)	19 ^h 44 ^m 44 ^s .74	19 ^h 10 ^m 21 ^s .12	—0 ^h 34 ^m 23 ^s .62	0.0689	+20 ^s .599	—0 ^h 34 ^m 44 ^s .219	0.0608	+20 ^s .599	—0 ^h 34 ^m 44 ^s .210
2 » (matt.)	6 46 32.38	6 12 09.52	22.86	0.0698	21.360	44.220	0.0608	21.261	44.121
2 » (sera)	19 48 39.60	19 14 17.65	21.95	0.0690	22.071	44.021	0.0810	22.054	44.004
3 » (sera)	19 52 34.49	19 18 14.20	20.29	0.0594	23.729	44.019	0.0810		
4 » (sera)	19 56 29.63	19 22 10.77	18.86	0.0780			0.0577		
5 » (matt.)	6 58 17.21	6 23 59.21	18.00	0.0729			0.0577		
5 » (sera)	20 00 24.38	19 26 07.33	17.05		27.375	44.425		27.349	44.399

Nella tabella precedente non figurano i risultati finali per la sera del 4 agosto e la mattina del 5, non essendoci sembrato conveniente introdurre in calcolo delle grandezze, la cui esattezza era certo infirmata dalla perturbazione rivelata dal cronometro nel suo andamento, fra la sera del 2 e il giorno 4 agosto.

Facendo la media dei valori ottenuti si ricava, per la longitudine della stazione rispetto a Greenwich

$$-0^h.34^m.44^s.204 = -8^{\circ}41'03''.060;$$

la riduzione al centro, calcolata con la solita formula

$$\Delta\lambda = \frac{r \operatorname{sen} (A' - \gamma)}{N \cos \varphi_a \operatorname{sen} I''}$$

importa $-1''.016$ onde, in definitiva, si ha per la longitudine di Montecastello, rispetto a Greenwich

$$\omega_a = -8^{\circ}41'02''.044.$$

Confrontando questo risultato con gli elementi forniti dall'Istituto Geografico Militare, si ottiene

Longitudine astronomica di Montecastello $\omega_a = -8^{\circ}41'02''.044$

» geodetica » $\omega_g = -8\ 40\ 57\ .294$

.....

da cui $\omega_a - \omega_g = 04''.750.$

Da questo valore, e dalla deviazione in azimut, precedentemente calcolata, si ha, quale residuo fornito dall'equazione di Laplace,

$$-1''.37;$$

che per la sua esiguità ci dispensiamo dal riportare fra gli elementi precedentemente dedotti.

Chimica biologica. — *Solubilità di acidi grassi e di gliceridi nella bile e nei sali biliari.*⁽¹⁾ Nota⁽²⁾ del Socio G. QUAGLIARIELLO e di F. CEDRANGOLO.

La solubilità degli acidi grassi e dei trigliceridi nella bile è problema assai importante per la spiegazione dell'assorbimento dei grassi dall'intestino. Di esso si sono perciò occupati diversi ricercatori, giungendo a conclusioni tutt'altro che concordanti.

Non è il caso di riferire in questa Nota tutta la bibliografia sull'argomento, ma ricordiamo solo che fra gli Autori più recenti, mentre von Fürth e Scholl⁽³⁾ ritengono che gli acidi grassi superiori e i grassi neutri vengono sciolti e resi diffusibili dalla bile, Verzar⁽⁴⁾ e Szörenyi⁽⁵⁾ limitano tale azione soltanto agli acidi grassi e Breusch⁽⁶⁾ e Vonk⁽⁷⁾ la negano non solo per i grassi, ma anche per gli acidi grassi.

Noi abbiamo ripreso lo studio di questo interessante e controverso argomento, studiando la diffusibilità degli acidi grassi (ac. oleico) e di alcuni gliceridi in soluzioni di soli sali biliari, di sali biliari e altri costituenti della bile, di bile intera.

Tecnica. — Gli acidi grassi o i gliceridi di cui si vuol studiare la diffusibilità vengono dispersi in bile, in soluzione di sali biliari o, infine, in soluzione di sali biliari e di altri costituenti della bile (colesterolo, lecitina, mucina ecc.). 10 cc. della dispersione sono messi a dializzare in tubi di cellofano o di pergamena artificiale (Schleicher e Schull) contro 40 cc. dello stesso mestruo in cui si è disperso l'acido grasso o il gliceride, avendo cura di mantenere allo stesso livello la superficie dei liquidi interno ed esterno, sulla quale viene stratificato un sottile velo di toluolo. La bile, raccolta da animali (bue) appena uccisi, prima dell'uso viene filtrata e bollita per 2 ore con refrigerante a ricadere, onde eliminare ogni eventuale azione enzimatica.

La dialisi avviene in termostato a 38° C e dura 15 ore. Una prova analoga, senza l'aggiunta dell'acido o del gliceride, viene tenuta in termostato per lo stesso tempo e serve come controllo.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica biologica della R. Università di Napoli.

(2) Presentata nella seduta del 3 giugno 1938.

(3) VON FÜRTH e SCHOLL, « Bioch. Zeit. », 222, 1930, p. 430.

(4) VERZAR, « Ibidem », 210, 1929, p. 265.

(5) SZÖRENYI, « Ibidem », 249, 1932, p. 183.

(6) BREUSCH, « Ibidem », 293, 1937, p. 280.

(7) VONK, « Ibidem », 295, 1938, p. 171.

Trascorso tale tempo, i liquidi esterni, della prova e del controllo, vengono titolati elettrometricamente sino a pH 8.5. La differenza tra i due valori di titolazione esprime la quantità di acido grasso libero diffuso. Su gli stessi liquidi si determinano gli acidi grassi totali + l'insaponificabile col metodo originale di Kumagava-Suto: la differenza tra la prova e il controllo indica la quantità di acidi grassi totali diffusi. Come è chiaro, la differenza tra acidi grassi totali e acidi liberi, diffusi, indica la quantità diffusa di acidi grassi esterificati.

La titolazione elettrometrica è stata preferita a quella ordinaria contro un indicatore, perchè l'uso di questo era reso difficile dalla colorazione della bile. La soluzione da titolare, in cui era immerso un elettrodo di platino intorno al quale gorgogliava idrogeno, era mantenuta a 38° C e connessa, mediante soluzione satura di KCl in agar, a un elettrodo saturo a calomelano mantenuto a temperatura ambiente: il pH 8.5 sopra indicato, essendo stato calcolato per 18° C, non è, perciò, quello reale. Ma quello che interessa è che a tale pH corrisponde una titolazione assai soddisfacente degli acidi grassi, come risulta dai seguenti esempi, che si riferiscono a esperienze di diffusione di acido oleico. In tali esperienze, non potendo diffondere altro che acido oleico, il valore degli acidi liberi deve coincidere con quello degli acidi totali diffusi. Orbene, in 15 di tali esperienze la differenza fra acidi grassi determinati gravimetricamente ed elettrometricamente variò dall'1 al 3 %, in media del 2 %.

Circa le membrane da noi adoperate nelle esperienze di dialisi, quelle di cellofano presentavano pori di un diametro non superiore ai 15 $\mu\mu$ (determinazione col metodo di Bechold ⁽¹⁾), mentre i pori delle membrane di pergamena erano certamente più piccoli.

La mucina adoperata fu preparata dalla bile.

I risultati delle nostre esperienze, sommariamente riepilogati nella tabella, dimostrano:

1° Che gli acidi grassi (acido oleico) sono resi diffusibili, sia dai sali biliari, sia dalla bile.

2° Che i gliceridi sono resi diffusibili dalla bile, ma non dai sali biliari.

3° Che fra le sostanze presenti nella bile che estendono il potere solvente dei sali biliari ai gliceridi, sono certamente da annoverare la colesterina e la lecitina.

(1) BECHOLD, « Zeitschr. f. physik. Chem. », 64, 1908, p. 328.

TABELLA.

*Diffusione di acido oleico e di gliceridi attraverso tubi di cellofano
o di pergamena (15 ore a 37° C).*

(Liquido interno 10 cc.; liquido esterno 40 cc. La composizione del liquido esterno è la stessa di quella del liquido interno meno l'acido oleico o il gliceride).

Composizione del liquido interno	natura della membrana	acido oleico o gliceride diffuso
1 acido oleico in bile	cellofano	48 mg acido oleico
1 a » id.	pergamena	41 »
2 » in sali biliari	cellofano	53.5 »
3 » in sali biliari + lecitina + colesterolo	»	62.6 »
3 a » id.	pergamena	34.1 »
4 trioleina in bile	cellofano	19.6 mg di gliceride
5 olio di olive in bile	»	20 »
6 trioleina + acido oleico in bile	»	19.5 »
7 monoleina in bile	»	22 »
8 tripalmitina in bile	»	1.1 »
9 tristearina in bile	»	2.1 »
10 trioleina + tristearina in bile	»	35.9 »
11 trioleina in sali biliari	cellofano	tracce di trioleina
12 » + acido oleico in sali biliari .	»	2.9 mg. »
13 » in sali biliari + lecitina . . .	»	5.7 »
14 » in sali biliari + colesterolo . .	»	3 »
15 » in sali biliari + lecitina + co- lesterolo	»	10.9 »
15 a » id.	pergamena	3.6 »
16 » in sali biliari + lecitina + co- lesterolo + mucina	cellofano	15.1 »
17 » in sali biliari + lecitina + co- lesterolo + sali minerali	»	11 »

Geologia. — *Nuovi studi sul giacimento di stagno del Campigliese.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. A. STELLA.

Lo studio del giacimento stannifero del Campigliese ha una importanza di primo ordine sia dal punto di vista scientifico generale per la singolare e si può dire unica caratteristica di vasta impregnazione stannifera di tipo idrotermale; sia dal punto di vista pratico nazionale, perchè, entrato da poco nella fase di sfruttamento minerario-metallurgico, fornisce già una produzione modesta di stagno, che però è una quota parte non trascurabile del fabbisogno nazionale.

I recenti e recentissimi lavori minerari, se hanno contribuito a rivelare la inattesa estensione della mineralizzazione stannifera, vanno fornendo nuovi elementi alla conoscenza scientifica del singolare giacimento, la quale deve essere guida al razionale sviluppo del suo non facile sfruttamento.

Credo pertanto interessante e non inutile esporre qui brevemente i principali risultati di nuovi rilievi e osservazioni che mi ha dato modo di fare la direzione della A. M. M. I. (Azienda Minerali Metallici Italiani) che sento il dovere di ringraziare.

È noto che il gruppo di colli che culminando al Monte Valerio frangevano la pianura Maremmana ad occidente di Campiglia Marittima, è la porzione meridionale di quella interessante formazione liassica che racchiude filoni di minerali misti solfurati e ammassi di minerali di ferro limonitico. Nella regione che qui ci interessa sono presenti solamente questi ultimi, i quali sebbene meno importanti come minerali di ferro, hanno richiamato nuovamente l'attenzione degli studiosi e dei pratici minerari da circa un sessantennio per il loro contenuto in stagno sotto forma di cassiterite. Individuata questa dall'ing. Blanchard nel 1875 in antichissime escavazioni minerarie aperte in certi ammassi limonitici, dapprima al piede del versante sudorientale del Monte Valerio (regione Centocamerelle), poi anche nel versante sudoccidentale (regione S. Barbara), si svolsero da allora interrottamente lavori minerari a più riprese in ambedue quelle zone ed in altre contigue; ciò specialmente nei periodi 1876-90, intorno al 1900 e poi dal 1908 al 1914. Quei lavori erano allora diretti all'estrazione delle lenti sporadiche di minerale ricco di cassiterite di mezzo a quelle masse ferifere.

Di questa interessante mineralizzazione stannifera del Campigliese si occuparono parecchi studiosi dopo il Blanchard ⁽²⁾ e cioè A. D'Achiardi ⁽³⁾,

(1) Presentata nella seduta del 3 giugno 1938.

(2) F. BLANCHARD, *Sulla scoperta della cassiterite a Campiglia Marittima.* « Boll. Comit. Geologico », 1876.

(3) A. D'ACHIARDI, *I minerali: loro metalli e miniere.* Vol. II, Hoepli, Milano, 1883.

B. Lotti ⁽¹⁾, A. Bergeat ⁽²⁾ e lo scrivente ⁽³⁾ in successive pubblicazioni, le quali tutte si riferiscono al minerale delle accennate masse ferrifere. Già nel 1912 io avevo constatato e figurato il modo di presentarsi della cassiterite anche disseminata in finissime granulazioni nel minerale di ferro di S. Barbara, e dimostrato la possibilità di un arricchimento meccanico. Già in quegli anni lavori minerari avevano constatato la presenza di cassiterite abbastanza diffusa anche nel calcare e negli scisti del lias di Monte Valerio, come io ebbi a riferire nella pubblicazione citata del 1921.

Le ricerche minerarie posteriori hanno confermato tale risultato e anzi lo hanno generalizzato nel senso, che tale mineralizzazione stannifera diffusa, sebbene in proporzioni tenui, investe in vario modo e misura l'intera formazione liasica intorno al Monte Valerio, e cioè sia i calcari che gli scisti ad essi sovrapposti.

Si ha quindi un fenomeno molto interessante dal punto di vista geologico, e che anche dal punto di vista pratico minerario va acquistando la sua importanza mediante laboriosi e non facili lavori di ricerca atti a indirizzare la coltivazione nelle zone più vantaggiose della estesa mineralizzazione.

Geologicamente considerata questa formazione liasica stannifera si estende attorno al Monte Valerio esplorato finora specialmente sul versante meridionale. La disposizione tettonica è semplice, data da una anticlinale coll'asse diretto da nord a sud presso a poco come il medio pendio del monte, e come esso inclinato verso sud, con pendenza minore di quella del terreno.

In questo complesso calcareo-scistoso concordante e disposto ad anticlinale non si osservano notevoli irregolarità di ripiegamento, solo si hanno oscillazioni nell'andamento dei banchi e qualche limitata piega-faglia a ginocchio. Invece sono frequenti le fratture anche notevoli, però senza spostamento; esse hanno direzione quasi sempre di poco oscillante attorno al meridiano, sono quasi verticali e spesso beanti con larghezza da qualche decimetro a un metro circa; spesso sono parzialmente riempite di travertino alabastrino che forma crostoni di salbanda, e inoltre di blocchi e frammenti delle rocce incassanti misti con materiali del terreno superficiale.

Per tal modo la maggior parte del versante di Monte Valerio presenta gli affioramenti dei banchi calcarei, mentre ai due fianchi occidentale e orien-

(1) B. LOTTI, *Sulla genesi dei giacimenti metalliferi di Campiglio Marittima*, « Boll. Comit. Geologico », 1900; ID., *Geologia della Toscana*. Memorie descrittive della Carta geologica d'Italia. Vol. XIII, 1910, Roma, Bertero e C.; ID., *I depositi di minerali metalliferi*. Edizione della Industria Mineraria, 1928, Roma.

(2) A. BERGEAT, *Beiträge zur kenntniss der Erzlagerstätten von Campiglia*. « Neues Jahrb. für Min. Geol. u. Paleont. », 1901, I.

(3) A. STELLA, *Il minerale ferro-stannifero di Campiglia Marittima e il suo possibile arricchimento*. « Rass. Min. Metallurg. e Chimica », 1912; ID., *Le Miniere di ferro dell'Italia* 1921, Lattes, Torino.

tale, si mostrano ad essi concordemente addossati gli scisti del lias superiore, i quali girano poi lungo l'orlo meridionale costituendo anche il poggio della Luna e formando cappello alla cresta del monte.

Questa formazione calcarea liasica ripete qui abbastanza bene la distinzione generale per il lias toscano, fra un gruppo superiore e un gruppo inferiore di calcari ⁽¹⁾. Il gruppo inferiore si presenta in grossi banchi spesso a stratificazione poco netta di calcari grigi, cerulei, massicci, visibilmente venati di calcite. Il gruppo superiore nettamente stratificato presenta i calcari a banchi alternanti grigi, rosati e giallastri compatti e qua e là selciferi nella parte suprema e invece più rossicci e salini nella parte più bassa.

La conformazione topografica di Monte Valerio fa sì, che mentre nel versante meridionale affiorano estesamente ambedue i gruppi calcari, nel versante settentrionale verso la valle del Pozzatello affiora molto più estesamente il gruppo inferiore; dove i banchi diventano bianchi saccaroidi, e vanno a svilupparsi oltre la valle a Monte Spinosa, simili a quelli incontrati nelle trivellazioni profonde di cui dirò più avanti.

La formazione scistosa soprastante consta di scisti argilloso-silicei variegati e spesso fortemente alterati, passanti a diaspri e nella parte superiore anche a quarziti; presentano alla base alternanze di calcari scistosi e in alto una coperta di calcare cenerognolo spesso brecciato e ferruginoso passante e alternante con zonature di minerale di ferro limonitico e sideritico.

A questa formazione scistosa è legato nella zona di S. Barbara il minerale di ferro più o meno stannifero sotto forma di limitati ammassi lenticolari o filoniformi. Essi furono in gran parte già coltivati nel passato, ma solo in piccola parte esportati, limitatamente ai noduli più pesanti ricchi in cassiterite, il che ha dato luogo a grandi discariche di minerale più povero in stagno, ma attualmente utilizzabile previo arricchimento meccanico.

Mineralizzazione ferrifera si riscontra ancora nell'orlo meridionale sopra citato messa in evidenza pure da vecchi scavi negli scisti a contatto col calcare del tetto e così pure lungo la falda opposta del Poggio alla Luna.

Meno sviluppata sembra nell'ala orientale della formazione scistosa; però nella falda bassa di regione Fumacchio vecchie coltivazioni di oltre un trentennio addietro asportavano una lente di minerale di ferro inserita negli scisti, discretamente ricco in cassiterite, di cui rimane qualche traccia mascherata dallo sfacelo detritico che ricopre quel versante. Di ciò fa testimonianza il Bergeat che lo descrive nella sua memoria citata dopo una sua visita del 1900.

Nella formazione calcarea sottostante agli scisti non affiorano attualmente ammassi ferriferi propriamente detti, se non nella parte alta del versante sotto forma filoniana alla così detta cava Scalpellini. Riaffiora poi nel

(1) Questa suddivisione del Lias appare anche nel foglio 19° Massa Marittima della Carta Geologica d'Italia del R. U. G. nella scala di 1 : 100.000 su rilevamenti del Lotti.

versante opposto negli scavi detti Buche del Tasso una massa filoniana che manda digitazioni laterali fra banco e banco del calcare.

Affioravano per lo addietro limitati ammassi ferriiferi anche nei banchi salini, rossastri delle Centocamerelle coltivati dall'ing. Blanchard e constatati anche dal Lotti e dal Bergeat e completamente esportati insieme coi noduli ricchi in essi racchiusi.

È interessante notare, che già quei due studiosi avevano osservato una certa impregnazione di granuli di pirite limonitizzata nel calcare incassante a contatto dei suddetti ammassi ferriiferi e stanniferi; e anzi il Bergeat osservava al microscopio in quei granuli minutissime inclusioni di cassiterite, come io l'avevo osservata nella ematite bruna di S. Barbara. Soltanto più tardi, come sopra accennato, si è constatato, che, oltre a questi granuli di pirite stannifera limonitizzata, quei calcari rossastri contengono anche granuli di cassiterite fina submicroscopica, ma in proporzioni limitate che in generale sembrano variare col variare della impregnazione piritosa, con tenore in stagno che in alcune zone favorevoli si avvicina all'1 %. Si hanno però eccezionalmente anche parti speciali molto ricche (dette « masselli » dai minatori) le quali possono anche avere tenori del 20 e fino del 70 % in stagno. In tal caso però esse contengono pochissima ematite, e hanno aspetto compatto rivelandosi A. M. come aggregati microgranulari di cassiterite a ganga interstiziale di calcite. Si presentano come lenti limitate per lo più concordanti col verso di stratificazione, come straterelli ricchi discontinui interposti nel calcare, sì da dimostrare chiaramente il fenomeno metasomatico per cui la mineralizzazione è avvenuta per sostituzione al calcare.

D'altra parte si constata che la diffusione stannifera si presenta in quasi tutta la serie di banchi di Monte Valerio, ma generalmente in proporzioni più tenui sì da aversi tenori in stagno di qualche unità o frazione di unità per mille ⁽¹⁾.

I dati sopra esposti risultano ormai accertati da un numerosissimo prelevamento di singoli campioni passati all'analisi chimica e all'esame microscopico, e dalle prove sperimentali di arricchimento fisico-meccanico operato sia in Laboratori su campioni medii, sia in scala industriale sopra masse notevoli di abbattimento. È poi confermato anche da analogo studio delle terre rosse sciolte di alterazione superficiale, le quali tutte mostrano un contenuto di cassiterite.

Ciò che si è detto qui della distribuzione della cassiterite nella formazione calcare si può ripetere anche per la formazione scistosa superiore, almeno per quella della zona occidentale sufficientemente saggiata. Ivi pure la impregnazione cassiteritica insieme con granuli di pirite alterata investe

(1) Come termine di confronto noto, che secondo i dati più attendibili, anche nei giacimenti stanniferi dell'estero, pur avendosi qua e là parti ricche, il minerale bruto medio è di basso tenore, e deve sempre essere arricchito. In Sassonia si dà un tenore medio di 0,5 % in stagno; in Australia 0,7 e in Bolivia 1 %.

tutta si può dire la formazione anche fuori delle masse ferrifere propriamente dette, e anche qui con tenori intorno ai bassi limiti sopra indicati. Non mancano neppur qui parti ricche (dette dai minatori massello o «pietra») che si presentano infatti anche con aspetto litoide, come parti speciali dei banchi quarzitici. Esse A. M. si rivelano qui costituite di un aggregato granulare finissimo di cassiterite con una massa interstiziale quarzosa, con pochi granuli di pirite e limonite.

Tenuto conto dei dati sopra esposti la nostra mineralizzazione si può effettivamente caratterizzare come «ferro-stannifera» essendo la cassiterite sempre legata ad una più o meno accentuata presenza di limonite proveniente da pirite, sia nei calcari che negli scisti. La mineralizzazione ferrifera si manifesta nell'area mineraria essenzialmente come ematite bruna derivante da alterazione di pirite più o meno stannifera in grani pseudomorfici minuti e minutissimi oppure in spalmature ocracee o in vene ferruginose o anche in masse più notevoli e lenticolari. Tale limonite secondaria spesso concrezionare è a sua volta accompagnata nei calcari da calcite e da spato bruno secondari e negli scisti da sostanze argillose con quarzo.

L'esame microscopico permette di precisare l'intimo legame paragenetico fra cassiterite e pirite rivelato sia da reciproco incastro, sia da inclusioni della prima nella seconda; ragione per cui all'analisi l'ematite bruna pseudomorfa di pirite è sensibilmente stammifera. L'esame microscopico mostra poi come i grani di ematite bruna in certi banchi calcarei presentano una aureola ocracea che va a diffondersi negli interstizi capillari dell'aggregato microgranulare di calcite: il che impartisce al calcare una colorazione più o meno giallastra o rosata che può acquistare anche toni più caldi fino al rosso mattone al crescere della pigmentazione in rapporto all'abbondanza di pirite originaria e anche alla grana del calcare stesso.

Questi rilievi hanno una grande importanza anche pratica perchè portano al risultato, che in generale nella grande massa dei banchi calcarei della zona mineraria il tenore in stagno sia maggiore nelle parti più visibilmente ferruginose abbastanza ben distinguibili dalla restante massa generale dei calcari. Sono queste parti che costituiscono praticamente il «minerale utile» del giacimento. Esse sono naturalmente discontinue e si presentano in varie giaciture, cioè o disposte come lenti e lingue nel verso di stratificazione, oppure in senso più o meno trasversale ai banchi fino a diventare filoncelli o colonne mineralizzate; oppure anche costituiscono porzione più o meno discontinua di banchi più salini e arrossati specialmente nella zona dei banchi interposti fra il gruppo calcare superiore e quello inferiore sopra indicati. È da aggiungere infine, che parti mineralizzate si trovano anche nelle fratture tettoniche addietro accennate, le quali presentano riempimento totale o parziale, essenzialmente travertinoso alle salbande, mentre poi si osservano inglobati blocchi e frammenti di calcari incassanti, cementati da

deposito travertinoso e ocraceo: si osservano pure tasche di ocre rosse abbastanza ricche di cassiterite, spesso alle salbade della frattura.

Del resto la limonitizzazione della originaria pirite non è da intendersi in senso assoluto, perchè si trovano nei calcari più o meno stanniferi anche piriti imperfettamente trasformate e impregnazioni di pirite fresca. Noduli di pirite fresca con crosta limonitica si trovano anche nelle masse ferrifere inserite negli scisti.

È molto importante il fatto che l'alterazione della pirite risulta molto minore in profondità, come è dimostrato dalle trivellazioni eseguite. L'esame infatti dei testimoni e delle sabbie portate a giorno dalla corrente di ritorno dell'acqua dall'avanzamento dei fori di sonda mostra prevalente la pirite fresca su quella alterata, fino anche alla profondità di un migliaio di metri sia sopra che sotto il livello acquifero attuale.

I fori di sonda eseguiti finora nell'area che ci interessa sono quattro, scaglionati da ovest a est ed entrano per più centinaia di metri nella potente successione dei banchi calcari al disotto della coperta di scisti liasici superiori. Uno di essi ha raggiunto l'imbasamento del granito alla profondità di oltre 1000 metri; ed è interessante il confronto fra la natura di questo contatto profondo, calcare — granito con quella dell'analogo contatto superficiale ben noto al Campo alle Buche nel vicino Botro dei Marmi. Ivi il granito⁽¹⁾ affiora in breve spazio a tre km. di distanza dal sondaggio profondo, mostrando l'analogia piena con esso. In ambedue infatti il granito presenta facies aplitica; e i calcari sono a Campo alle Buche ridotti marmorei per un vasto spazio, e passano, a diretto contatto col granito, a facies di corneane silicatiche costituite di pirosseno, anfibolo e vesuviana⁽²⁾, e presentano secondo Lotti, tracce di cassiterite. Analogo è il contatto profondo attraversato dalla sonda: a diretto contatto col granito si ha una corneana silicatica costituita da pirosseno, anfibolo, granato ed epidoto, con felpato, quarzo e calcite subordinati, e venuzze di pirite. I banchi calcari attraversati superiormente alla corneana sono marmorizzati su uno spessore di circa 300 metri, parte di essi con cassiterite. Ma è notevole il fatto, che mentre si hanno appena tracce di cassiterite nei calcari a diretto contatto colla corneana e ancora molto scarsa nei calcari soprastanti per un 200 metri, la cassiterite cresce sensibilmente nei banchi a questi superiori.

(1) È noto che ivi il granito presenta qua e là geodi di tormalina. Ora è interessante notare, che la tormalina, pur non essendo finora stata constatata nelle rocce liasiche della zona, deve essere presente, sia pure sporadicamente, nella formazione scistosa superiore, perchè io ebbi a constatarla in granuli prismatici microscopici in certe porzioni finissime dei prodotti intermedi delle tavole di concentrazione meccanica, in esperienze eseguite sulle vecchie discariche di S. Barbara, le quali contengono abbondanti frammenti di scisti, diaspri e quartziti.

(2) F. RODOLICO, *Ricerche sulle rocce eruttive recenti della Toscana: le rocce del Campigliese*. Pisa, Lischi e figlio, 1931.

Tutto ciò è del massimo interesse perchè ci illumina sui rapporti fra la intrusione granitica e i giacimenti stanniferi, rapporti che attualmente si possono abbastanza bene precisare.

Che anche qui, come in generale nei giacimenti stanniferi, ci debba essere un qualche rapporto fra essi e le rocce eruttive della regione, già un cinquantennio addietro era stato supposto da Antonio D'Achiardi. Tale legame ammetteva e precisava il Lotti, inducendo dai suoi rilievi geologici una derivazione dal granito.

Questa dipendenza dalla intrusione granitica è però da intendersi in modo molto diverso da quanto si pensa per i classici giacimenti essenzialmente pneumatolitici dell'Erzgebirge sassone, dell'Australia e della Malesia. Rispetto a questi sussistono notevoli differenze; mentre si hanno piuttosto analogie coi giacimenti filoniani della Cornovaglia e della Bolivia, malgrado la dissimiglianza morfologica. Infatti i giacimenti del primo gruppo sopra citato sono localizzati all'immediato perimetro di masse granitiche sotto forma di reticolati di vene (stockwerk) sia nel granito che negli scisti all'immediato contatto; contengono minerali ricchi in fluoro, boro, fosforo, litio (tormalina, topazio, fluorina, lepidolite, apatite), e la cassiterite vi è accompagnata da volframite, molibdenite, blenda, arsenopirite, e pirite. Il nostro giacimento invece è mineralogicamente molto più semplice, costituito quasi soltanto di cassiterite e pirite stannifera più o meno alterata, accompagnate da calcite o da quarzo⁽¹⁾. E la mineralizzazione in vario modo si estende alla intera potenza della formazione liasica sovrastante al granito fino entro agli scisti superiori; mentre la zona verso il contatto profondo tende a impoverirsi, e al contatto diretto col granito si trova soltanto corneana silicatica.

Anche nei giacimenti filoniani, come rileva il Krusch⁽²⁾, ha luogo un impoverimento in profondità sia in Cornovaglia che in Bolivia; in Bolivia si ha una pirite stannifera che presenta, come la nostra, microinclusioni di cassiterite. Ciò fa pensare al fenomeno analogo della cassiterite inclusa nella blenda e nella galena in certi filoni della Sassonia e nei nostri sardi di Canale Serci, cioè sempre in giacimenti idrotermali.

Come questi anche il nostro giacimento ha carattere spiccatamente idrotermale ed è presumibilmente legato all'intrusione granitica. Questa in un primo tempo ha esercitato durante il suo consolidamento azione metamorfica sul calcare liasico trasformandolo in corneana silicatica nella zona

(1) Altri minerali metallici si può dire che sono assenti o quasi. Si trova raramente qualche mosca di galena e qualche raro nodulo di oligisto. Ricontrai magnetite nelle terre rosse più o meno stannifere accumulate al piede di Monte Valerio; la quale potrebbe provenire dagli scisti superiori. Si ha anche presenza di manganese sotto forma di ossido, sia in spalmature con le solite arborescenze nelle litoclasti capillari dei calcari o anche in noduli nelle masse ferrifere.

(2) H. KRUSCH, *Untersuchung und Benertung der Erzlagerstätten*. Stuttgart, Enke, 1920.

di contatto immediato, e rendendolo marmoreo su molto notevole spessore; in un secondo tempo, avvenuto il consolidamento almeno parziale del magma eruttivo, devono essere seguite azioni idrotermali apportatrici della mineralizzazione piritoso-cassiteritica, che ha potuto investire l'intera potente copertura calcareo-scistosa deponendosi via via in ambiente termico meno elevato.

Del resto se si segue il Lindgren ⁽¹⁾ nella disamina che egli fa dei giacimenti stanniferi mondiali, si arriva bensì alla visione di un complesso genetico abbastanza unitario dei vari giacimenti in dipendenza di rocce granitiche o monzonitiche, ma si è condotti a rilevare anche qui una demarcazione significativa fra il fenomeno di contatto termico essenzialmente silicatizzante e il fenomeno di apporto metallifero: questo può essere legato alla fase pneumatolitica (tipo stockwerk) ma anche alla fase idrotermale (come nei filoni); ciò analogamente agli altri comuni giacimenti metalliferi. In questi però la fase idrotermale si esplica in doppio modo, cioè in filoni e in impregnazioni metasomatiche. Per lo stagno erano noti i giacimenti pneumatolitici, come pure i giacimenti filoniani idrotermali; il giacimento di Campiglia completa la serie come rappresentante dei giacimenti stanniferi di tipo metasomatico idrotermale.

Questi risultati ci fanno intravedere eventuali rapporti con tutto il complesso e interessante fenomeno metallogenico del Campigliese legato anche alle altre rocce eruttive acide della regione.

(1) W. LINDGREN, *Mineraldeposits*. London, 1933.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sur les fonctions polygènes d'une et de plusieurs variables complexes duales et de variables biduales.*
Nota I di J. C. VIGNAUX, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

M. Pompeiu, en deux Notes déjà classiques des « Rendiconti » del Circolo Matematico di Palermo, to. 33, 1912; to. 35, 1913, a introduit la classe des *fonctions holomorphes* (α) (*polygènes*) d'une variable complexe ordinaire, à laquelle les récents travaux de M. Kasner, Calugaréano, Burgatti, Théodoresco et d'autres ont apporté d'importantes contributions.

Dans cette première Note, je me propose l'étude des fonctions polygènes d'une et de plusieurs variables complexes duales. Dans la seconde, je généralise aux trois types de bicomplexes duaux: l'*elliptique*, l'*hyperbolique* et le *parabolique*; c'est-à-dire hypercomplexes de la forme

$$z = x + ky \quad (k^2 = 0)$$

où x et y sont des complexes ordinaires, hyperboliques et duels respectivement, les résultats ci-dessous et quelques autres.

A ce premier type de bicomplexes on peut réduire le quaternion considéré récemment par M. L. Sobrero ⁽²⁾ au moyen d'un changement d'unités dû à M. Levi-Civita.

2. Considérons une fonction

$$w = f(z) = u(x, y) + kv(x, y) \quad (k^2 = 0)$$

de la variable complexe duale ⁽³⁾: $z = x + ky$, u et v étant des fonctions réelles de x et y continues. Soit z un point du plan z , et δ une droite passant au z ; nous appellerons *derivée radiale* de $f(z)$ suivant la direction δ , la limite de la relation

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\Delta u + k \Delta v}{\Delta x + k \Delta y} \quad (\Delta x \neq 0)$$

quand le point $z + \Delta z \rightarrow z$, sur la droite δ .

(1) Nella seduta del 5 dicembre 1937.

(2) L. SOBRERO, *Algebra delle funzioni ipercomplesse e sue applicazioni alla teoria matematica dell'elasticità*. « Memorie della Reale Accademia d'Italia », N. 1, 1934.

(3) STOLZ und GMEINER, *Theoretische Arithmetik*, to. II, Berlin, 1915.

Pour toute fonction $f(z)$ où u et v sont différentiables, on a

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_\delta = \frac{1}{1+km} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + m \frac{\partial u}{\partial y}\right) + k \left(\frac{\partial v}{\partial x} + m \frac{\partial v}{\partial y}\right) \right]$$

où: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Les diverses dérivées en un point z quelconque ont leurs affixes sur une parabole d'axe parallèle à l'axe imaginaire⁽¹⁾.

3. Nous pouvons écrire l'expression (2)

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_m = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + k \frac{\partial v}{\partial x}\right) + me^{-km} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + k \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right)\right),$$

si l'on remarque que: $e^{mk} = 1 + mk$. Donc, la condition pour que la dérivée soit indépendante de la direction m , est que

$$\frac{\partial u}{\partial y} + k \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) \equiv 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y};$$

ce sont les conditions de monogénéité duale⁽²⁾. On peut établir ces relations avec des hypothèses très générales, analogues à celles de M. Montel, pour le cas des fonctions ordinaires⁽³⁾.

4. Nous appellerons *dérivée aréolaire duale* de $f(z)$ l'expression

$$\begin{aligned} Df(z) &= \frac{\partial u}{\partial y} + k \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) \\ &= \frac{\partial w}{\partial y} - k \frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned}$$

Les fonctions monogènes duales, ont la propriété que $Dw \equiv 0$ et réciproquement; par conséquent ces fonctions jouent le rôle des constantes dans

(1) E. KRAMER, dans une Note de l'« American Journal of Math. », vol. LII, 1930, a étendu, en utilisant un système spécial de coordonnées, les résultats de E. Kasner, relatifs aux fonctions polygènes ordinaires. Les recherches sont d'un caractère plutôt géométrique.

Dans le cas des fonctions polygènes de variable complexe hyperbolique: $f(z) = u + jv$ ($j^2 = -1$), les dérivées radiales dans un point z , ont leurs affixes sur une hyperbole équilatère d'asymptotes parallèles aux bissectrices des axes coordonnés.

(2) E. STUDY, *Geometrie der Dynamen*, p. 199, Leipzig, 1931.

(3) P. MONTEL, *Thèse*, 1907, p. 59, ou « C. R. Ac. Sc. », to. 156, 1913.

le cas de la dérivation aréolaire duale. En introduisant la notion de *dérivée symétrique duale* par la relation

$$\begin{aligned}\bar{D}f(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + k \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial w}{\partial x} + k \frac{\partial w}{\partial y};\end{aligned}$$

on obtient pour la dérivée radiale de la fonction w , l'expression

$$\left(\frac{dw}{dz} \right)_m = \bar{D}w + Dw \cdot me^{-k \left(m - \frac{1}{m} \right)}.$$

5. La théorie de ces fonctions peut se développer plus simplement, si l'on considère en même temps que la variable z , la variable z' , liées par les relations

$$z = x + ky, \quad z' = y - kx;$$

dans ce cas-là, on a :

$$\bar{D}w = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad Dw = \frac{\partial w}{\partial z'}.$$

De ceci, on déduit simplement les règles du calcul de la dérivée aréolaire et symétrique duale et plusieurs d'autres propriétés.

6. Soit $f(z)$ une fonction duale continue de z , le long de la courbe C de Jordan, et divisons l'arc \widehat{AB} en arcs partiels au moyen des points z_0, z_1, \dots, z_n . L'intégrale de $f(z)$ sur \widehat{AB} , est définie par l'expression

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n f(\xi_i) (z_i - z_{i-1}) = \int_{\widehat{AB}} f(z) dz.$$

De ceci, il résulte

$$(3) \quad \int_{\widehat{AB}} f(z) dz = \int_{\widehat{AB}} u(x, y) dx + k \int_{\widehat{AB}} v(x, y) dx + u(x, y) dy$$

et

$$\left| \int_{\widehat{AB}} f(z) dz \right| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} M \cdot l,$$

où $|f(z)| < M$, et l la longueur de l'arc \widehat{AB} .

7. Soit une fonction $w = u + kv$, u et v ont des dérivées partielles de premier ordre continues dans le domaine (A) limité par la courbe

fermée C. De la relation (3) et du théorème de Green, on déduit la formule fondamentale

$$(4) \quad \int_C f(\zeta) d\zeta + \iint_A Df(v) dv = 0$$

où la variable v parcourt le domaine A.

Si $f(\zeta)$ est monogène duale sur A, il résulte

$$(5) \quad \int_C f(\zeta) d\zeta = 0,$$

et réciproquement, si cette relation se réalise pour toute courbe fermée intérieure à (A), la fonction $f(\zeta)$ est monogène duale dans le domaine (A).

De la relation (4) on déduit en outre

$$\lim_{\gamma \rightarrow \delta} \frac{\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta}{\iint_{\delta} dv} = Df(\zeta_0),$$

où γ est un contour renfermant le point ζ_0 , qui limite la région δ , quand la courbe $\gamma \rightarrow \zeta_0$ par déformation continue.

La formule (5), peut s'établir avec les mêmes hypothèses que dans le cas du théorème de Cauchy ⁽¹⁾. En voici une qui ne suppose pas l'existence des dérivées partielles, analogue à celle de M. Lichtenstein ⁽²⁾ pour les fonctions ordinaires.

Si la relation

$$\frac{1}{h} [k\Delta_x w - \Delta_y w]$$

est bornée dans l'intérieur de C, où $\Delta_x w$ et $\Delta_y w$ sont les accroissements partiels par rapport à x et à y de u et v , et l'on vérifie que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [k\Delta_x w - \Delta_y w] = 0,$$

la fonction $f(\zeta)$ satisfait à l'équation (5).

8. Les fonctions monogènes duales d'une ou de deux variables sont définies par des séries simples ou doubles de puissances, convergents ou sommables par le procédé de M. Borel. Dans ces dernier cas le polygone

(1) E. GOURSAT, *Transactions of the American Math. Society*, 1, 1900; pp. 14-16.

(2) « Comptes Rend. Acad. Sc. Paris », 150, 1910, p. 1109.

dè sommabilità se réduit à une bande indéfinie de côtés parallèles à l'axe imaginaire et dont les distances à cet axe sont données par la formule de Borel-Servand.

9. Plusieurs de ces conclusions s'étendent également, aux fonctions monogènes et polygènes de plusieurs variables duales ⁽¹⁾.

Matematica (Analisi matematica). — *Il problema di Cauchy in grande, e le equazioni alle derivate parziali lineari a coefficienti costanti*. Nota di E. FROLA, presentata ⁽²⁾ dal Socio G. FUBINI.

Consideriamo l'equazione:

$$(1) \quad \sum_{r,s,t} C_{rst} D_{x_1}^r D_{x_2}^s D_{x_3}^t u(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad (r + s + t \leq n)$$

e cerchiamo di trovare una norma generale che permetta di asserire, se il problema in grande di Cauchy per la (1) coi dati sul piano $x_1 = 0$ è ben posto o meno. In altre parole, se, assegnati su $x_1 = 0$ i valori della u e delle sue prime $k - 1$ derivate [se k è il massimo ordine di derivazione rispetto x_1 che compare in (1)], è possibile, o meno, soddisfare alla (1) con soluzione regolare in tutto il semispazio $X_1 > 0$, e soddisfare nello stesso tempo i prescritti valori su $x_1 = 0$. In caso poi di impossibilità trovare quale tipo di condizioni devono mutualmente intercedere tra i valori, della u e delle sue successive $k - 1$ derivate, assegnati per $X_1 = 0$.

È noto che se la (1) è in particolare l'equazione delle onde:

$$[-D_{x_1}^2 + D_{x_2}^2 + D_{x_3}^2] u = 0$$

con x_1 posto in vece della solita t , il problema di Cauchy in grande è per essa ben posto relativamente al piano $x_1 = 0$. Si possono infatti assegnare la u e la $\frac{\partial}{\partial x_1} u$ per $x_1 = 0$, cioè le condizioni all'inizio del moto, in modo affatto arbitrario (non escluse però certe restrizioni di carattere puramente qualitativo) e con ciò soddisfare in modo unico all'equazione per tutto $x_1 > 0$.

(1) Pour les fonctions polygènes de plusieurs variables ordinaires: E. MARTINELLI, « Memorie della Reale Accad. d'Italia », N. 3, Roma, 1937; A. TONOLO, « Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Padova », VI, nn. 1-2, 1935; J. C. VIGNAUX, « Anales de la Soc. Ci. Argentina », to. CXX, julio, 1935.

(2) Nella seduta del 3 giugno 1938.

È invece parimenti noto che se prendiamo in considerazione l'equazione di Laplace:

$$[D_{x_1}^2 + D_{x_2}^2 + D_{x_3}^2] u = 0$$

il problema di Cauchy in grande è sempre mal posto: non si può cioè assumere arbitrariamente la u e la $\frac{\partial}{\partial x_1} u$ per $x_1 = 0$ e soddisfare l'equazione in tutto $x_1 > 0$. Si sa infatti che, assunta arbitrariamente la u , la $\frac{\partial}{\partial x_1} u$ resta perfettamente determinata, se si vuole che la soluzione sia regolare in tutto $x_1 > 0$. (o viceversa, a meno di una costante) essendo in questo caso ben posto il problema di Dirichlet per il semispazio. Può dirsi allora che il problema di Cauchy in grande non è ben posto, salvo che lo si abbassi di un grado riducendolo ad un problema di Dirichlet.

Un terzo caso che sta a cavallo dei due è quello da me studiato in una Nota *Sul caso anormale del problema di Cauchy per l'equazione delle onde* (« Atti R. Acc. delle Scienze di Torino », maggio, 1938). Il caso cioè, in cui, riferendosi all'equazione delle onde, si ponga il problema per una varietà spaziale anzichè temporale: colle notazioni qui usate l'equazione diventa:

$$[D_{x_1}^2 + D_{x_2}^2 - D_{x_3}^2] u = 0$$

i dati al solito su $x_1 = 0$.

In questo caso non si possono fissare arbitrariamente la u e la $\frac{\partial}{\partial x_1} u$ per $x_1 = 0$, ma, a parte restrizioni di carattere qualitativo, la $\frac{\partial}{\partial x_1} u$ resta parzialmente determinata dalla u o viceversa. Per maggior chiarezza, se considero le anti trasformate doppie di Fourier della u_0 e della u_1 , valori assegnati per la u e per la $\frac{\partial}{\partial x_1} u$, cioè quelle due funzioni $\alpha_0(m, n)$, $\alpha_1(m, n)$ per cui sussiste:

$$u_0(x_2, x_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_0(m, n) e^{-i(mx_2 + nx_3)} dm dn$$

$$u_1(x_2, x_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_1(m, n) e^{-i(mx_2 + nx_3)} dm dn$$

esse possono essere arbitrariamente assegnate per quei valori di m, n che soddisfano a $|n| > |m|$, mentre per i rimanenti deve tra esse intercedere la relazione:

$$\alpha_0(m, n) + \frac{\alpha_1(m, n)}{\sqrt{m^2 - n^2}} = 0.$$

In questo caso si potrà dire che il problema di Cauchy in grande è possibile a patto di sostanziali limitazioni.

La strada che seguo in questa ricerca è del tutto simile a quella che mi condusse ai risultati enunciati nella Nota citata, anzi per ogni questione di dettaglio, prego il lettore ricorrere a tale Nota.

Anche qui il principale strumento è l'integrale doppio di Fourier secondo le due variabili x_2, x_3 parallele al piano relativamente al quale è posto il problema.

Anche qui introduco classi funzionali particolarmente legate all'integrale doppio di Fourier, nè questo deve stupire perchè esiste un legame intimo tra il problema che si studia e l'integrale di Fourier: legame cui mi piace brevemente accennare.

L'equazione (1) possiede degli integrali elementari del tipo:

$$e^{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3}$$

dove $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ son tra loro legati dall'equazione algebrica:

$$(2) \quad \sum_{rst} c_{rst} \alpha_1^r \alpha_2^s \alpha_3^t = 0.$$

In ultima analisi, come nelle equazioni ordinarie si tenta di risolvere il problema di Cauchy con integrali particolari, anche qui ho cercato la soluzione a mezzo di composizioni di tali integrali particolari.

Ma in questo caso intere classi di integrali particolari (2) devono venire scartati come inutili e come contrastanti con la regolarità della soluzione all'infinito: tali classi sono quelle che non corrispondono a valori immaginari puri per α_2, α_3 .

D'altronde estesissime classi funzionali nelle variabili x_2, x_3 possono essere rappresentate a mezzo di integrali doppi di Fourier cioè a mezzo di composizioni di termini del tipo $e^{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3}$ con α_2, α_3 immaginari puri.

Nè risultati buoni sono da aspettarsi dal considerare la soluzione della (1) come integrale triplo di Fourier: tale apposizione equivarrebbe a scartare tutti quegli integrali particolari che non hanno la α_1 immaginaria pura, e ciononostante sono perfettamente regolari per $x_1 > 0$.

È bensì vero che l'integrale triplo di Fourier si presta egregiamente a rappresentare estese classi di funzioni in tre variabili, ma allorquando la equazione che li definisce deve essere solo verificata in una porzione dello spazio, l'arbitrarietà, che di conseguenza ne nasce, finisce per diventare elemento di incertezza che ostacola i calcoli compromettendo il risultato finale. Solo in particolari casi, e più precisamente solo quando posti in (2) α_2, α_3 immaginari puri ne discende pure α_1 sempre immaginario puro, può essere convenientemente introdotto l'integrale triplo (vedi la mia già citata Nota) ma in questo caso anche il metodo qui usato si ridurrebbe automaticamente a quello derivante da tale introduzione.

Per la perfetta sostituibilità della (5) alla (1) rimando alla dimostrazione analoga, del tutto equivalente, nella già più volte citata Nota.

La (5) è una equazione alle derivate ordinarie, lineare a coefficienti costanti: la relativa equazione caratteristica è:

$$(6) \quad \sum_{r=0}^k \zeta^r \sum_{s,t} c_{rst} (-im)^s (-in)^t = 0.$$

La (5) avrà, salvo per un eventuale insieme eccezionale Γ di mn in cui il grado effettivo di (6) può abbassarsi, k integrali particolari indipendenti.

Ciò premesso consideriamo i dati di Cauchy per

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} [u(x_1, x_2, x_3)]_{x_1=0} = u_0(x_2, x_3) \\ \dots\dots\dots \\ \left[\frac{\partial^{k-1}}{\partial x_1^{k-1}} u(x_1, x_2, x_3) \right]_{x_1=0} = u_{k-1}(x_2, x_3) \end{array} \right.$$

e le relative antitrasformate:

$$(8) \quad \alpha_0(m, n), \dots, \alpha_{k-1}(m, n);$$

se la u deve soddisfare la (1) e assumere per $x_1 = 0$ i valori (7) la sua antitrasformata dovrà assumere, per $x_1 = 0$, i valori (8) oltre che soddisfare la (5) (per la rigorosa dimostrazione confronta la citata Nota).

La (6), per ogni punto del piano mn , ammette h radici (tra semplici e multiple) a parte reale minore o uguale a zero, essendo h un intero compreso tra 0 e k . Dato invece un intero h compreso tra 0 e k la (6) determina nel piano mn un insieme Σ_h in cui essa ha h radici a parte reale minore od eguale a zero; segue quindi che la (6) e di conseguenza la (1) subordina sul piano mn gli insiemi $\Sigma_0, \dots, \Sigma_h, \dots, \Sigma_k$ la cui totalità occupa l'intero piano: alcuni di tali insiemi possono eventualmente mancare.

Scelto ora un insieme Σ_h in esso non potranno darsi ad arbitrio tutte le funzioni (8) e pretendere che la u , così determinata, appartenga ad F ; infatti $\alpha(m, n, x_1)$ deve essere combinazione lineare dei k integrali partico-

lari indipendenti di (5), ma se io voglio che $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\alpha(m, n, x_1)| dm dn$

abbia per $x_1 \rightarrow +\infty$ un infinito di ordine inferiore ad un infinito intero,

tale condizione deve necessariamente valere per $\int \int_{\Sigma_h} |\alpha(m, n, x_1)| dm dn$ ma

questa ultima condizione mi impone di limitare in Σ_h l'espressione generale di $\alpha(m, n, x_1)$ alle combinazioni dei soli h integrali indipendenti di (5), collegati con le h radici che in Σ_h la (6) possiede a parte reale non positiva.

Potrò quindi in Σ_b solo assegnare ad arbitrio le prime b delle $\alpha_0, \dots, \alpha_k$ dovendo le rimanenti $k - b$ risultare senz'altro fissate dalla scelta fatta delle prime.

D'altra parte se in ogni Σ_b assegno le sole prime b delle $\alpha_0, \dots, \alpha_k$, e queste soddisfano a quelle condizioni, di carattere puramente qualitativo, che discendono per esse dalle (4), sono in grado di costruirmi effettivamente la soluzione cercata che si dimostra facilmente essere unica in F .

Posso dunque così concludere:

Data l'equazione (I) nella relativa classe funzionale F , per ciò che concerne il problema in grande di Cauchy relativo al piano $x_1 = 0$, sussiste: considerati gli insiemi Σ_b che la (I), attraverso la (6), subordina sul piano mn , e considerato l'indice h^ massimo associato ad un effettivo Σ_b (h^* essendo sempre minore o tutt'al più uguale a k) non posso assegnare ad arbitrio (a parte restrizioni qualitative) sul piano $x_1 = 0$ che i valori della u e delle sue successive $h^* - 1$ derivate normali. In più tali funzioni saranno tali che le loro antitrasformate non saranno arbitrarie che in Σ_{b^*} , mentre in ogni rimanente Σ_b le ultime $h^* = b$ saranno determinate dalle prime b .*

Per tale tipo di problema esiste, in F , la soluzione ed è unica.

Il metodo seguito si presta anche allo studio del problema di Cauchy, con integrale della (I) semplicemente regolare in una striscia; può essere poi esteso alle equazioni lineari a coefficienti funzioni della sola x_1 .

In una prossima Memoria al « Circolo Matematico di Palermo » riprendendo dettagliatamente i risultati già trovati mi occuperò di questi ulteriori sviluppi.

A illustrazione dei risultati qui esposti ecco alcune esemplificazioni di casi noti.

1° Equazione delle onde:

$$[-D_{x_1}^2 + D_{x_2}^2 + D_{x_3}^2] u = 0;$$

la (6) relativa diventa:

$$-\zeta^2 + (-im)^2 + (-in)^2 = 0$$

da cui:

$$\tilde{\zeta} = \begin{cases} +i\sqrt{m^2 + n^2} \\ -i\sqrt{m^2 + n^2}; \end{cases}$$

tutto il piano mn è occupato da Σ_2 : il problema di Cauchy è sempre ben posto.

2° Equazione di Laplace:

$$[D_{x_1}^2 + D_{x_2}^2 + D_{x_3}^2] u = 0;$$

la (6) relativa diventa:

$$\zeta^2 + (-im)^2 + (-in)^2 = 0$$

da cui:

$$\tilde{\chi} = \begin{cases} +\sqrt{m^2 + n^2} \\ -\sqrt{m^2 + n^2}; \end{cases}$$

il solo punto origine è Σ_2 , il rimanente è Σ_1 ; Σ_2 è quindi a misura superficiale nulla, e perciò trascurabile nell'espressione della soluzione in integrale doppio di Fourier: il problema di Cauchy (in tutto il semi spazio) non è mai ben posto: esso deve ridursi di un grado cioè diventare un problema di Dirichlet per il semi spazio ⁽¹⁾.

3° Equazione del calore:

$$[-D_{x_1} + D_{x_2}^2 + D_{x_3}^2] u = 0;$$

la (6) relativa diventa:

$$-\chi + (-im)^2 + (-in)^2 = 0$$

da cui:

$$\chi = -(m^2 + n^2);$$

tutto mn è Σ_1 ; è possibile dunque assegnare la funzione all'istante iniziale, come è noto.

4° Equazione del calore col tempo invertito:

$$[D_{x_1} + D_{x_2}^2 + D_{x_3}^2] u = 0;$$

la (6) relativa diventa:

$$\chi + (-im)^2 + (-in)^2 = 0$$

da cui:

$$\chi = m^2 + n^2;$$

tutto mn , eccetto l'origine che è Σ_1 , è Σ_0 ; Σ_1 è a misura nulla; non è possibile, come è noto, assegnare i valori della u nell'equazione del calore, e risalire indietro indefinitamente col tempo.

Mi riservo nella preannunciata Memoria di mostrare altri esempi, e di analizzare il significato della presenza di eventuali Σ a misura superficiale nulla.

(1) Nel caso che si rinunci a pretendere la regolarità della soluzione in tutto $x_1 > 0$, il metodo da me seguito riporta ai noti risultati per il problema di Cauchy connesso alla equazione di Laplace: se per esempio si pone $u(0, x_2, x_3) = 0$ si dimostra (come farò nella preannunciata Memoria) la necessità dell'analiticità della derivata normale.

Matematica (Calcolo numerico). — *Tabellazione di una particolare funzione definita da un integrale improprio*. Nota ⁽¹⁾ di G. N. WATSON, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In una Nota recente ⁽²⁾ ho studiato l'integrale improprio

$$\varphi(\lambda) = \int_0^{\infty} \left(x + \frac{1}{2} - \sqrt{x^2 + x} \right) \sin \lambda x dx,$$

e ho dimostrato come la funzione $\varphi(\lambda)$ possa essere rappresentata per mezzo delle funzioni di Bessel e delle funzioni circolari. Scopo della presente Nota è di comunicare una tabella di questa funzione che ho composta per l'applicazione della mia formola. Ho così ottenuto i valori di $\varphi(\lambda)$ con sette cifre decimali per valori di λ compresi fra zero e 32 coll'intervallo 0.01 per $0.00 \leq \lambda \leq 0.40$ e coll'intervallo 0.1 per $0.4 \leq \lambda \leq 32.0$.

Nella tabella che ho calcolata, ho inserito i valori delle seconde differenze *centrali* eccetto quelli impercettibili. Richiamo la definizione delle differenze centrali della successione $\dots, u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, \dots$, cioè

$$\begin{aligned} \delta^2 u_0 &= u_{-1} - 2u_0 + u_1, \\ \delta^4 u_0 &= u_{-2} - 4u_{-1} + 6u_0 - 4u_1 + u_2, \\ &\dots \end{aligned}$$

Ci occorrono queste differenze nelle applicazioni della formola d'interpolazione dell'Everett. Per utilità del lettore che non abbia a disposizione questa formola importantissima riporto qui la formola in questione, cioè

$$\begin{aligned} u_\alpha &= \beta u_0 - \varepsilon_2(\beta) \delta^2 u_0 + \varepsilon_4(\beta) \delta^4 u_0 - \dots \\ &+ \alpha u_1 - \varepsilon_2(\alpha) \delta^2 u_1 + \varepsilon_4(\alpha) \delta^4 u_1 - \dots, \end{aligned}$$

essendo $\beta = 1 - \alpha$ ed anche

$$\begin{aligned} \varepsilon_2(\alpha) &= \alpha(1^2 - \alpha^2)/3!, \\ \varepsilon_4(\alpha) &= \alpha(1^2 - \alpha^2)(2^2 - \alpha^2)/5!, \\ &\dots \end{aligned}$$

Nel calcolo dei valori numerici di $\varphi(\lambda)$ con sette cifre decimali mediante la prima porzione della mia tabella ($0.00 \leq \lambda \leq 0.40$) coll'aiuto della formola dell'Everett, è lecito trascurare le differenze $\delta^4, \delta^6, \dots$ per $\lambda > 0.06$ senza commettere degli errori apprezzabili. Del pari le medesime differenze $\delta^4, \delta^6, \dots$ sono trascurabili per $\lambda > 1.2$ nell'uso della seconda porzione della tabella ($0.4 \leq \lambda \leq 32.0$). Se il lettore dovesse calcolare dei valori di $\varphi(\lambda)$ per $\lambda < 0.04$, troverebbe lo sviluppo (7) della mia Nota precedente più comodo dell'applicazione della formola dell'Everett alla mia tabella.

(1) Pervenuta all'Accademia il 22 luglio 1937.

(2) Vedi questi « Rendiconti », XXVI, 1937, pp. 91-96.

TABELLA I.

λ	$\varphi(\lambda)$	δ^2	λ	$\varphi(\lambda)$	δ^2	λ	$\varphi(\lambda)$	δ^2
0.00	0.1963495	—	0.0	0.1963495	—	4.0	0.0587661	287
0.01	0.1928584	8604	0.1	0.1755710	81332	4.1	0.0578972	273
0.02	0.1902278	3211	0.2	0.1629256	27900	4.2	0.0570555	259
0.03	0.1879182	2066	0.3	0.1530702	16815	4.3	0.0562397	247
0.04	0.1858153	1522	0.4	0.1448964	11678	4.4	0.0554487	235
0.05	0.1838646	1202	0.5	0.1378904	8730	4.5	0.0546812	225
0.06	0.1820341	991	0.6	0.1317574	6835	4.6	0.0539362	215
0.07	0.1803027	841	0.7	0.1263079	5521	4.7	0.0532127	205
0.08	0.1786554	729	0.8	0.1214107	4571	4.8	0.0525096	196
0.09	0.1770811	642	0.9	0.1169707	3852	4.9	0.0518261	188
0.10	0.1755710	573	1.0	0.1129158	3294	5.0	0.0511615	180
0.11	0.1741182	517	1.1	0.1091903	2850	5.1	0.0505147	172
0.12	0.1727170	470	1.2	0.1057498	2491	5.2	0.0498853	165
0.13	0.1713629	430	1.3	0.1025584	2196	5.3	0.0492723	159
0.14	0.1700517	396	1.4	0.0995865	1950	5.4	0.0486752	152
0.15	0.1687802	367	1.5	0.0968096	1742	5.5	0.0480933	146
0.16	0.1675453	341	1.6	0.0942069	1656	5.6	0.0475260	141
0.17	0.1663445	319	1.7	0.0917609	1414	5.7	0.0469728	135
0.18	0.1651756	299	1.8	0.0894562	1283	5.8	0.0464331	130
0.19	0.1640366	281	1.9	0.0872799	1169	5.9	0.0459065	125
0.20	0.1629256	265	2.0	0.0852205	1069	6.0	0.0453923	121
0.21	0.1618411	250	2.1	0.0832680	981	6.1	0.0448903	116
0.22	0.1607816	237	2.2	0.0814137	903	6.2	0.0443999	112
0.23	0.1597458	225	2.3	0.0796496	833	6.3	0.0439208	108
0.24	0.1587326	214	2.4	0.0779689	771	6.4	0.0434524	105
0.25	0.1577407	204	2.5	0.0763653	716	6.5	0.0429946	101
0.26	0.1567693	195	2.6	0.0748333	665	6.6	0.0425468	98
0.27	0.1558174	186	2.7	0.0733678	620	6.7	0.0421088	94
0.28	0.1548841	178	2.8	0.0719643	579	6.8	0.0416802	91
0.29	0.1539686	171	2.9	0.0706187	542	6.9	0.0412608	88
0.30	0.1530702	164	3.0	0.0693273	508	7.0	0.0408502	85
0.31	0.1521883	158	3.1	0.0680867	476	7.1	0.0404481	83
0.32	0.1513221	152	3.2	0.0668937	448	7.2	0.0400543	80
0.33	0.1504712	146	3.3	0.0657454	422	7.3	0.0396685	78
0.34	0.1496348	141	3.4	0.0646394	398	7.4	0.0392905	75
0.35	0.1488125	136	3.5	0.0635731	375	7.5	0.0389200	73
0.36	0.1480039	131	3.6	0.0625444	355	7.6	0.0385568	71
0.37	0.1472084	127	3.7	0.0615512	336	7.7	0.0382007	69
0.38	0.1464256	123	3.8	0.0605915	318	7.8	0.0378514	67
0.39	0.1456550	119	3.9	0.0596537	302	7.9	0.0375088	65
0.40	0.1448964	115	4.0	0.0587661	287	8.0	0.0371726	63

TABELLA II.

λ	$\varphi(\lambda)$	δ^2	λ	$\varphi(\lambda)$	δ^2	λ	$\varphi(\lambda)$	δ^2
8.0	0.0371726	63	12.0	0.0274796	24	16.0	0.0218980	12
8.1	0.0368428	61	12.1	0.0273039	23	16.1	0.0217883	11
8.2	0.0365190	59	12.2	0.0271306	23	16.2	0.0216797	11
8.3	0.0362012	58	12.3	0.0269596	22	16.3	0.0215723	11
8.4	0.0358891	56	12.4	0.0267908	22	16.4	0.0214660	11
8.5	0.0355827	55	12.5	0.0266242	21	16.5	0.0213607	11
8.6	0.0352817	53	12.6	0.0264598	21	16.6	0.0212565	10
8.7	0.0349860	52	12.7	0.0262974	21	16.7	0.0211534	10
8.8	0.0346954	50	12.8	0.0261371	20	16.8	0.0210513	10
8.9	0.0344099	49	12.9	0.0259788	20	16.9	0.0209502	10
9.0	0.0341292	48	13.0	0.0258225	19	17.0	0.0208501	10
9.1	0.0338534	46	13.1	0.0256682	19	17.1	0.0207510	10
9.2	0.0335821	45	13.2	0.0255158	19	17.2	0.0206529	10
9.3	0.0333154	44	13.3	0.0253652	18	17.3	0.0205557	9
9.4	0.0330531	43	13.4	0.0252165	18	17.4	0.0204594	9
9.5	0.0327951	42	13.5	0.0250696	18	17.5	0.0203641	9
9.6	0.0325413	41	13.6	0.0249244	17	17.6	0.0202697	9
9.7	0.0322915	40	13.7	0.0247810	17	17.7	0.0201763	9
9.8	0.0320458	39	13.8	0.0246393	17	17.8	0.0200836	9
9.9	0.0318039	38	13.9	0.0244993	16	17.9	0.0199919	9
10.0	0.0315658	37	14.0	0.0243609	16	18.0	0.0199011	9
10.1	0.0313314	36	14.1	0.0242241	16	18.1	0.0198111	8
10.2	0.0311007	35	14.2	0.0240889	16	18.2	0.0197219	8
10.3	0.0308734	34	14.3	0.0239553	15	18.3	0.0196335	8
10.4	0.0306496	34	14.4	0.0238232	15	18.4	0.0195460	8
10.5	0.0304292	33	14.5	0.0236926	15	18.5	0.0194593	8
10.6	0.0302121	32	14.6	0.0235635	15	18.6	0.0193733	8
10.7	0.0299982	31	14.7	0.0234358	14	18.7	0.0192882	8
10.8	0.0297874	31	14.8	0.0233096	14	18.8	0.0192038	8
10.9	0.0295797	30	14.9	0.0231848	14	18.9	0.0191202	7
11.0	0.0293750	29	15.0	0.0230613	14	19.0	0.0190373	7
11.1	0.0291732	29	15.1	0.0229393	13	19.1	0.0189552	7
11.2	0.0289743	28	15.2	0.0228185	13	19.2	0.0188738	7
11.3	0.0287783	28	15.3	0.0226991	13	19.3	0.0187931	7
11.4	0.0285849	27	15.4	0.0225809	13	19.4	0.0187131	7
11.5	0.0283943	26	15.5	0.0224640	12	19.5	0.0186339	7
11.6	0.0282063	26	15.6	0.0223484	12	19.6	0.0185553	7
11.7	0.0280209	25	15.7	0.0222340	12	19.7	0.0184774	7
11.8	0.0278380	25	15.8	0.0221208	12	19.8	0.0184001	7
11.9	0.0276576	24	15.9	0.0220088	12	19.9	0.0183236	7
12.0	0.0274796	24	16.0	0.0218980	12	20.0	0.0182477	6

TABELLA III.

λ	$\varphi(\lambda)$	λ	$\varphi(\lambda)$	λ	$\varphi(\lambda)$
20.0	0.0182477	24.0	0.0156655	28.0	0.0137382
20.1	0.0181724	24.1	0.0156105	28.1	0.0136963
20.2	0.0180978	24.2	0.0155559	28.2	0.0136546
20.3	0.0180238	24.3	0.0155018	28.3	0.0136131
20.4	0.0179504	24.4	0.0154480	28.4	0.0135719
20.5	0.0178777	24.5	0.0153946	28.5	0.0135310
20.6	0.0178055	24.6	0.0153415	28.6	0.0134903
20.7	0.0177340	24.7	0.0152889	28.7	0.0134499
20.8	0.0176630	24.8	0.0152366	28.8	0.0134097
20.9	0.0175927	24.9	0.0151847	28.9	0.0133698
21.0	0.0175229	25.0	0.0151332	29.0	0.0133301
21.1	0.0174537	25.1	0.0150820	29.1	0.0132907
21.2	0.0173850	25.2	0.0150311	29.2	0.0132515
21.3	0.0173169	25.3	0.0149806	29.3	0.0132125
21.4	0.0172493	25.4	0.0149305	29.4	0.0131738
21.5	0.0171823	25.5	0.0148807	29.5	0.0131353
21.6	0.0171158	25.6	0.0148313	29.6	0.0130970
21.7	0.0170499	25.7	0.0147822	29.7	0.0130590
21.8	0.0169844	25.8	0.0147334	29.8	0.0130212
21.9	0.0169195	25.9	0.0146849	29.9	0.0129836
22.0	0.0168551	26.0	0.0146368	30.0	0.0129462
22.1	0.0167912	26.1	0.0145890	30.1	0.0129091
22.2	0.0167278	26.2	0.0145415	30.2	0.0128721
22.3	0.0166649	26.3	0.0144944	30.3	0.0128354
22.4	0.0166025	26.4	0.0144475	30.4	0.0127989
22.5	0.0165405	26.5	0.0144010	30.5	0.0127626
22.6	0.0164791	26.6	0.0143548	30.6	0.0127266
22.7	0.0164181	26.7	0.0143089	30.7	0.0126907
22.8	0.0163575	26.8	0.0142632	30.8	0.0126550
22.9	0.0162975	26.9	0.0142179	30.9	0.0126196
23.0	0.0162378	27.0	0.0141729	31.0	0.0125843
23.1	0.0161787	27.1	0.0141281	31.1	0.0125493
23.2	0.0161199	27.2	0.0140837	31.2	0.0125144
23.3	0.0160616	27.3	0.0140395	31.3	0.0124798
23.4	0.0160038	27.4	0.0139957	31.4	0.0124453
23.5	0.0159464	27.5	0.0139521	31.5	0.0124111
23.6	0.0158893	27.6	0.0139088	31.6	0.0123770
23.7	0.0158328	27.7	0.0138657	31.7	0.0123431
23.8	0.0157766	27.8	0.0138230	31.8	0.0123095
23.9	0.0157208	27.9	0.0137805	31.9	0.0122760
24.0	0.0156655	28.0	0.0137382	32.0	0.0122426

Matematica. — *Sulle soluzioni di un sistema di equazioni con derivate parziali.* Nota di T. BOGGIO, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Ho già avuto occasione di occuparmi più volte (a cominciare dalla mia dissertazione di laurea) delle soluzioni comuni a due o più equazioni differenziali lineari, con derivate parziali⁽²⁾. Qui ritornerò sull'argomento per aggiungere alcune altre considerazioni.

1. Si abbiano le espressioni differenziali lineari, coi coefficienti a_{rs} , b_{rs} costanti:

$$(I) \quad \begin{cases} A_1 = \sum_{r,s}^m a_{rs} \frac{\partial^{r+s}}{\partial x^r \partial y^s}, & (r+s \leq m), \\ A_2 = \sum_{r,s}^n b_{rs} \frac{\partial^{r+s}}{\partial x^r \partial y^s}, & (r+s \leq n), \end{cases}$$

e consideriamo poi i *polinomi caratteristici* corrispondenti:

$$(2) \quad P_1(x, y) = \sum_{r,s}^m a_{rs} x^r y^s, \quad P_2(x, y) = \sum_{r,s}^n b_{rs} x^r y^s,$$

che danno luogo alle *equazioni caratteristiche* (cfr. il n. 7 della citata Memoria degli « Annali di Matematica »)

$$(3) \quad P_1(x, y) = 0, \quad P_2(x, y) = 0;$$

questi polinomi li supponiamo *primi fra loro* (cioè non deve esistere alcun polinomio che li divida entrambi), nel qual caso diremo che le espressioni A_1, A_2 sono prime fra loro.

Se ora consideriamo le due equazioni differenziali

$$(4) \quad A_1 f = u, \quad A_2 f = v,$$

(1) Nella seduta del 3 giugno 1938.

(2) T. BOGGIO, *Sulle soluzioni comuni a due equazioni lineari ecc.* « Rendiconti R. Accademia Lincei », ser. 5^a, vol. XI, 1^o sem. 1902; *Sull'integrazione di alcune equazioni lineari alle derivate parziali.* « Annali di Matematica », ser. III, to. VIII, 1902-1903; *Sulle soluzioni comuni a due equazioni lineari a derivate parziali.* « Atti R. Istituto Veneto », to. LXVIII, 1908-1909; *Sopra alcuni sistemi di equazioni differenziali* « Rendiconti R. Accademia Lincei », ser. 6^a, vol. XXII, 2^o sem. 1935; *Sulle soluzioni comuni a tre equazioni lineari ecc.* « Atti R. Accademia Scienze di Torino », vol. 73, 1937-1938.

ho dimostrato (nei primi tre lavori citati) che *condizione necessaria e sufficiente affinchè esista qualche funzione che verifichi le (4) è che sia soddisfatta la condizione:*

$$(5) \quad A_1 v = A_2 u.$$

Se poi le espressioni A_1, A_2 avessero in comune un'espressione differenziale B , in guisa che $A_1 = BA'$, $A_2 = BA''$, la condizione analoga sarebbe $A'v = A''u$ (cfr. i primi due lavori citati).

Le dimostrazioni che ho dato di questo teorema (una di esse vale anche per il caso di coefficienti variabili) danno anche modo di costruire la funzione cercata f ; in particolare, nella Nota dell'Istituto Veneto, è mostrato che la determinazione di f dipende dalla integrazione di equazioni lineari, con derivate ordinarie, e coi coefficienti costanti, la qual cosa si sa fare molto semplicemente. Le formule stabilite valgono anche per un numero qualunque di variabili.

2. Vogliamo ora accennare ad un altro procedimento per ottenere una funzione che soddisfa alle (4).

Per questo osserviamo che, per un noto teorema⁽¹⁾, se si indica con $R(x)$ il polinomio risultante dalla eliminazione di y fra le (3) — che è, notoriamente, al più di grado mn in x — esistono sempre dei polinomi $P_1(x, y)$, $P_2(x, y)$ per i quali si ha identicamente:

$$(6) \quad P_1'(x, y) P_1(x, y) + P_2'(x, y) P_2(x, y) = R(x);$$

questi polinomi P_1', P_2' si possono determinare, ad es., coll'algoritmo algebrico che serve alla ricerca del massimo comun divisore fra i polinomi $P_1(x, y)$, $P_2(x, y)$ considerati come funzioni di y , oppure col metodo dei coefficienti indeterminati.

Dopo ciò, considerando le espressioni differenziali corrispondenti, si ha:

$$(7) \quad P_1' \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) A_1 + P_2' \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) A_2 = R \left(\frac{\partial}{\partial x} \right),$$

e applicando alla funzione f che soddisfa alle (4), si conclude che la funzione f deve anche soddisfare all'equazione:

$$(8) \quad R \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) f = P_1' \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) u + P_2' \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) v,$$

e poichè il 2° membro è noto, abbiamo qui un'equazione differenziale lineare, con derivate ordinarie, con coefficienti costanti, di ordine, al più, mn per la funzione incognita f .

(1) Cfr., ad es., A. CAPELLI, *Istituzioni di Analisi algebrica*. 4ª ediz., n. 1456 (Pellegrano, Napoli, 1909).

Questa equazione si sa notoriamente integrare per via assai semplice, e il suo integrale generale contiene tante funzioni arbitrarie di y quanto è il suo ordine. Esse poi vanno determinate in modo che risultino soddisfatte le (4).

Il procedimento ora indicato vale pure per 2 equazioni con un numero qualunque n di variabili; in tal caso la (8) risulta un'equazione alle derivate parziali con $n - 1$ variabili.

Conviene però osservare che in molti casi particolari questo metodo di determinazione della f risulta meno semplice di quello indicato nella Memoria degli « Annali di Matematica ».

Un'identità analoga alla (6) sussiste naturalmente nel caso in cui si abbiano r polinomi

$$P_1(x_1, x_2, \dots, x_r), \quad P_2(x_1, x_2, \dots, x_r), \dots, P_r(x_1, x_2, \dots, x_r)$$

primi fra loro a due a due; se $R(x_1)$ è il polinomio risultante dalla eliminazione di x_2, x_3, \dots, x_r fra le r equazioni $P_h = 0$ ($h = 1, 2, \dots, r$), allora esistono dei polinomi P'_1, P'_2, \dots, P'_r nelle variabili x_1, x_2, \dots, x_r per i quali si ha identicamente:

$$(6') \quad P'_1 P_1 + P'_2 P_2 + \dots + P'_r P_r = R(x_1),$$

e allora ne segue che la funzione f che soddisfa alle r equazioni differenziali lineari, con coefficienti costanti:

$$(4') \quad P_h \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_r} \right) f = u_h, \quad (h = 1, 2, \dots, r),$$

ove le u_h sono funzioni note, che devono soddisfare alle condizioni di compatibilità $P_h u_k = P_k u_h$, ove h, k assumono tutti i valori da 1 ad r , dovrà soddisfare altresì alla equazione

$$R \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right) f = \sum_1^r P'_h \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_r} \right) u_h,$$

la quale è un'equazione lineare, con derivate ordinarie, nella variabile x_1 , e con coefficienti costanti, che può essere utilizzata per la determinazione della funzione cercata f .

Più in generale, se nei polinomi P_h considerati figurano $r + s$ variabili, si ha un'identità analoga alla (6'), ove nel 2° membro figura un polinomio contenente solo $s + 1$ delle variabili, e quindi la f che soddisfa al sistema analogo al (4'), deve allora anche soddisfare ad un'equazione alle derivate parziali rispetto a queste $s + 1$ variabili.

Questa proprietà si trova enunciata in un recentissimo lavoro del prof. B. Segre ⁽¹⁾.

(1) B. SEGRE, *Sui sistemi di equazioni a derivate parziali d'ordine qualunque ecc.* « Rendiconti R. Accademia Lincei », ser. 6a, vol. XXVII, 1° sem. 1938.

3. Si abbiano ora r equazioni

$$(9) \quad P_1(x_1, x_2, \dots, x_{r-1}) = 0, \dots, P_r(x_1, x_2, \dots, x_{r-1}) = 0,$$

con sole $r - 1$ variabili, e supponiamo che esse *non abbiano soluzioni comuni*; in questo caso sussiste un'identità analoga alla (6'), ma nella quale il secondo membro è l'unità, cioè:

$$(10) \quad P'_1 P_1 + P'_2 P_2 + \dots + P'_r P_r = 1.$$

Quest'identità è ottenuta dal prof. B. Segre, nella Nota citata, ricorrendo ad una formula di Perrin, assai poco nota, benchè data 50 anni fa; essa però può ottenersi in tutt'altro modo, più semplicemente, così: intanto i polinomi (9) non posson avere tutti i termini noti nulli, altrimenti le (9) avrebbero la soluzione comune $x_1 = x_2 = \dots = x_{r-1} = 0$, contro l'ipotesi; e allora moltiplicando questi termini noti per un parametro arbitrario t avremo r polinomi $P_1^*, P_2^*, \dots, P_r^*$ colle r variabili $x_1, x_2, \dots, x_{r-1}, t$, e da una formula analoga alla (6') avremo l'identità:

$$(11) \quad P_1^* P_1 + P_2^* P_2 + \dots + P_r^* P_r = R(t),$$

ove i P_b^* sono polinomi nelle variabili $x_1, x_2, \dots, x_{r-1}, t$, ed $R(t)$ è il polinomio risultante dalla eliminazione di x_1, x_2, \dots, x_{r-1} fra le equazioni $P_b^* = 0$.

Ora è chiaro che $R(t)$ è diverso da 0 per $t = 1$, e allora ponendo $t = 1$ nella (11) e dividendo per $R(1)$ si ha la (10).

Se ora consideriamo il sistema di equazioni differenziali lineari, con coefficienti costanti, corrispondenti alle (9), cioè:

$$(12) \quad P_b \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{r-1}} \right) f = u_b, \quad (b = 1, 2, \dots, r),$$

ove le u_b sono funzioni note che devono verificare le condizioni di compatibilità $P_b u_k = P_k u_b$, si conclude subito dall'identità (10) (ove si sostituiscono le x_b con $\partial/\partial x_b$, e venga applicata alla f) come ha osservato il prof. B. Segre, che la funzione

$$(13) \quad f = \sum_1^r P'_b \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{r-1}} \right) u_b$$

soddisfa alle (12), il che, del resto, si verifica immediatamente.

Di polinomi P'_b che verificano la (10) ve ne sono infiniti⁽¹⁾; però la funzione f che soddisfa alle (12) è unica.

(1) Il prof. B. Segre nel n. 1 del suo lavoro citato dice invece che di tali polinomi ne esistono r (mentre, come mostreremo fra poco, ne esistono infiniti); da ciò egli deduce l'unicità della funzione f , il che non è esatto.

Infatti, se esistesse un'altra funzione f' che verificasse le (12), la funzione $F = f - f'$ dovrebbe soddisfare al sistema omogeneo:

$$P_b \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{r-1}} \right) F = 0,$$

e allora dall'identità (10) applicata alla funzione F si dedurrebbe senz'altro $F = 0$.

5. Dei sistemi (12), per $r = 3$, mi sono occupato nel mio ultimo lavoro citato, (che è pure menzionato dal prof. Segre), ove ho stabilito l'esistenza di soluzioni comuni sotto condizioni più restrittive di quella posta dal Segre circa la non esistenza di soluzioni comuni alle equazioni (9) (perchè se esistessero di tali soluzioni l'identità (10) non sussisterebbe più).

Ma il mio ex-allievo nel citare il mio lavoro lo fa in modo piuttosto oscuro ed incompleto, in guisa che si rende indispensabile qualche mio chiarimento al riguardo. Intanto le formule da me stabilite sussistono inalterate anche per un numero qualunque di variabili; questo fatto è rilevato dal prof. B. Segre mediante un inciso, chiuso fra parentesi, in guisa che chi legge l'articolo del Segre, senza avere sott'occhio il mio, ha l'impressione che l'osservazione sia del Segre, mentre invece la cosa è esplicitamente dimostrata nel n. 7 del mio lavoro.

In secondo luogo il prof. B. Segre dice che il risultato a cui pervengo « afferma solo che esiste qualche soluzione per il sistema (12), con $r = 3$ »; ora ciò non è tutto, perchè il mio risultato dà anche il modo per ottenere la soluzione del sistema ora considerato.

Infine il prof. B. Segre pone a raffronto il suo procedimento col mio, a proposito di un sistema particolare esaminato da me, la cui integrazione, dice il Segre, « è compiuta in tre pagine dell'ultimo lavoro citato (nn. 8, 9) ».

Qui occorre osservare che l'integrazione è fatta direttamente (sviluppando tutti i calcoli) senza far capo a particolari proprietà, che naturalmente avrebbero di molto ridotti gli sviluppi.

Il sistema particolare, considerato da me, è questo:

$$(14) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2f = w,$$

e l'identità corrispondente alla (10) è pertanto:

$$(15) \quad P'_1(xy - y^2) + P'_2(x^2 + y^2 + x) + P'_3(x^2 + 2) = 1;$$

a questa si soddisfa, dice il Segre, assumendo:

$$\begin{cases} P'_1 = (x^2 - xy - x + 2y - 2)/18, \\ P'_2 = (2x^2 - xy + 3x + 2y - 2)/18, \\ P'_3 = (2x^2 + x + 9)/18, \end{cases}$$

e sta bene; ma come ha trovato il Segre questi polinomi? Se egli avesse esposto tutti i calcoli occorrenti per determinarli (come ho fatto io per la mia integrazione) avrebbe forse impiegato un paio di pagine!

Dopo ciò il mio ex-allievo aggiunge: « dunque il sistema (14) ... ammette una ed una sola soluzione f data — a norma della (13) — da ... ».

Ora, da dove risulta tale unicità, dato che di polinomi P'_1, P'_2, P'_3 che soddisfano alla (15) ve ne sono infiniti? Ad es., due altre terne di questi polinomi sono:

$$\begin{cases} P'_1 = (-xy - x + 2y - 4)/18, \\ P'_2 = (-xy - 3x + 2y - 6)/18, \\ P'_3 = (xy + y^2 + 3x + 9)/18, \end{cases} \quad \begin{cases} P'_1 = (-xy - y^2 - 2x + 2y - 2)/18, \\ P'_2 = (-y^2 - 3x + 2y - 6)/18, \\ P'_3 = (2y^2 + 3x + 9)/18. \end{cases}$$

Ma non basta. Appresso il prof. B. Segre dice che « per l'integrabilità delle (14) deve essere

$$w = c_1 + c_2 y + c_3 e^{-x} + c_4 e^{-(x+y)/2}$$

colle c costanti ».

Anche qui, dove sono i calcoli coi quali il Segre ha ricavato questo risultato?

Nel mio lavoro, io ho trovato questa formula in base alla circostanza che la funzione w deve soddisfare alle condizioni di compatibilità del sistema (14), che sono:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

la cui integrazione diretta è completamente fatta nel mio lavoro, e occupa quasi per intero le famose tre pagine di cui sopra. Una volta ottenuta la w , ne segue subito la f perchè dovendo la f soddisfare alle prime due delle (14), che non differiscono dalle due equazioni precedenti, è chiaro che la f deve avere un'espressione analoga alla w , e perciò si deve avere:

$$f = \alpha_1 + \alpha_2 y + \alpha_3 e^{-x} + \alpha_4 e^{-(x+y)/2},$$

ove le α sono costanti da determinare; sostituendo nella terza delle (14) si ottengono subito le α , e risulta senz'altro che la soluzione è unica.

Concludendo, la maggior brevità dei calcoli del prof. B. Segre in confronto ai miei, per l'integrazione del sistema (14), è puramente redazionale, non effettiva.

Il suo procedimento richiede, come il mio, la determinazione della w che soddisfa al sistema precedente, e in più richiede la determinazione dei polinomi P'_1, P'_2, P'_3 !

Matematica. — *Un più generale teorema d'esistenza dei piani multipli.* Nota di O. CHISINI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio F. ENRIQUES.

1. — In due Note dal titolo: *Un teorema d'esistenza dei piani multipli*, presentate a questa Accademia nella seduta del 6 maggio 1934 (cfr. i « Rendiconti » del maggio e del giugno), ho mostrato come si possa costruire una curva algebrica piana $\varphi(xy) = 0$, che sia di diramazione per un piano n -plo; inoltre ho accennato alla ipotesi che il procedimento potesse dare tutti i piani multipli. Ma, quantunque il procedimento sia effettivamente di portata molto ampia ⁽²⁾, così da giustificare, in un certo modo, la suddetta presunzione, questa però non si avvera.

Pertanto è scopo di questa Nota l'indicare un modo più generale per costruire una curva $\varphi(xy) = 0$ che sia di diramazione per un piano n -plo, mostrando anche, con un esempio, come così si ottengano piani n -pli non ottenibili col procedimento, più ristretto, precedente.

2. — Prima di procedere all'estensione che abbiamo in vista, ricordiamo, brevemente, come si costruisca, secondo le mie ricerche precedenti, una curva φ che sia di diramazione per un piano n -plo.

Si assumano, successivamente, nel piano (x, y) le $n - 1$ curve C_1, C_2, \dots, C_{n-1} . Indichiamo genericamente con P un punto comune a due C successive, e con Q un punto comune a due C non successive. Ciascuna curva C sia contata due volte, cioè sia assunta come curva doppia, ma ciò sia fatto con l'avvertenza che essa abbia come punti di diramazione i punti in cui taglia la precedente e la seguente (ed inoltre altri eventuali punti di diramazione che non ci interessano). Indichiamo con $\bar{\varphi}$ la curva composta dalle C doppie (coi suddetti punti di diramazione). Si dia ora alla $\bar{\varphi}$ una variazione infinitesima, scelta in modo da conservare l'equivalenza (come numero di intersezioni con le polari) delle singolarità P e Q . Precisamente:

Ogni punto Q , intersezione di due C non consecutive, dia luogo a quattro punti doppi, con tangenti prossime a quelle delle C che si tagliano in Q .

Ogni punto P , intersezione di due C consecutive, dia luogo a tre cuspidi e a un punto di contatto con una tangente parallela all'asse y .

Data alla φ una tale variazione infinitesima, si ottiene una curva φ che, al pari di ogni sua trasformata con una deformazione continua che ne man-

(1) Nella seduta del 3 giugno 1938.

(2) Cfr. la mia Nota: *Sulla curva di diramazione dei piani n -pli* presentata a questa Accademia nella seduta del 5 gennaio 1936.

tenga nodi e cuspidi, è di diramazione per un piano n -plo; il quale così si costruisce.

Supposto l'asse y in posizione generica, si considerino i punti in cui esso taglia la curva φ : tali punti risultano a coppie prossimi alle intersezioni dello stesso asse con le singole curve C . Si costruisce allora la funzione algebrica $\chi = \chi(y)$, ad n rami, che abbia come punti di diramazione i valori y che competono alle suddette intersezioni, e precisamente si associerà ad un punto che sia prossimo alla curva C_i lo scambio $(i, i + 1)$, sicchè, essendo $n - 1$ le curve C_i , la χ risulta funzione ad n rami. Questa funzione χ può considerarsi corrispondere al parametro $x = 0$; facendo poi variare per continuità la x , e corrispondentemente i punti di diramazione y e la funzione $\chi(y)$, questa risulta definire una superficie $\chi = \chi(x, y)$, cioè un piano n -plo, che ha come curva di diramazione la φ considerata.

3. — Ora la costruzione di una curva di diramazione per un piano n -plo può generalizzarsi come segue:

Si prendano nel piano (x, y) alcune curve algebriche C_{ik} (cui attribuiamo un doppio indice i, k), con la condizione che gli indici semplici, i e k , comprendano, nel loro insieme, tutti i valori $1, 2, \dots, n$, e che gli scambi (i, k) generino un gruppo di sostituzioni che sia transitivo.

Si indichi con P un punto comune a due curve C che abbiano un indice a comune (ad esempio le curve C_{12} e C_{13}), e con Q un punto comune a due curve C che non abbiano alcun indice a comune (ad esempio le curve C_{12} e C_{34}).

Indicata, come innanzi, con $\bar{\varphi}$ la curva composta delle C doppie, si darà alla $\bar{\varphi}$ una variazione infinitesima trasformando ogni punto P in tre cuspidi (il che implica, naturalmente, che P sia di diramazione per le C che vi passano) e ogni punto Q in quattro punti doppi. Si ottiene così una curva φ che, al pari di ogni sua trasformata con una deformazione continua che ne mantenga nodi e cuspidi, è di diramazione per un piano n -plo, il quale si costruisce come nel caso, più ristretto, precedente, collegando ad ogni curva C_{ik} lo scambio (i, k) sui valori della funzione χ .

La dimostrazione che effettivamente una tale curva φ è di diramazione per un piano n -plo, si ottiene ripetendo i ragionamenti svolti, per il teorema più ristretto, nella seconda delle Note, dal medesimo titolo, ricordate innanzi.

4. Come caso particolare prendiamo la φ costituita da tre rette:

$$C_{12} \quad C_{23} \quad C_{31}.$$

Avendosi tre punti P , otteniamo, come curva φ , una sestica dotata di 9 cuspidi, che è di diramazione per un piano triplo.

Qui notiamo che la effettiva esistenza della sestica φ , proveniente dalla sua forma limite $\bar{\varphi}$, risulta immediatamente ove si trasformi per dualità, essendo la φ curva duale di una generica cubica piana: facendo variare questa entro un fascio sizigetico, si può avere quale cubica degenera una cubica che come luogo si riduce ad un triangolo e come involuppo a tre fasci ciascuno contato due volte; aggiungasi che i lati del triangolo appaiono ciascuno limite di tre tangenti inflessionali.

Ora è ovvio che una sestica con 9 cuspidi non può ottenersi, per variazione continua, partendo da una φ composta di due sole parti doppie (conica e retta), come appunto vorrebbe il primitivo metodo di costruzione. Infatti si avrebbero allora due punti P, da cui si deducono 6 cuspidi soltanto.

Resta così dimostrato che il nuovo teorema d'esistenza ha portata maggiore del precedente. Se poi con questo mezzo più ampio si possano effettivamente costruire tutti i piani multipli, è questione che sto ancora ricercando.

Matematica. — *Richiami geometrici sul metodo di integrazione di Hadamard-Théodoresco.* Nota I di GR. C. MOISIL, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. E. BOMPIANI.

Nel suo metodo d'integrazione delle equazioni alle derivate parziali lineari e del second'ordine, Hadamard ha introdotto ⁽²⁾ una geometria riemanniana collegata all'equazione in un modo invariante per i cambiamenti delle variabili.

Il Théodoresco ⁽³⁾ è riuscito ad estendere questo metodo alle equazioni lineari di ordine qualunque, adoperando la geometria finsleriana. In seguito a questi lavori il metodo di Green-Volterra stà per diventare uno dei mezzi più potenti per lo studio delle equazioni lineari alle derivate parziali.

Noi ci proponiamo di fare alcune osservazioni di carattere geometrico su questi lavori. Incominciamo dal caso semplice delle equazioni di secondo ordine:

$$(I) \quad a^{hk} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^h \partial x^k} + b^i \frac{\partial \psi}{\partial x^i} c\psi = 0 \quad (4).$$

(1) Nella seduta del 3 giugno 1938.

(2) J. HADAMARD, *Le problème de Cauchy*. Paris, Hermann.

(3) N. THÉODORESCO, *Recherches sur les équations aux dérivées partielles, linéaires, d'ordre quelconque*. « Annales Scientifique de l'Université de Jassy », XXIV (1938), 263.

(4) Si sottintendono come d'uso le sommazioni rispetto agli indici ripetuti in alto e in basso.

La geometria dell'equazione (1) è l'insieme delle proprietà invarianti per:
1) i cambiamenti di variabili

$$(2) \quad \bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, \dots, x^n)$$

dove

$$\frac{\partial(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)}{\partial(x^1, \dots, x^n)} \neq 0;$$

2) La moltiplicazione dell'equazione per un fattore di proporzionalità.
Per il cambiamento di variabili (2), ψ essendo un invariante, l'equazione diventa

$$\bar{a}^{hk} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{x}^h \partial \bar{x}^k} + \bar{b}^i \frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}^i} \bar{c} \psi = 0,$$

dove

$$(3) \quad \begin{cases} \bar{a}^{hk} = a^{ij} \frac{\partial \bar{x}^h}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^j} \\ \bar{b}^h = b^i \frac{\partial \bar{x}^h}{\partial x^i} + a^{ij} \frac{\partial^2 \bar{x}^h}{\partial x^i \partial x^j} \\ \bar{c} = c; \end{cases}$$

dunque c è un invariante mentre a^{hk} sono le componenti controvarianti di un tensore simmetrico del second'ordine. Se a_{hk} sono le componenti covarianti di questo tensore, cioè se

$$a_{hl} a^{lk} = \delta_h^k,$$

il

$$(4) \quad ds^2 = a_{hk} dx^h dx^k$$

è collegato all'equazione (1). Si arriva così al metodo di Hadamard: *ad ogni equazione si collega una geometria di Riemann.*

Consideriamo i simboli di Christoffel di seconda specie $\left\{ \begin{smallmatrix} h & k \\ l \end{smallmatrix} \right\}$.

Quando si cambiano le variabili essi diventano

$$\left\{ \begin{smallmatrix} \bar{h} & \bar{k} \\ \bar{l} \end{smallmatrix} \right\} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^{\bar{l}}} = \left\{ \begin{smallmatrix} i & j \\ r \end{smallmatrix} \right\} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^{\bar{h}}} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^{\bar{k}}} + \frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^{\bar{h}} \partial \bar{x}^{\bar{k}}}$$

di modo che

$$(5) \quad \bar{l}^i = b^i + a^{hk} \left\{ \begin{smallmatrix} h & k \\ i \end{smallmatrix} \right\}$$

sono le componenti controvarianti di un vettore. Introducendo le derivate covarianti nello spazio di Riemann:

$$(6) \quad \nabla_j^R u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x^j} - \left\{ \begin{smallmatrix} i & j \\ l \end{smallmatrix} \right\} u_l$$

l'equazione (1) si può scrivere sotto la forma

$$a^{hk} \nabla_h^R \nabla_k^R \psi + l^i \nabla_i^R \psi + c\psi = 0$$

o, col parametro di Beltrami

$$\nabla^R \psi = a^{hk} \nabla_h^R \nabla_k^R \psi,$$

nella forma invariante di De Donder

$$(7) \quad \Delta^R \psi + l^i \nabla_i^R \psi + c\psi = 0.$$

Se moltiplichiamo l'equazione (1) per il fattore di proporzionalità σ^{-1} l'equazione non cambia mentre il ds^2 subisce una rappresentazione conforme

$$(8) \quad ds^{*2} = \sigma ds^2.$$

Per questa trasformazione si ha

$$\left\{ \begin{matrix} i & j \\ l \end{matrix} \right\}^* = \left\{ \begin{matrix} i & j \\ l \end{matrix} \right\} + \frac{1}{2} \left(\delta_i^l \frac{\partial \log \sigma}{\partial x^j} + \delta_j^l \frac{\partial \log \sigma}{\partial x^i} - g^{lr} g_{ij} \frac{\partial \log \sigma}{\partial x^r} \right).$$

Se s_i è un vettore che per una trasformazione conforme si muta in s_i^*

$$(9) \quad s_i^* = s_i - \frac{\partial \log \sigma}{\partial x^i}$$

si può costruire una connessione di Weyl per la quale la derivata covariante di un vettore covariante è

$$(10) \quad \nabla_i^W u_j = \frac{\partial u_j}{\partial x^i} - \left\{ \begin{matrix} i & j \\ l \end{matrix} \right\} u_l - \frac{1}{2} \left(\delta_i^l s_j + \delta_j^l s_i - g^{lr} g_{ij} s_r \right) u_l.$$

Per la trasformazione conforme si ha

$$l_h^* = l_h - \frac{n-2}{2} \frac{\partial \log \sigma}{\partial x^h}$$

e, ponendo

$$(11) \quad t_i = l_i - \frac{n-2}{2} \cdot s_i$$

t è un vettore covariante che non cambia per la trasformazione conforme

$$t_i^* = t_i.$$

L'equazione (7) si può scrivere

$$(12) \quad \Delta^W \psi + t^i \nabla_i^W \psi + c\psi = 0$$

dove

$$\Delta^W \psi = a^{hk} \nabla_b^W \nabla_k^W \psi.$$

Il vettore s_i essendo finora arbitrario, si può scegliere in modo che sia

$$t_i = 0$$

e si dimostra così che *ad ogni equazione alle derivate parziali del secondo ordine si può collegare in modo unico uno spazio di Weyl nel quale l'equazione ha la forma canonica*

$$(13) \quad \Delta^W \psi + c\psi = 0.$$

Per lo studio delle equazioni di second'ordine basta considerare le equazioni semplificate

$$\Delta^W \varphi = 0$$

alle quale si riduce l'equazione (13) ponendovi

$$\psi = \theta \varphi$$

dove θ è un'integrale qualsiasi dell'equazione (1).

Matematica. — *Semplificazioni ed estensioni del metodo di Picone per l'integrazione delle equazioni lineari alle derivate parziali del 2° ordine di tipo iperbolico.* Nota di R. BADESCU, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Proprietà differenziale caratteristica dei coni proiettanti le varietà che rappresentano la totalità delle quadriche di uno spazio lineare.* Nota di M. VILLA, presentata dal Corrisp. E. BOMPIANI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulle funzioni poligene di una variabile bicomplessa duale.* Nota II di J. C. VIGNAUX, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Risoluzione di un problema relativo alle sollecitazioni impresse sui sistemi continui.* Nota di ANGELINA CABRAS, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. GIORGI.

Nei calcoli delle perturbazioni meccaniche (moti vibratorii di natura qualunque, generalmente non periodici) propagati in una dimensione, si presenta, in casi generalissimi, questa coppia di equazioni:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial \Phi}{\partial s} = a\Psi + b\frac{\partial \Psi}{\partial t} \\ -\frac{\partial \Psi}{\partial s} = p\Phi + q\frac{\partial \Phi}{\partial t} \end{array} \right.$$

Qui, Φ e Ψ sono due variabili fisiche dipendenti da una coordinata s e dal tempo t ; e le a, b, p, q , sono costanti positive. Per esempio, nelle condutture idriche, con intervento di effetti elastici, attrito e disperdimento, retti da legge lineare, le due variabili possono essere la pressione e la portata; nella propagazione degli scotimenti lungo sbarre o corde vibranti, e in quella delle onde piane in un mezzo omogeneo, intervengono interpretazioni analoghe. In molti casi l'uno o l'altro dei coefficienti ha valore nullo; ma per prevedere le diverse applicazioni, tengo conto della presenza di tutti i coefficienti stessi.

Ogni perturbazione propagata, di tipo il più generale possibile, si compone di due treni di onde che procedono in senso opposto. Si può studiare uno solo di essi per volta. Per avere un sistema definito di perturbazioni che si propagano nel senso delle s crescenti, supponiamo che il sistema in cui il fenomeno avviene, sia indefinito, da $s = 0$ sino a $s = +\infty$; e che invece di partire da un'epoca finita con una distribuzione assegnata di perturbazioni lungo il sistema, si risalga teoricamente a un'epoca infinitamente remota e che il fenomeno sia tutto dovuto a un'azione impressa all'origine. Questa sollecitazione $\Phi(0, t) = \Phi_0(t)$ sia data per tutte le epoche passate da $t = -\infty$ fino all'epoca attuale. Ciò include come caso particolare l'ipotesi che si parta da un'epoca finita t_0 , e che il sistema sia inizialmente in riposo, e che da quell'epoca finita in poi si conosca la $\Phi_0(t)$ per $t < t_0$. I calcoli che si istituiscono valgono anche per sistemi di estensione finita sollecitati all'origine, purchè ci si voglia limitare a calcolare l'onda di andata, senza quella di ritorno.

(1) Nella seduta del 3 giugno 1938.

Sia proposto il problema di calcolare in dipendenza della data $\Phi_0(t)$, il valore della perturbazione $\Psi(0, t) = \Psi_0(t)$ che ne consegue, preso all'origine, e senza passare pel calcolo della propagazione.

La funzione data $\Phi_0(t)$ sia una « funzione fisica » quindi integrabile, ma generalmente non analitica, ed eventualmente discontinua ed anche impulsiva.

Il problema proposto è uno di quelli a cui convengono i procedimenti del calcolo operatorio funzionale⁽¹⁾, mentre coi metodi classici e anche con l'uso diretto della trasformata di Laplace, la risoluzione si presenterebbe molto più ardua.

Secondo i noti teoremi del detto calcolo, è lecito in questo caso trattare l'operatore $\Delta = \frac{\partial}{\partial t}$ come se fosse un moltiplicatore numerico. Scrivendo $A = a + b\Delta$, $B = p + q\Delta$, le equazioni (1) si presentano così:

$$(2) \quad -\frac{\partial \Phi}{\partial s} = A\Psi \quad ; \quad -\frac{\partial \Psi}{\partial s} = B\Phi$$

e per eliminazione si ha

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} = AB\Phi.$$

Nell'integrazione si deve tener conto delle ipotesi proposte le quali implicano che per $s = 0$, si deve avere $\Phi = \Phi_0$, e per $s \rightarrow +\infty$, Φ non deve contenere termini che crescano indefinitamente (i quali corrisponderebbero a onde procedenti in senso negativo.) Quindi

$$(4) \quad \Phi = e^{-s\sqrt{AB}} \Phi_0.$$

Tenendo conto di ciò nella prima delle (2), si ricava

$$(5) \quad \Psi = \sqrt{\frac{B}{A}} \Phi.$$

Applicando questo risultato all'origine $s = 0$, e mettendo in evidenza la variabile indipendente t , e l'operatore Δ , si ha la relazione richiesta fra $\Phi_0(t)$ e $\Psi_0(t)$ espressa, senza intervento di calcoli sulla propagazione, in forma simbolica così

$$(6) \quad \Psi_0(t) = \sqrt{\frac{p + q\Delta}{a + b\Delta}} \Phi_0(t).$$

(1) Ved. le notizie bibliografiche date in G. GIORGI, *Metodi moderni di calcolo operatorio funzionale*. «Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano», vol. VIII, 1934, pp. 189-214. Rinvio il lettore a questo scritto e a quelli ivi citati per gli enunciati dei teoremi di cui faccio uso, e per le notazioni. Ved. anche i miei scritti precedenti sull'uso degli operatori.

Questa è una relazione a cui si perviene anche in altri problemi della fisica matematica: ma la difficoltà che ha impedito di utilizzarla è quella di interpretare l'operatore che in essa figura applicato a $\Phi_0(t)$.

Oggetto precipuo della presente Nota è di mostrare come questa interpretazione possa ottenersi.

Si deve premettere che l'operatore in questione, non avendo la forma di una funzione intera del simbolo Δ , è di quelli che secondo Pincherle e Amaldi si chiamano « a valutazione multipla ». La natura del problema fisico, in questa come nelle altre consimili ricerche, impone di ricercare, fra tutte le possibili valutazioni, quella detta *fondamentale* (Giorgi) o *retrospettiva* (Wiener)⁽¹⁾, in modo da assicurare che ogni singolo valore della perturbazione $\Psi_0(t)$ dipenda da tutti i valori antecedenti, e non da quelli susseguenti, della sollecitazione $\Phi_0(t)$.

Precisato questo, cerco di ottenere la « funzione generatrice » dell'operatore, cioè il risultato che si ottiene applicandolo a una particolare $\Phi_0(t)$ che sia una « funzione impulsiva unitaria » $Fu(t)$. Devo cioè determinare, nella sua valutazione fondamentale, la

$$(7) \quad G(t) = \sqrt{\frac{p + q\Delta}{a + b\Delta}} Fu(t).$$

Ritenendo che nè q , nè a siano nulli, scrivo l'espressione così:

$$(7 \text{ bis}) \quad G(t) = \sqrt{\frac{q}{b}} \sqrt{\frac{\Delta + p/q}{\Delta + a/b}} Fu(t).$$

Ricorro al « teorema di trasposizione », così formulato:

$$(8) \quad f(\Delta) Fu(t) = e^{mt} f(\Delta + m) Fu(t)$$

Preso:

$$m = -\frac{1}{2} \left(\frac{p}{q} + \frac{a}{b} \right), \quad h = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} - \frac{p}{q} \right)$$

e applicando la (8), ricavo:

$$(9) \quad \begin{aligned} G(t) &= \sqrt{\frac{q}{b}} e^{mt} \sqrt{\frac{\Delta - h}{\Delta + b}} Fu(t) = \\ &= \sqrt{\frac{q}{b}} e^{mt} (\Delta - h) \frac{1}{\sqrt{\Delta^2 - b^2}} Fu(t). \end{aligned}$$

L'operatore $\frac{1}{\sqrt{\Delta^2 - b^2}}$, a differenza del precedente, è « diffusivo » perchè se Δ , anzichè un simbolo operatorio, rappresentasse una variabile

(1) Ved. N. WIENER, *The operational calculus*. « Mathematische Annalen », Bd. 95, 1925, pp. 537-593.

complessa, l'espressione che lo rappresenta si annullerebbe regolarmente per $\Delta = \infty$. Quindi per un noto teorema del calcolo operatorio, è lecito svilupparlo in serie di potenze negative di Δ , e applicare termine a termine. Effettuando lo sviluppo, si ha:

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta^2 - b^2}} = \Delta^{-1} + \frac{b^2}{2} \Delta^{-3} + \\ + \frac{b^4}{1.2} \frac{1}{2} \frac{3}{2} \Delta^{-5} + \dots + \frac{b^{2n}}{n!} \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \Delta^{-2n-1} + \dots$$

Ora ricordiamo ⁽¹⁾ che la valutazione fondamentale di Δ^{-N} , quando N è positivo, è data dalla formola

$$\Delta^{-N} Fu(t) = \frac{t^{N-1}}{\Gamma(N)} I(t)$$

dove Γ è la funzione gaussiana, mentre $I(t)$ denota, come di consueto, la funzione che è nulla per t negativo, uguale all'unità per t positivo (e il valore singolo per $t=0$ non interessa).

Quindi:

$$\Delta^{-2n-1} Fu(t) = \frac{t^{2n}}{(2n)!} I(t).$$

E si ottiene:

$$(10) \quad \frac{1}{\sqrt{\Delta^2 - b^2}} Fu(t) = \sum_0^{\infty} \left(\frac{b^{2n}}{2^n} \frac{1}{n!} \right)^2 \cdot I(t).$$

La serie che precede $I(t)$ non è altro che la funzione non oscillante di Bessel di ordine zero, $J_0(ibt) \equiv I_0(bt)$. Si ha dunque:

$$(11) \quad \frac{1}{\sqrt{\Delta^2 - b^2}} Fu(t) = I_0(bt) \cdot I(t)$$

e tenendo conto di ciò nella (9) si ottiene

$$(12) \quad G(t) = \sqrt{\frac{q}{b}} e^{mt} (\Delta - b) \cdot I_0(bt) \cdot I(t) = \\ = \sqrt{\frac{q}{b}} e^{mt} b [I_1(bt) - I_0(bt)] I(t) + \sqrt{\frac{q}{b}} Fu(t).$$

Qui col simbolo I_1 s'intende la derivata della I_0 , cioè la funzione non oscillante di Bessel di ordine uno, $I_1(x) = \frac{1}{i} J_1(ix)$.

(1) Ved. G. GIORGI, *Sul calcolo delle soluzioni funzionali* ecc. « Atti dell' A. E. I. », vol. IX, 1905, pp. 651-699, § 9, art. 36.

Applicando il teorema generale sull'uso delle funzioni generatrici, il quale traduce l'asserzione che in un sistema lineare normale l'effetto di una sollecitazione prolungata si ottiene come somma degli effetti singoli dovuti agli impulsi infinitesimi in cui la sollecitazione può essere decomposta, otteniamo la soluzione finale:

$$(13) \quad \Psi_0(t) = \sqrt{\frac{q}{b}} \Phi_0(t) + b \sqrt{\frac{q}{b}} \int_0^\infty e^{m\theta} [I_1(b\theta) - I_0(b\theta)] \Phi_0(t - \theta) d\theta.$$

Questa formula vale non solo per applicarla nel punto iniziale del sistema vibrante, ma vale evidentemente anche per un punto di ascissa qualunque, per dedurre l'andamento della Ψ in quel punto quando ivi sia stato già calcolato l'andamento della Φ .

Nel ricavarla ho lasciato da parte i casi singoli in cui $q = 0$, ovvero $a = 0$. La risoluzione in questi casi, si può ottenere con passaggio al limite od anche direttamente, senza intervento delle funzioni di Bessel. Mi riservo di svilupparla in altra occasione.

Meccanica. — *Moti stazionari nei problemi dinamici del Liouville.* Nota di G. LAMPARIELLO, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Le equazioni canoniche della Dinamica

$$(1) \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

in cui la funzione H di Hamilton non dipende dal tempo, pongono in evidenza che le eventuali configurazioni di equilibrio sono rappresentate nello spazio delle fasi (delle variabili canoniche q, p) da altrettanti punti in cui l'energia totale H è stazionaria.

Se le (1) ammettono integrali uniformi, oltre quello dell'energia, c'è luogo a domandarsi se esistono movimenti del sistema dinamico durante i quali l'energia sia stazionaria.

Il Routh ⁽²⁾ ha dimostrato l'esistenza di siffatti moti nel caso in cui qualche coordinata del sistema è ciclica (cioè non interviene in H), così che i momenti p corrispondenti risultano costanti durante il moto. Se allora si tien conto di questi integrali nel rendere H stazionaria, si trova che i

(1) Nella seduta del 3 giugno 1938.

(2) Cfr. *Advanced rigid Dynamics*, Ch. 2.

moti del Routh (*steady motion*) sono caratterizzati da ciò che risultano costanti le velocità delle coordinate cicliche e le coordinate da cui dipende H .

Il Levi-Civita ⁽¹⁾ ha ricercato nel 1901 come si possa estendere la nozione di moto stazionario, quando le (1) ammettono integrali uniformi di qualunque natura, dimostrando che, ad ogni gruppo di m integrali, indipendenti dal tempo ed in involuzione tra loro, corrisponde una classe di ∞^{2m} moti che rendono stazionaria l'energia compatibilmente con gli integrali stessi.

Questo teorema è suscettibile di una formulazione che non esige la canonicità delle variabili ed ha trovato notevole applicazione ⁽²⁾ alla ricerca delle classiche soluzioni periodiche, scoperte da Eulero e Lagrange nel problema dei tre corpi, nonchè allo studio dei moti stazionari di un solido pesante fissato in un punto nel caso in cui sussiste l'integrale della Kowalewsky, oltre gli integrali classici delle forze vive e del momento delle quantità di moto rispetto alla verticale del punto fisso. Come si sa, in questo caso conviene adottare le variabili dell'impostazione originale di Eulero.

Non sembra che sia stata fatta applicazione del teorema del Levi-Civita a qualche tipo generale di problemi meccanici concreti in cui le variabili che convengano ad essi siano canoniche. Nell'esempio proposto da Whittaker ⁽³⁾ a titolo di esercitazione la funzione di Hamilton H è lineare rispetto ai momenti p coniugati alle coordinate q .

Qui ci proponiamo di ricercare i moti stazionari nei problemi dinamici del Liouville ⁽⁴⁾ ad n gradi di libertà in cui le coordinate q del sistema conferiscono all'energia cinetica T ed al potenziale U della sollecitazione espressioni del tipo

$$T = \frac{1}{2} (\varphi_1(q_1) + \dots + \varphi_n(q_n)) (\dot{q}_1^2 + \dots + \dot{q}_n^2)$$

$$U = \frac{U_1(q_1) + \dots + U_n(q_n)}{\varphi_1(q_1) + \dots + \varphi_n(q_n)}$$

dove le funzioni φ_i, f_i, U_i dipendono solo dalla coordinata q_i .

Com'è ben noto, questi problemi sono integrabili per quadrature in virtù dell'esistenza di n integrali uniformi tra loro in involuzione (compreso quello dell'energia).

Si stabilisce il seguente

(1) Cfr. *Sui moti stazionari dei sistemi olonomi*. «Rend. Lincei»; *Sur la recherche des solutions particulières des systèmes différentiels et sur les mouvements stationnaires*. «Prac matematyczno-fizycznych», Warszawa, to. XXII, 1906.

(2) Cfr. T. LEVI-CIVITA, *Sui moti stazionari di un corpo rigido nel caso della Kowalewsky*. «Rend. Lincei», ser. 5^a, vol. X, 1901.

(3) Cfr. *Analytical Dynamics*, fourth ed. Cambridge Univ. Press, 1937.

(4) Cfr. T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di meccanica razionale*, vol. II, cap. 10.

TEOREMA. — *I moti stazionari nei problemi del Liouville sono tali che una, o due, ..., o $n - 1$ coordinate sono necessariamente costanti, mentre la legge temporale di variabilità delle altre coordinate si deduce (con quadrature) dagli integrali del Liouville. Non esistono moti stazionari corrispondenti a valori costanti di un gruppo di coordinate le cui φ corrispondenti fossero identicamente nulle.*

Nei moti in cui sono costanti $n - 1$ coordinate, le traiettorie si conseguono così senza quadrature.

Questo risultato trova, ad es., applicazione al classico problema del moto di un punto attratto da due centri fissi O, O' .

Assumendo quali coordinate ⁽¹⁾ della particella gravitante P , la (semi-) somma λ e la (semi-) differenza μ delle distanze r, r' di P da O ed O' e l'anomalia ϑ del semipiano $p \equiv OO'P$ rispetto ad un semipiano π fisso uscente da OO' , la variabile ϑ risulta ciclica e nelle λ, μ il problema è del tipo di Liouville. Nel problema ridotto a queste due coordinate le cose vanno come se il piano p fosse fisso, e i moti stazionari in questo piano (λ o μ costanti) sono dunque ellittici od iperbolici con fuochi nei centri di forza.

Più precisamente risultano stazionari i moti in cui la particella si muove lungo un'ellisse o un'iperbole di fuochi O, O' , mentre il piano p ruota intorno ad OO' con velocità angolare $\dot{\vartheta}$ variabile nel tempo.

Naturalmente se il valore iniziale di $\dot{\vartheta}$ è nullo, il moto è piano.

Sono da considerare inoltre le posizioni di equilibrio nel problema ridotto alle sole λ, μ , perchè queste danno luogo a moti circolari (uniformi) della particella in piani ortogonali alla retta OO' ; la loro esistenza è accertata in via indiretta, osservando che ai moti circolari uniformi si è condotti ⁽²⁾ rendendo stazionaria l'energia subordinatamente al solo integrale che consegue dal carattere ciclico di ϑ .

Risultano così caratterizzati qualitativamente gli ∞^4 moti stazionari ($0 \infty^2$ nei moti piani) della particella gravitante intorno ai due centri O, O' . L'analisi quantitativa segue dalle considerazioni generali che ora ci proponiamo di istituire.

2. PROBLEMI DI LIOUVILLE A DUE GRADI DI LIBERTÀ. — Cominciamo col trattare questo caso al quale si riducono interessanti problemi dinamici. I momenti p_1, p_2 coniugati alle coordinate q_1, q_2 del sistema sono dati da

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \varphi \dot{q}_i \quad (i = 1, 2)$$

(1) Adottiamo le stesse notazioni usate in C. L. CHARLIER, *Die Mechanik des Himmels*, to. 1, Berlin, 1927.

(2) Cfr. G. PICCIATI, *Sui moti stazionari dei sistemi olonomi soggetti a forze conservative in casi particolari*. « Atti del R. Ist. Ven. di Sc. e lett. », to. LXI, 1902.

dove $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. La funzione di Hamilton è allora

$$H = \frac{\sigma}{\varphi},$$

avendo posto $\sigma_i = \frac{p_i^2}{2f_i} - U_i$, $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$.

Il classico criterio della separazione delle variabili conduce a riconoscere che il problema ammette i due integrali

$$\sigma_i - E\varphi_i = \alpha_i \quad (i = 1, 2)$$

essendo E la costante dell'energia e $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$.

Da essi si desume per somma l'integrale dell'energia $H = E$. Per il nostro scopo conviene meglio ritenere, accanto a questo, uno di quegli integrali che scriveremo nella forma

$$(2) \quad f \equiv \frac{\varphi_2 \sigma_1 - \varphi_1 \sigma_2}{\varphi} = \alpha, \quad \alpha = \alpha_1 = -\alpha_2.$$

Per il teorema del Levi-Civita a quest'integrale di Liouville corrisponde una classe di ∞^2 moti stazionari (fra gli ∞^4 possibili) che si potrebbero ricercare riducendo la funzione H a dipendere solo da una delle due terne di variabili canoniche q_1, q_2, p_1 ; q_1, q_2, p_2 . Si ricavi, ad es., da (2) la p_2 in funzione di q_1, q_2, p_1 e sia \bar{H} la H ridotta; se si annulla il differenziale $d\bar{H}$ si trova che l'equazione $\frac{\partial \bar{H}}{\partial q_2} = 0$ è soddisfatta identicamente. Resta a soddisfare alle equazioni

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial \bar{H}}{\partial p_1} = 0,$$

da cui si traggono

$$p_1 = \psi(q_2, \alpha), \quad q_1 = \chi(q_2, \alpha).$$

I moti stazionari si ottengono allora dall'equazione

$$(3) \quad \dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2},$$

quando il secondo membro sia ridotto a dipendere dalla sola variabile q_2 e da α in virtù delle espressioni dianzi ottenute per le altre tre variabili canoniche p_1, p_2, q_1 .

L'integrazione di (3) introduce una nuova costante arbitraria e si ha così la totalità dei moti cercati.

Ma preferiamo seguire il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Si tratta di rendere stazionaria la funzione

$$K = H + \lambda f = \frac{1}{\varphi} \{ \sigma_1 (1 + \lambda \varphi_2) + \sigma_2 (1 - \lambda \varphi_1) \},$$

dove λ è *a priori* indeterminato.

Si è così condotti a discutere il sistema di equazioni

$$(I) \quad \begin{cases} f_1 \varphi \frac{\partial K}{\partial p_1} \equiv (1 + \lambda \varphi_2) p_1 = 0, \\ f_2 \varphi \frac{\partial K}{\partial p_2} \equiv (1 - \lambda \varphi_1) p_2 = 0, \end{cases}$$

$$(II) \quad \begin{cases} -\varphi^2 \frac{\partial K}{\partial q_1} \equiv \varphi \left\{ \left(\frac{f'_1}{2f_1} p_1^2 + U'_1 \right) (1 + \lambda \varphi_2) + \lambda \sigma_2 \varphi'_1 \right\} + \\ \quad + \varphi'_1 \{ \sigma_1 (1 + \lambda \varphi_2) + \sigma_2 (1 - \lambda \varphi_1) \} = 0, \\ -\varphi^2 \frac{\partial K}{\partial q_2} \equiv \varphi \left\{ \left(\frac{f'_2}{2f_2} p_2^2 + U'_2 \right) (1 - \lambda \varphi_1) - \lambda \sigma_1 \varphi'_2 \right\} + \\ \quad + \varphi'_2 \{ \sigma_1 (1 + \lambda \varphi_2) + \sigma_2 (1 - \lambda \varphi_1) \} = 0. \end{cases}$$

Dalle (I), se nessuna funzione φ_i è identicamente nulla, si deducono i tre sistemi parziali

$$(I_1) \quad p_1 = p_2 = 0 \quad (I_2) \quad 1 + \lambda \varphi_2 = 0, p_2 = 0 \quad (I_3) \quad 1 - \lambda \varphi_1 = 0, p_1 = 0,$$

di cui escludiamo il primo che conduce ad eventuali stati di equilibrio del sistema dinamico.

Dalle (I₂) segue che

$$q_2 = \text{costante} \quad \text{e} \quad \lambda = -\frac{1}{\varphi_2}.$$

Orbene, in virtù delle (I₂), le (II) risultano *identicamente soddisfatte*, con che sarà accertato che sono stazionari moti in cui la coordinata q_2 si mantiene costante.

Infatti, per la 1^a delle (II) la verifica è immediata, se si osserva che σ_2 e $1 - \lambda \varphi_1$ diventano $-U_2$ e $\frac{\varphi}{\varphi_2}$; la 2^a delle (II) diviene invece

$$\sigma_1 \varphi'_2 = U_2 \varphi'_2 - U'_2 \varphi,$$

ovvero, in virtù dell'integrale di Liouville

$$(4) \quad U'_2 \varphi_2 - (U_2 - \alpha) \varphi'_2 = 0$$

da cui si ricava α in funzione esplicita di q_2 (o reciprocamente q_2 in funzione (implicita) di α). La (4) si può anche esprimere nella forma

$$(4') \quad \frac{d}{dq_2} \frac{U_2 - \alpha}{\varphi_2} = 0,$$

in accordo col presupposto carattere stazionario dell'energia: ciò perchè combinando gli integrali dell'energia e di Liouville, si trova precisamente

$$(5) \quad E = - \frac{U_2 - \alpha}{\varphi_2} = - \frac{U_2 + \alpha_2}{\varphi_2}.$$

Per dedurre la legge temporale bisognerà caratterizzare la q_1 in funzione del tempo e ciò si ottiene senz'altro dall'integrale del Liouville nella forma

$$(6) \quad \frac{1}{2f_1} \varphi^2 \dot{q}_1^2 = E\varphi_1 + U_1 + \alpha,$$

in cui si riguardino costanti E e q_2 che interviene attraverso $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.

La soluzione generale di quest'equazione si ottiene con una quadratura isolando dt , e contiene, oltre α , una seconda costante t_0 che interviene attraverso il binomio $t - t_0$.

In modo analogo, dalle (I₃) segue che

$$q_1 = \text{costante} \quad \text{e} \quad \lambda = \frac{1}{\varphi_1},$$

in conseguenza delle quali le (II) risultano identicamente soddisfatte. In questi moti l'energia totale è data da

$$(8) \quad E = - \frac{U_1 + \alpha_1}{\varphi_1}$$

e la q_2 in funzione del tempo si ottiene dall'integrale del Liouville nella forma

$$(9) \quad \frac{1}{2f_2} \varphi^2 \dot{q}_2^2 = E\varphi_2 + U_2 - \alpha,$$

in cui si riguardi q_1 costante ed E data dalla (8).

Si osserverà che sia l'espressione dell'energia che l'equazione differenziale della legge di variazione di q_2 , quando q_1 è costante, si deducono formalmente da quelle relative alla costanza di q_2 , scambiando gli indici 1, 2 e sostituendo $-\alpha$ ad α . Ecco come deve essere interpretato il risultato.

Si consideri l'insieme continuo \mathcal{A} dei valori, ciascuno individuato dallo stato del sistema ad un istante particolare t_0 , di cui è suscettibile la costante α nei moti stazionari con q_2 costante. Ebbene, sia \mathcal{B} l'insieme dei punti otte-

nuti per cambiamento di segno da quelli di \mathcal{A} : a questo insieme di valori della costante α corrispondono moti stazionari in cui è costante q_1 . Ne segue che nei casi in cui, per la natura del problema, la costante α non può essere che negativa o positiva, esistono solo moti stazionari in cui è costante q_1 (o q_2) e ciò si verifica sempre e solo quando una delle funzioni φ_1, φ_2 è identicamente nulla, come si riconosce dal sistema delle condizioni (I).

Così, ad es., sia P una particella soggetta ad una forza centrale funzione della sola distanza ρ dal centro fisso O ; sia ϑ l'anomalia del raggio vettore OP valutata sul piano del moto rispetto ad una direzione fissa spiccata da O . Il problema è ovviamente del tipo del Liouville, essendo l'energia cinetica T della massa unitaria

$$T = \frac{1}{2} \rho^2 \left(\dot{\vartheta}^2 + \frac{\dot{\rho}^2}{\rho^2} \right)$$

ed il potenziale $U(\rho) = \frac{1}{\rho^2} \cdot \rho^2 U(\rho)$. Pensando che le coordinate q_1, q_2 siano rispettivamente ϑ e ρ , si ha in tal caso $\varphi_1 \equiv 0$, $\varphi_2 \equiv \rho^2$. I moti stazionari sono dunque soltanto quelli in cui ρ è costante e offra moti circolari di centro O . Poichè si ha anche $U_1 \equiv 0$, l'integrale del Liouville è

$$\frac{1}{2} p_{\vartheta}^2 = \alpha, \quad \text{dove} \quad p_{\vartheta} = \rho^2 \dot{\vartheta}.$$

Dunque la costante del Liouville α è eguale ad $\frac{1}{2} c^2$, (c costante delle aree) ed è quindi essenzialmente positiva. Alla circostanza aritmetica che α non possa assumere valori negativi fa riscontro l'esistenza di un solo tipo di moti stazionari (orbite circolari).

3. PROBLEMI A TRE GRADI DI LIBERTÀ. — La funzione di Hamilton è, con evidente significato dei simboli,

$$H = \frac{\sigma}{\varphi}$$

con

$$\varphi = \Sigma \varphi_i, \quad \sigma = \Sigma \sigma_i, \quad \sigma_i = \frac{p_i^2}{2 f_i} - U_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Il problema ammette i tre integrali (in involuzione)

$$\sigma_i - E \varphi_i = \alpha_i \text{ (costante)} \quad (i = 1, 2, 3),$$

essendo

$$\Sigma \alpha_i = 0,$$

ma conviene ritenere, accanto all'integrale dell'energia, due di questi integrali che scriviamo nella forma

$$f_1 \equiv \frac{1}{\varphi} \{ \sigma_1 (\varphi_2 + \varphi_3) - \varphi_1 (\sigma_2 + \sigma_3) \} = \alpha_1,$$

$$f_2 \equiv \frac{1}{\varphi} \{ \sigma_2 (\varphi_3 + \varphi_1) - \varphi_2 (\sigma_3 + \sigma_1) \} = \alpha_2.$$

Occorre rendere stazionaria la funzione

$$K = H + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = \frac{1}{\varphi} \{ (1 + \lambda_1 (\varphi_2 + \varphi_3) - \lambda_2 \varphi_2) \sigma_1 + \\ + (1 - \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 (\varphi_1 + \varphi_3)) \sigma_2 + (1 - \lambda_1 \varphi_1 - \lambda_2 \varphi_2) \sigma_3 \}$$

dove λ_1, λ_2 sono *a priori* indeterminati.

Annullando le derivate parziali di K rispetto alle q, p

$$(I) \quad \frac{\partial K}{\partial p_i} = 0 \\ (II) \quad \frac{\partial K}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

se nessuna φ_i è identicamente nulla e se si escludono eventuali stati di equilibrio, si è condotti a studiare le due terne di casi in cui una sola o due delle p sono nulle.

Se la sola p_3 è nulla, alla corrispondente condizione

$$q_3 = \text{costante}$$

vanno associate le due equazioni (del tipo (I))

$$1 + \lambda_1 (\varphi_2 + \varphi_3) - \lambda_2 \varphi_2 = 0 \\ 1 - \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 (\varphi_1 + \varphi_3) = 0$$

atte a determinare i moltiplicatori. Questi sono dati da

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{\varphi_3}.$$

Si trova allora che le prime due delle (II) sono identicamente soddisfatte, mentre la 3^a diventa

$$\frac{d}{dq_3} \frac{U_3 + \alpha_3}{\varphi_3} = 0,$$

da cui si ricava α_3 in funzione esplicita di q_3 . Questa relazione è in accordo col presupposto carattere stazionario dell'energia, perchè dalla combinazione degli integrali dell'energia e di Liouville si deduce che

$$E = -\frac{U_3 + \alpha_3}{\varphi_3}.$$

Quando si esaminano i casi in cui sia nulla soltanto p_1 o p_2 uno dei moltiplicatori risulta nullo ($q_1 = \text{costante}$: $\lambda_1 = \frac{1}{\varphi_1}$, $\lambda_2 = 0$; $q_2 = \text{costante}$:

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{1}{\varphi_2}$), come se si rendesse stazionaria l'energia tenendo conto di un solo integrale di Liouville. Le equazioni (II) risultano ancora soddisfatte implicando che la coordinata q_1 o q_2 sia costante e l'energia è data rispettivamente da

$$E = - \frac{U_i + \alpha_i}{\varphi_i} \quad (i = 1, 2).$$

Se due p sono nulle, si trova che K è stazionaria quando le q corrispondenti sono costanti e, mentre una delle (II) è identicamente soddisfatta in virtù delle (I), le altre due assumono la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_{i+1}} \frac{U_{i+1} + U_{i+2} + \alpha_{i+1} + \alpha_{i+2}}{\varphi_{i+1} + \varphi_{i+2}} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial q_{i+2}} \frac{U_{i+1} + U_{i+2} + \alpha_{i+1} + \alpha_{i+2}}{\varphi_{i+1} + \varphi_{i+2}} &= 0 \end{aligned} \quad (i = 1, 2, 3)$$

(con la convenzione che gli indici superiori a 3 siano ridotti di tre unità). Da queste si deducono α_{i+1} , α_{i+2} in funzione di q_{i+1} , q_{i+2} e la funzione sottoposta alla derivazione non è che l'energia cambiata di segno.

Se infine una o due delle funzioni φ_i sono identicamente nulle, non possono esistere moti stazionari in cui solo la q o le q corrispondenti siano costanti. Nei differenti casi dianzi esaminati, la legge temporale di variazione delle coordinate variabili si desume con quadrature dagli integrali del Liouville.

Le considerazioni precedenti si estendono senz'altro ad un problema ad n gradi di libertà e si conclude col teorema enunciato al n. 1.

Abbiamo preferito discutere i problemi del Liouville e non quelli più generali dello Stäckel a tre o più gradi di libertà, perchè questi ultimi, oltre alla maggiore complessità algoritmica, presentano fin qui un interesse più analitico che dinamico; ma riteniamo che i caratteri qualitativi dei moti stazionari spettanti al caso di Liouville sussistano anche per i problemi di Stäckel.

OSSERVAZIONE. — Un problema del Liouville ad n gradi di libertà ammette dunque al massimo ∞^{2n-2} soluzioni stazionarie. Naturalmente a classi meno estese di siffatti moti si perverrebbe se, per valori di $n \geq 3$, si rendesse stazionaria l'energia tenendo conto di un gruppo parziale di integrali fra gli $n - 1$ che ammette il problema oltre quello dell'energia.

Così, per considerare il caso più semplice, se in un problema a tre gradi di libertà si tien conto di un solo integrale del Liouville si hanno in corrispondenza ∞^2 soluzioni stazionarie fra le ∞^4 possibili.

Ora è interessante osservare, come risulta dai sistemi parziali (I_3) , (I_4) , che nei moti in cui è costante q_1 o q_2 le cose vanno come se si rendesse stazionaria la H subordinatamente ad un solo integrale di Liouville anzichè

ad entrambi e ad analogà conclusione si perverrebbe per le coordinate q_2, q_3 o q_3, q_1 se si associassero all'integrale dell'energia gli integrali di Liouville di costanti α_2, α_3 o α_3, α_1 .

4. APPLICAZIONE AL PROBLEMA DEL MOTO DI UN PUNTO MATERIALE ATTRATTO DA DUE CENTRI FISSI. — Questo classico problema è stato posto e risolto da Eulero e trattato da Lagrange, Jacobi. In tempi recenti Charlier ha fatto una discussione approfondita della natura di tutti i possibili moti della particella gravitante P, proponendo per essi una classificazione in dodici categorie.

Supposto che la velocità iniziale v_0 di P sia nulla o sia nel piano dei centri O, O' e della posizione P_0 iniziale di P (in guisa che O, O' non appartengano alla linea d'azione di v_0), il moto di P risulta piano.

Se per coordinate di P si assumono le ellittiche, cioè

$$(10) \quad \lambda = \frac{1}{2}(r + r') \quad , \quad \mu = \frac{1}{2}(r - r'),$$

essendo $r = OP$, $r' = O'P$, si trova che l'energia cinetica T ed il potenziale U sono espressi da

$$(11) \quad T = \frac{1}{2}(\dot{\lambda}^2 - \dot{\mu}^2) \left(\frac{\dot{\lambda}^2}{\lambda^2 - c^2} + \frac{\dot{\mu}^2}{c^2 - \mu^2} \right),$$

$$(12) \quad U = \frac{1}{\lambda^2 - \mu^2} \{ (k + k')\lambda - (k - k')\mu \}$$

dove $k = fm_0$, $k' = fm'_0$ (f costante di Gauss, m_0, m'_0 masse dei centri di forza) e c è la semidistanza di k e k' .

Il problema è del tipo del Liouville e nessuna delle funzioni φ_1, φ_2 , che in questo caso sono $\varphi_1 \equiv \lambda^2$, $\varphi_2 \equiv -\mu^2$ se $q_1 = \lambda$, $q_2 = \mu$, è identicamente nulla. Dal nostro criterio generale si desume dunque che i moti stazionari sono quelli per cui è costante λ (moti ellittici) o μ (moti iperbolici), essendo i fuochi O e O'.

L'esistenza di siffatti moti era già nota ed anzi segue dall'applicazione di un elegante criterio di Legendre, secondo cui quando il moto ellittico od iperbolico è possibile sotto l'azione di uno solo dei centri O, O' con velocità iniziali (scalari) v_0, v'_0 , esso è anche possibile quando agiscono entrambi i centri purchè la velocità iniziale sia $\sqrt{v_0^2 + v'_0{}^2}$. Ma ciò che sembra non sia stato mai notato nelle numerose ricerche dedicate al problema è il carattere stazionario di quei moti. Charlier nota che i moti ellittici sono periodici e che tali sono anche quelli iperbolici sotto certe condizioni. In ogni caso il valore dell'energia si desume dalla nostra formola generale: nei moti ellittici in cui è negativa ed è costante λ , l'energia è data da

$$(13) \quad E = - \frac{U_1 + \alpha}{\varphi_1} = - \frac{(k + k')\lambda_0 + \alpha}{\lambda_0^2},$$

se α è la costante del Liouville.

L'assegnazione del valore costante λ_0 di λ e della velocità iniziale v_0 , necessariamente tangente all'ellisse determinata da λ_0 con fuochi in O, O' , consente di calcolare α e quindi l'energia.

IL PROBLEMA SPAZIALE. — Si assumano quali coordinate di P le coordinate cartesiane nel piano determinato da O, O' e dalla posizione istantanea di P (non appartenente in generale alla retta OO'), assumendo quale asse x la retta OO' orientata da O verso O' e quale asse y , la normale all'asse x per il punto medio Ω del segmento OO' ed inoltre l'anomalia ϑ del semipiano $p \equiv OO'P$ rispetto ad un semipiano fisso π uscente dall'asse x . L'energia cinetica dalla massa unitaria potenziata è

$$(14) \quad T = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + y^2 \dot{\vartheta}^2),$$

mentre il potenziale è dato da

$$(15) \quad U = \frac{k}{r} + \frac{k'}{r'}.$$

Il carattere ciclico della coordinata ϑ comporta l'esistenza dell'integrale

$$(16) \quad y^2 \dot{\vartheta} = \gamma \quad \gamma = \text{costante}$$

così che, applicando il criterio di riduzione del Routh ⁽¹⁾, il problema si riduce a due gradi di libertà, potendo riguardare il piano Ωxy fisso, l'energia cinetica e il potenziale essendo dati da

$$(17) \quad T^* = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad , \quad U^* = U - \frac{\gamma^2}{2 y^2}.$$

Introducendo le coordinate ellittiche λ, μ legate ad x, y dalle equazioni

$$c^2 x^2 = \lambda^2 \mu^2 \quad , \quad c^2 y^2 = (\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)$$

si trovano le espressioni

$$(18) \quad T^* = \frac{1}{2} (\lambda^2 - \mu^2) \left(\frac{\dot{\lambda}^2}{\lambda^2 - c^2} + \frac{\dot{\mu}^2}{c^2 - \mu^2} \right),$$

$$U^* = \frac{1}{\lambda^2 - \mu^2} \left\{ (k + k') \lambda - \frac{1}{2} c^2 \gamma^2 \frac{1}{\lambda^2 - c^2} - \left((k - k') \mu + \frac{1}{2} c^2 \gamma^2 \frac{1}{c^2 - \mu^2} \right) \right\}$$

che sono del tipo del Liouville.

Applicando il nostro criterio sono dunque possibili moti stazionari ellittici od iperbolici e qui interessa considerare anche le posizioni di equilibrio, perchè queste danno luogo attraverso l'integrale (16) a moti circolari

(1) Cfr. T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di meccanica razionale*, to. II, cap. X.

uniformi sui piani ortogonali all'asse x , il carattere uniforme seguendo senz'altro dalla costanza di y e quindi di $\dot{\vartheta}$.

Ma fissiamo l'attenzione sui moti in cui è costante λ , mentre μ è una funzione periodica del tempo. A questi corrispondono per la particella gravitante altrettanti moti su ellissoidi di rotazione intorno all'asse x , la velocità angolare del semipiano p rotante essendo espressa dalla funzione periodica

$$\dot{\vartheta} \equiv \varphi(t) = \frac{c^2 \gamma}{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)}.$$

Se

$$\omega = \frac{c^2 \gamma}{\tau(\lambda^2 - c^2)} \int_0^\tau \frac{dt}{c^2 - \mu^2}$$

denota il valore medio di $\dot{\vartheta}$ in un periodo τ , per il teorema di Fourier, $\varphi(t)$ si può rappresentare nella forma

$$\varphi(t) = \omega + \psi(t),$$

in cui la funzione periodica $\psi(t)$ ha per integrale una funzione $\psi^*(t)$ dello stesso periodo τ . La legge di variazione di ϑ è allora espressa da

$$\vartheta = \omega t + \vartheta_0 + \psi^*(t).$$

Il moto di P non è quindi periodico se non per condizioni iniziali eventuali che annullino ω , così che è da presumere che la traiettoria sia ovunque densa (*überall dicht*) sull'ellissoide.

Analoghe considerazioni valgono per i moti iperbolici del problema ridotto cui corrispondono moti della particella gravitante su una falda di iperboloide di rotazione intorno alla retta dei centri.

Meccanica. — *Sulla trascurabilità dei lavori di deformazione del taglio e dello sforzo assiale, rispetto a quello dei momenti.* Nota di O. ZANABONI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio G. FUBINI.

Le applicazioni pratiche della Scienza delle Costruzioni sono dominate dalla consuetudine di trascurare i lavori di deformazione del taglio e dello sforzo assiale in confronto a quelli dei momenti flettenti e torcenti; lo stesso presupposto si pone frequentemente alla base anche di importanti deduzioni teoriche, delimitate beninteso nel campo della Scienza delle Costruzioni, come nello stesso campo resta naturalmente delimitata la presente Nota.

Mentre si hanno in genere idee abbastanza chiare sulle relazioni intercedenti tra i lavori dello sforzo assiale e del momento flettente, e sui casi in cui l'uno può trascurarsi di fronte all'altro, non altrettanto si può dire nei riguardi del taglio.

Si ritiene di solito che basti avere a che fare con una struttura esile per potere senz'altro mettere in conto la sola azione del momento flettente; invece, per poco che si rifletta, si trova che questa condizione non è sufficiente.

Sia ad esempio una mensola di sezione costante soggetta ad un diagramma di carico espresso da $p = ax^r$, ove x è l'ascissa con origine nell'estremo libero.

Un calcolo assai facile mostra che il rapporto tra il lavoro del taglio e quello del momento è espresso, con notazioni evidenti, da

$$\chi \frac{E}{G} \left(\frac{\rho}{l} \right)^2 \frac{(2r+5)(r+2)^2}{2r+3}.$$

Qualunque sia il rapporto di snellezza $\frac{l}{\rho}$, è chiaro che si può assegnare ad r un tale valore da rendere tanto grande quanto si vuole il primo lavoro rispetto al secondo.

Nelle stesse condizioni, se calcoliamo il rapporto tra le frecce dovute al taglio ed al momento, si trova $\chi \frac{E}{G} \left(\frac{\rho}{l} \right)^2 (r+4)$: ed anche qui si osserva che, crescendo r , la freccia dovuta al taglio può divenire preponderante.

Il caso citato non è unico: si pensi infatti ad una ordinaria trave semplicemente appoggiata caricata da una forza concentrata.

(1) Nella seduta del 3 giugno 1938.

Se spostiamo il carico, quanto più esso si avvicina ad un appoggio, tanto più cresce il taglio e diminuisce il momento: verrà un istante in cui il lavoro dell'uno comincerà a divenire maggiore di quello dell'altro anche se la trave è esile.

Infine sia una struttura in cui il diagramma del momento flettente assuma un andamento ondulatorio.

Se mantenendo invariati i valori estremi di esso aumentiamo il numero delle inversioni di segno, veniamo ad aumentare pure il valore assoluto medio del taglio, ed il suo lavoro potrà diventare superiore a quello del momento.

I precedenti esempi mostrano concordemente che per il caso del taglio, come per lo sforzo assiale, non si può parlare di trascurabilità del lavoro se, insieme all'esilità della struttura, non si considera il tipo di diagramma di carico.

Gli stessi esempi mostrano pure a questo riguardo che i carichi che possono dar luogo a dubbi sono fortunatamente fuori di ogni probabilità pratica.

Comunque, specie di fronte alle conseguenze teoriche, sembra opportuno chiarire la questione indagando più d'avvicino quali sono gli elementi che intervengono ad alterare i rapporti abituali tra i lavori delle varie componenti dell'azione interna, e ciò si intende fare colla presente Nota.

1. Consideriamo una struttura piana, e da essa isoliamo un tronco mediante due sezioni normali infinitamente vicine, introducendo esplicitamente le azioni interne che si sono liberate per effetto dei tagli praticati.

Se esprimiamo le condizioni cui debbono soddisfare forze esterne ed azioni interne per conservare in equilibrio il tronco considerato, troviamo notoriamente che il taglio è la derivata del momento rispetto all'arco di asse baricentrico, e che taglio e forza assiale dipendono da entrambe le componenti dei carichi esterni.

In altre parole si può sempre trovare una distribuzione di forze esterne che generi nella struttura data un taglio ed uno sforzo assiale prefissati a piacere.

Queste azioni interne sono dunque tra di loro indipendenti; come risultano di conseguenza indipendenti tra di loro il momento flettente e lo sforzo normale.

In modo del tutto analogo si potrà considerare l'equilibrio di un tronco di struttura non più piana, e le equazioni di rotazione ci mostreranno che gli sforzi taglienti non sono che combinazioni lineari delle derivate dei momenti e dei momenti stessi, mentre le equazioni di traslazione metteranno in luce la completa indipendenza di queste azioni interne dallo sforzo normale.

Tale parallelismo tra i due tipi di strutture ci consentirà di trattare per semplicità solo quelle piane, e di estendere le conclusioni anche a quelle spaziali.

2. Sia dunque una struttura piana lungo il cui asse di lunghezza l , sia stabilita una ascissa s con origine ad un estremo dell'asse stesso.

I lavori di formazione delle tre componenti dell'azione interna si esprimono, con notazione evidente, come segue:

$$\int_0^l \chi \frac{T^2 ds}{2 GF} \quad \int_0^l \frac{N^2 ds}{2 EF} \quad \int_0^l \frac{M^2 ds}{2 EJ}.$$

Trattandosi di quantità positive possiamo invocare il primo teorema della media ed estrarre dagli integrali tutti i termini di natura geometrica.

I tre lavori possono dunque esprimersi anche con:

$$\left(\frac{\chi}{2 GF}\right)_1 \int_0^l T^2 ds \quad \left(\frac{1}{2 EJ}\right)_2 \cdot \int_0^l \frac{J}{F} N^2 ds \quad \left(\frac{1}{2 EJ}\right)_3 \cdot \int_0^l M^2 ds$$

dove si sono messi in evidenza tra parentesi gli opportuni valori medi che rendono uguali le nuove espressioni alle precedenti.

Se si pone mediamente $\chi = 1, 2$; $\frac{E}{G} = 2, 5$; e se si introduce il raggio d'inerzia ρ della sezione, i fattori che affettano i vari integrali divengono:

$$3 \rho_1^2 \left(\frac{1}{2 EJ}\right)_1 \quad \left(\frac{1}{2 EJ}\right)_2 \quad \left(\frac{1}{2 EJ}\right)_3.$$

Le quantità tra parentesi dipendono da tre valori medi diversi di EJ , e poichè questa è quantità di natura geometrica, non legata alle forze esterne, è presumibile che tali valori medi siano abbastanza vicini tra di loro da potersi ritenere paragonabili.

Se ciò non fosse sarebbe sempre possibile introdurre in loro posto, a seconda della tesi cui si vuol giungere, i valori minimi o massimi che per essi si verificano entro l'intervallo.

In tal modo il confronto tra i tre lavori di deformazione è ricondotto al confronto delle tre quantità:

$$3 \rho_1^2 \cdot \int_0^l T^2 ds \quad \int_0^l (\rho N)^2 ds \quad \int_0^l M^2 ds.$$

3. Consideriamo dapprima i lavori di deformazione del taglio e del momento flettente, e per essi il primo e l'ultimo dei tre precedenti termini.

Qualunque possa essere il diagramma del momento flettente, esso potrà sempre considerarsi come un tratto di una funzione periodica, estendentesi anche oltre l'intervallo $0 \div l$, e perciò esprimibile mediante una serie di Fourier.

L'arbitrarietà colla quale tale funzione può essere assegnata al di fuori dell'intervallo che ci interessa, farà sì che lo sviluppo in serie potrà effettuarsi in infiniti modi diversi: di tale circostanza possiamo valerci per semplificare di quanto è possibile le nostre espressioni analitiche.

Perciò notiamo che se il diagramma del momento viene considerato come la quarta parte di un'onda periodica oscillante attorno all'asse delle ascisse, lo sviluppo in serie trigonometrica non conterrà il termine costante, e sarà composto di soli seni o di soli coseni a seconda che l'origine degli argomenti si ponga nel punto o oppure nel punto l .

Dato che i risultati non dipendono da questa scelta, potremo scrivere nel modo più generale:

$$M = \sum a_n \sin \frac{\pi ns}{2l}$$

ove naturalmente s varia soltanto tra 0 ed l .

I diagrammi di M che noi consideriamo sono continui, o quanto meno sono scindibili in un numero finito di tratti continui.

Si trovano dunque soddisfatte per ogni tratto le condizioni volute per la derivabilità termine a termine⁽¹⁾, cosicchè, in complesso esse risultano valedoli per tutto $0 \div l$.

Senza ledere la generalità possiamo porre direttamente:

$$T = \frac{\pi}{2l} \sum n a_n \cos \frac{\pi ns}{2l}$$

e le serie che abbiamo poste al 2° membro delle precedenti uguaglianze rappresentano dunque per tutto l'intervallo considerato le funzioni M, T , tranne eventualmente qualche punto singolare.

Poichè noi studiamo soltanto le proprietà integrali di M, T , tali eccezioni non hanno alcuna importanza.

Dalle posizioni fatte segue, come è noto⁽²⁾:

$$\int_0^l M^2 ds = \frac{l}{2} \sum a_n^2 \quad \int_0^l T^2 ds = \frac{l}{2} \cdot \frac{\pi^2}{4l^2} \cdot \sum n^2 a_n^2.$$

Il rapporto che ci interessa diviene dunque:

$$7,5 \left(\frac{\rho_1}{l} \right)^2 \frac{\sum n^2 a_n^2}{\sum a_n^2}.$$

Come risulta evidente dalla struttura della formula, il valor minimo di questo rapporto si ottiene facendo $a_1 = 1$, e tutti i restanti termini uguali

(1) L. TONELLI, *Serie trigonometriche*, Edizione Zanichelli, p. 349 e sg.

(2) L. TONELLI, *Serie trigonometriche*, p. 231.

a zero; vale a dire prendendo in considerazione un diagramma del momento costituito da un quarto di senoide.

Se invece il diagramma di M è un tratto di senoide che passa per lo zero r volte, il rapporto tra i due lavori è $7,5 r^2 \left(\frac{\rho_1}{l}\right)^2$; e, data l'arbitrarietà di r , si comprende che il lavoro del taglio può rendersi preponderante su quello del momento anche se il rapporto di snellezza $\frac{l}{\rho_1}$ è molto grande.

Più in generale si potrà asserire che questo fatto si deve verificare ogni volta che nel diagramma del momento prevalgono numericamente le armoniche superiori su quelle di base; od anche quando il diagramma si discosta notevolmente dal quarto di senoide.

Tale sarebbe un momento che invertisse il proprio segno parecchie volte, oppure che seguisse d'avvicino l'asse delle ascisse per poi assumere rapidamente, entro breve tratto, un elevato valore finale.

Gli esempi citati all'inizio di questa Nota appartengono precisamente a queste categorie.

La probabilità che nei casi pratici il lavoro del taglio divenga apprezzabile di fronte a quello del momento è, come facilmente si comprende, grandemente diminuita dalla forte snellezza delle strutture che ordinariamente si considerano.

Per stabilire degli ordini di grandezza, se esaminiamo una trave prismatica di sezione rettangolare di altezza pari a $\frac{1}{10}$ della luce (per la quale $3 \left(\frac{\rho_1}{l}\right)^2 = \frac{1}{400}$) e immaginiamo tre diversi diagrammi del momento proporzionali a $\left(\frac{s}{l}\right)^r$; $e^{r \frac{s}{l}}$; $\sin \frac{\pi r s}{2 l}$, un facile calcolo ci dimostrerebbe che bisognerebbe assegnare ad r ordinatamente i tre valori 6; 6,3; 4, affinché il lavoro del taglio divenga la decima parte di quello del momento.

Come si vede si tratta di condizioni di carico che potrebbero intervenire soltanto in speciali ricerche teoriche: nei casi pratici esse sono da escludere, cosicchè i procedimenti abituali di calcolo sono pienamente accettabili.

Per ricavare un valore abbastanza approssimato del rapporto dei due lavori, da servire in pratica per la valutazione dell'errore, suddividiamo i possibili diagrammi del momento in due categorie: quelli tipo mensola che assimiliamo ad $\frac{1}{4}$ di senoide, e quelli tipo trave che assimiliamo ad $\frac{1}{2}$ di senoide.

Nei due casi i valori del rapporto divengono rispettivamente:

$$7,5 \left(\frac{\rho_1}{l}\right)^2 \quad 30 \left(\frac{\rho_1}{l}\right)^2.$$

4. Il confronto tra i lavori dello sforzo assiale e del momento flettente riesce meno agevole per la completa indipendenza tra queste due componenti dell'azione interna, e non può condursi che trattando un caso poco probabile ed eminentemente sfavorevole, per trarne delle conclusioni generali.

Se di una struttura piana consideriamo la curva delle pressioni, e la sua eccentricità η in ogni sezione, il momento risulta espresso da $M = N\eta$ per modo che siamo condotti a confrontare gli integrali delle funzioni $(N\rho)^2$ ed $(N\eta)^2$.

Fintantochè la curva delle pressioni resta compresa entro la striscia delimitata dal diametro trasversale dell'ellisse centrale d'inerzia delle varie sezioni, il lavoro di N supera quello di M , essendo in ogni punto $\eta \leq \rho$.

A mano a mano che la curva delle pressioni esce da tale striscia, tende a verificarsi sempre più spiccatamente il fatto opposto.

Per esaminare un caso assai sfavorevole, supponiamo che la curva delle pressioni sia perfettamente centrata per tutto l'asse del corpo, tranne per un breve tratto nel quale assuma l'eccentricità $\eta = n\rho$.

Se nel tratto considerato il lavoro di N è la k^{ma} parte del corrispondente lavoro che si genera in tutto il corpo, avremo evidentemente che il totale lavoro del momento è dato da $\frac{L_N}{k} n^2$, per modo che il rapporto $\frac{L_N}{L_M}$ è espresso da $\frac{k}{n^2}$.

Orbene se facciamo per esempio $k = 10$, cioè se supponiamo che il momento sia diverso da zero per un così breve tratto che in esso lo sforzo assiale compia un lavoro pari a $\frac{1}{10}$ del suo lavoro totale, e se contemporaneamente vogliamo che questo sia $\frac{1}{10}$ di quello del momento, dovremo fare $n = 10$.

Questo vuol dire che, se per un tratto che si può ritenere dell'ordine della decima parte soltanto del totale sviluppo del corpo, la curva delle pressioni è eccentrica di 10ρ (cioè di circa tre volte l'altezza per una sezione rettangolare) il lavoro del momento è già dieci volte superiore a quello dello sforzo assiale.

Notiamo che non solo una simile eccentricità è comunissima, ma di norma si verifica per un tratto ben maggiore del decimo dell'asse, cosicchè si conclude che nella maggior parte dei casi il lavoro dello sforzo assiale è ben largamente trascurabile di fronte a quello del momento.

La probabilità che questo fatto si verifichi, come ognuno vede, è tanto maggiore quanto più la struttura è esile.

L'eventualità opposta può verificarsi soltanto se la curva delle pressioni segue molto davvicino l'asse geometrico della struttura.

5. Stabilite le precedenti relazioni di grandezza tra i tre lavori di deformazione fondamentali, immaginiamo che la generica condizione di carico cui è sottoposta la struttura in esame sia dovuta alla sovrapposizione di due arbitrari sistemi di forze.

Ciascuno dei totali lavori di deformazione di M, N, T , si decompone in tre termini: due lavori effettivi ed uno misto.

In genere tra i nuovi sei lavori effettivi, divisi in due gruppi di tre (un gruppo per ognuna delle due parziali condizioni di carico) valgono le stesse relazioni di grandezza che sussistono per i tre lavori totali di M, N, T .

Ne consegue che esse relazioni sono pure vevoli per i lavori misti.

Questa deduzione contiene lo stesso grado di generalità di tutte le precedenti e, dati i legami intercedenti tra i lavori misti ed i lavori virtuali, e tra questi e gli spostamenti elastici, si conclude che, sotto le note larghissime condizioni, questi ultimi sono dovuti quasi totalmente ai momenti flettenti, e soltanto in minima parte al taglio ed allo sforzo assiale.

Abbiamo già dato all'inizio un esempio di un caso in cui, divenendo preponderante il lavoro del taglio, diviene anche preponderante la freccia ad esso dovuta.

Alla stessa maniera si potrà dire che, in una trave ordinaria a semplici appoggi, le frecce nelle immediate vicinanze degli estremi sono fortemente influenzate dall'azione del taglio.

Per quanto dicemmo al § 1 le nostre conclusioni si estendono alle strutture nello spazio, introducendo anche l'effetto del momento torcente: l'effetto di quest'ultimo risulta di grandezza paragonabile a quella del momento flettente.

I precedenti sviluppi giustificano dunque pienamente i procedimenti consuetudinari della Scienza delle Costruzioni: essi consentono inoltre di dedurre altre conseguenze, meno immediate ma non meno importanti, che intendiamo di sviluppare in una prossima Nota.

Astronomia. — *La radiazione del Sole a Roma dal 1933 al 1936.* Nota di G. L. ANDRISSI, presentata⁽¹⁾ dal Socio G. ARMELLINI.

Sin dal 1876 il R. Osservatorio del Campidoglio iniziò l'esame quotidiano del diametro orizzontale del Sole; dal 1929 a tali osservazioni vennero aggiunte le statistiche quotidiane delle macchie solari e quindi le osservazioni dell'irradiazione solare eseguite con un ottimo piroeliometro a pila termoelettrica, tipo Kipp. Di queste osservazioni piroeliometriche vennero pubblicati gli anni 1929, 1930, 1931 e 1932 e venne descritto anche il piroeliometro usato, ed il modo di osservazione⁽²⁾.

L'esperienza consigliò ben presto a compiere queste osservazioni piroeliometriche solo nei giorni completamente sereni in modo di avere valori omogenei; come pure ad eseguirle, presso a poco, a mezzogiorno *vero*, sia perchè il Sole raggiunge allora la maggiore altezza, sia perchè la variazione dell'altezza durante il tempo richiesto dalle osservazioni diviene trascurabile, ciò che rende più facile e più sicura la riduzione dei risultati tenendo conto dell'assorbimento atmosferico.

L'apparecchio Kipp da noi usato permette di misurare una variazione d'irradiazione di un millesimo di calorie-grammi per minuto primo e per centimetro quadrato, e mediante un disco a « revolver » portante quattro filtri di luce è possibile misurare l'irradiazione col filtro azzurro, giallo, rosso e rosso cupo.

Le osservazioni comprendono quindi la misura della radiazione totale del Sole, cioè senza filtro, e con i quattro filtri ora detti.

Secondo i dati forniti dalla Casa costruttrice e controllati da ricerche di laboratorio, una divisione del galvanometro corrisponde ad una irradiazione di 0.0202 calorie-grammi per minuto primo e per centimetro quadrato di superficie, normalmente esposta.

Le osservazioni, iniziate come dicemmo al Campidoglio nel luglio 1929 vennero continuate alla nuova sede del R. Osservatorio a Monte Mario dal 20 aprile 1935, e furono sempre compiute dal dott. Andrisi.

(1) Nella seduta del 3 aprile 1938.

(2) G. ARMELLINI-G. ANDRISSI, *La radiazione del Sole nel 1929 e nel 1930.* Questi « Rendiconti », 1933, vol. XVII, ser. 6^a ID., *La radiazione del Sole nel 1931 e nel 1932.* Questi « Rendiconti », vol. XVII, ser. 6^a.

Nella presente Nota si riportano le osservazioni eseguite dal 1933 al 1936, mentre in una futura Nota riporteremo le osservazioni compiute nel 1937 e 1938. Completandosi con il 1938 il primo decennio di osservazioni continuate e sistematiche della irradiazione solare compiute al R. Osservatorio di Roma, rimandiamo alla prossima Nota la discussione completa dei risultati, sia per quanto riguarda la radiazione solare nelle varie lunghezze d'onda; sia per il valore dell'assorbimento atmosferico che da tali osservazioni si può dedurre.

Nella tabella, indichiamo con T, A, G, R, RC, le deviazioni osservate dell'ago del galvanometro in corrispondenza alla irradiazione *totale* del Sole ed a quella filtrata con filtro *azzurro, giallo, rosso e rosso cupo*, tenendo presente che ogni unità corrisponde a 0.0202, calorie-grammi per minuto primo e centimetro quadrato.

TABELLA.

Data	T	A	G	R	RC	Data	T	• A	G	R	RC
1933						1933					
12-I	55.7	19.2	45.3	36.5	32.9	18-VII	60.1	19.4	47.2	35.9	31.4
1-II	53.4	18.6	42.9	34.1	30.3	20 »	58.4	19.3	42.8	34.8	29.3
9 »	57.3	19.3	44.1	34.7	31.3	21 »	54.1	15.5	42.5	32.3	28.0
14 »	59.5	17.3	47.1	36.3	33.3	22 »	55.6	16.2	41.9	31.1	27.1
17 »	64.1	20.6	51.6	40.0	35.6	24 »	49.3	15.9	39.7	30.9	26.4
18 »	60.4	18.2	45.7	35.7	32.9	25 »	54.0	15.8	33.3	32.6	27.8
1-III	56.7	20.2	45.1	45.8	32.3	26 »	50.6	16.2	40.1	31.6	28.3
11 »	55.0	19.4	44.1	35.2	31.3	27 »	51.0	15.5	40.0	30.4	26.5
15 »	54.5	19.0	44.0	34.9	31.0	14-VIII	47.0	15.6	36.1	27.5	24.2
17 »	54.5	18.1	43.7	34.5	30.7	17 »	54.2	16.5	42.1	31.3	27.5
30 »	60.6	22.5	48.5	37.8	33.1	18 »	51.2	16.2	41.2	30.4	26.9
4-IV	53.6	16.4	43.0	34.1	30.7	21 »	55.3	18.4	42.3	32.9	28.0
5 »	61.9	19.0	37.2	35.8	31.9	23 »	50.5	16.2	37.2	29.2	25.8
17-V	54.1	16.6	38.6	30.8	27.0	25 »	51.7	15.8	40.8	31.6	28.3
20 »	60.1	20.2	46.6	36.9	32.4	28 »	57.8	18.4	45.0	34.7	30.7
23 »	57.3	18.5	45.3	34.7	30.0	29 »	60.4	20.0	44.5	33.8	30.2
3-VI	60.5	21.1	46.6	35.9	31.4	4-IX	56.4	17.0	42.6	33.0	28.9
8 »	56.0	19.7	41.2	31.9	27.9	5 »	56.5	18.8	45.7	34.9	30.5
9 »	62.5	22.5	48.0	37.3	32.1	6 »	51.6	16.8	40.8	31.5	26.5
10 »	58.7	19.6	43.6	33.4	29.4	7 »	52.7	18.4	39.9	31.7	27.7
23 »	60.0	19.3	44.9	33.8	28.6	8 »	53.2	17.8	42.4	33.3	29.8
28 »	59.4	19.7	44.2	34.2	29.7	16 »	59.9	19.1	45.9	34.5	30.7
4-VII	60.4	28.4	46.1	34.7	31.7	19 »	50.8	17.7	40.5	31.4	27.3
5 »	59.3	18.4	40.5	35.3	29.6	26 »	50.0	16.9	41.3	29.4	25.6
8 »	53.0	16.0	43.1	34.8	30.0	6-X	49.0	15.6	38.6	28.6	25.1
10 »	56.2	19.4	44.6	33.9	29.8	10 »	56.5	18.0	44.6	33.1	27.3
11 »	56.3	18.4	44.2	33.0	27.6	16 »	55.2	19.1	48.8	35.8	31.6
12 »	54.3	18.0	42.3	30.0	27.8	19 »	59.9	19.7	45.0	36.8	31.8
14 »	57.0	19.4	44.4	33.3	29.0	20 »	58.1	17.9	43.9	33.4	28.2
15 »	56.5	17.9	43.3	43.3	32.4	14-XI	51.6	15.9	42.2	33.7	29.5
17 »	61.1	20.6	47.5	35.5	31.4	20 »	60.2	19.6	48.6	39.6	34.1

Segue: TABELLA.

Data	T	A	G	R	RC	Data	T	A	G	R	RC
1933						1934					
21-XI	54.5	16.7	42.1	34.4	31.9	25-V	56.7	19.2	43.0	33.0	29.2
1934						26 »	57.8	18.4	44.6	33.6	29.4
3-I	52.8	20.4	43.6	34.4	30.4	29 »	61.9	21.6	47.5	36.4	31.9
8 »	59.6	18.6	49.6	39.1	34.9	30 »	56.0	18.3	42.3	32.8	28.5
9 »	58.2	17.5	46.5	38.5	33.3	8-VI	55.4	17.9	46.2	31.9	28.9
11 »	52.1	14.0	43.0	35.0	30.8	11 »	56.5	18.0	45.1	35.1	31.8
16 »	57.5	17.3	46.8	34.7	31.5	14 »	57.5	17.9	44.8	34.5	30.7
17 »	58.1	18.6	47.4	37.4	33.2	19 »	59.5	17.6	45.7	34.5	30.6
26 »	57.2	17.1	46.4	36.9	32.4	21 »	63.3	—	48.4	36.5	32.7
27 »	56.1	16.0	43.7	35.7	32.4	22 »	58.2	16.5	44.0	32.5	29.0
29 »	57.8	17.1	47.1	37.3	34.3	23 »	52.5	19.8	40.8	32.8	28.7
31 »	53.5	16.2	39.8	37.8	29.6	25 »	54.8	17.1	41.3	31.0	27.9
6-II	57.3	19.7	45.2	36.6	32.7	26 »	55.6	17.5	42.8	32.3	29.3
7 »	60.9	17.8	48.6	37.4	33.4	2-VII	57.7	19.5	42.9	33.0	29.2
8 »	60.4	19.4	45.7	37.9	33.6	3 »	54.9	18.4	39.9	30.9	26.9
13 »	61.0	19.5	50.0	38.4	34.9	7 »	55.8	18.7	42.2	32.2	28.2
14 »	64.0	22.5	49.9	39.7	35.2	9 »	53.6	18.3	41.1	31.9	27.6
15 »	57.1	17.6	46.0	37.3	33.3	10-VIII	50.2	17.6	38.2	29.7	26.7
16 »	60.0	18.3	45.1	36.5	31.8	11 »	56.2	21.5	42.5	33.5	29.8
17 »	59.4	20.6	47.8	37.8	33.0	12 »	49.8	18.3	37.0	28.5	25.0
19 »	54.2	17.1	43.3	33.5	29.5	13 »	54.0	20.0	40.5	32.0	28.0
7-III	48.4	15.2	37.5	29.5	27.2	14 »	57.7	21.6	44.1	33.8	29.6
16-IV	58.5	19.3	47.3	35.6	31.7	16 »	62.0	23.0	48.5	37.5	32.5
17 »	57.9	17.6	45.1	33.6	30.0	17 »	55.6	20.6	43.1	33.6	29.6
1-V	52.6	17.5	39.8	31.8	31.6	18 »	60.6	22.1	47.1	36.6	31.6
2 »	53.3	16.7	40.4	31.2	27.5	19 »	53.2	19.4	41.6	32.6	28.6
8 »	51.3	14.6	37.6	28.9	25.1	21 »	56.5	21.3	43.3	33.3	29.8
21 »	56.1	17.7	44.4	34.2	29.2	24 »	61.7	22.5	47.0	46.5	32.5
22 »	55.0	17.8	41.3	31.8	28.3	26 »	61.2	21.5	46.0	35.5	30.7
23 »	58.7	19.0	43.8	34.3	29.7	27 »	58.4	21.9	45.7	34.2	30.9
						30 »	52.3	19.8	40.8	31.8	30.8

Segue: TABELLA.

Data	T	A	G	R	RC	Data	T	A	G	R	RC
1934						1934					
31-VIII	57.0	21.9	44.2	35.4	30.9	1-XI	53.7	16.1	42.8	33.5	28.7
1-IX	55.1	21.1	41.9	33.1	28.6	2 »	48.0	14.9	41.3	32.8	29.0
2 »	59.5	21.0	46.0	35.8	32.9	6 »	55.4	16.3	42.8	31.8	29.3
3 »	57.9	20.3	44.3	33.7	29.8	12 »	63.0	18.8	49.0	27.8	33.8
6 »	63.6	24.5	46.5	37.5	33.5	13 »	55.3	15.3	43.1	32.5	29.1
7 »	58.3	20.8	45.0	34.8	31.0	19 »	64.7	22.5	50.7	39.7	35.7
10-X	59.0	20.3	47.3	36.1	32.2	23 »	58.5	19.0	42.5	33.5	28.7
13 »	59.5	20.9	42.5	33.1	29.9	24 »	54.4	18.4	41.9	32.9	28.9
16 »	58.8	21.1	45.1	35.3	31.5	26 »	49.4	15.7	37.7	29.7	26.5
17 »	52.1	18.0	39.0	31.0	26.5	27 »	56.4	16.6	45.6	35.1	30.6
20 »	54.4	19.5	42.1	32.8	29.0	9-XI	52.3	15.1	40.6	31.9	28.1
24 »	54.7	17.6	43.6	32.8	29.0	10 »	56.8	18.3	45.8	34.8	30.9
25 »	52.8	18.2	42.2	31.8	27.5	24 »	54.9	19.5	44.5	36.0	32.3
29 »	56.7	21.2	44.2	34.7	30.9	26 »	57.0	17.9	44.9	36.1	32.4
30 »	54.7	18.0	41.2	31.2	27.2	27 »	55.8	16.1	43.1	34.1	30.6
1-XI	57.3	21.3	43.3	32.8	29.3	28 »	57.3	20.9	46.7	36.5	32.7
3 »	61.4	21.2	47.2	36.2	32.0	29 »	51.9	17.8	39.3	31.8	28.0
4 »	57.5	18.0	46.0	35.0	31.2	18-XII	56.0	18.8	46.3	36.3	32.3
5 »	58.3	21.0	45.5	35.4	32.0	22 »	49.3	17.3	39.3	32.2	28.8
7 »	55.8	18.6	45.1	35.0	31.0	26 »	54.6	18.5	43.2	35.0	31.4
8 »	54.1	19.5	40.5	32.0	28.5	28 »	51.4	16.9	40.6	32.5	29.2
12 »	50.2	16.4	37.9	30.8	26.4	31 »	54.8	20.0	44.2	35.6	32.2
13 »	51.8	18.9	42.0	32.8	28.6						
18 »	49.4	15.7	39.5	31.2	27.7	1935					
19 »	54.8	18.5	42.3	31.8	29.1						
22 »	58.8	18.4	44.5	34.8	30.4	3-I	52.4	18.7	44.4	35.7	31.9
24 »	50.5	14.2	40.2	31.0	27.4	4 »	60.5	19.0	48.4	37.8	33.0
26 »	56.7	20.1	45.7	34.5	30.6	9 »	50.0	14.7	39.5	31.7	28.6
27 »	51.1	15.2	41.2	30.2	26.9	15 »	59.2	19.3	47.3	37.8	33.6
28 »	50.6	16.8	38.2	30.0	26.8	17 »	57.5	19.6	44.4	36.6	32.1
29 »	50.8	16.9	39.4	30.9	27.4	19 »	55.7	18.6	44.5	35.4	31.4

Segue: TABELLA.

Data	T	A	G	R	RC	Data	T	A	G	R	RC
1935						1935					
23-I	52.2	18.9	41.2	33.7	30.7	14-VI	55.9	18.1	39.9	30.1	36.3
24 »	56.5	18.4	44.2	35.4	32.6	19 »	56.0	17.2	40.0	30.2	25.8
25 »	55.6	20.8	43.6	35.8	32.6	24 »	57.2	16.1	46.0	30.3	26.5
30 »	59.7	21.5	46.8	37.0	33.5	26 »	58.6	18.3	41.6	31.6	27.1
31 »	56.7	20.7	45.9	37.5	33.4	28 »	54.9	17.8	39.5	30.0	26.5
12-II	62.8	19.4	49.4	38.4	34.5	30 »	53.9	17.9	41.7	29.9	24.7
18 »	50.1	17.3	37.3	31.3	28.3	2-VII	58.0	17.8	41.6	32.2	28.0
19 »	53.2	18.4	42.4	34.1	30.9	3 »	55.6	17.7	40.1	29.9	26.7
20 »	56.0	19.0	42.5	34.0	30.5	12 »	56.2	21.2	42.2	32.7	30.4
27 »	60.8	21.3	47.8	37.5	33.5	17 »	53.0	17.9	39.9	30.4	26.9
4-III	58.1	21.1	45.3	36.6	33.1	18 »	52.1	16.9	38.7	28.7	24.7
6 »	57.0	19.0	45.0	35.5	—	29 »	57.0	17.5	41.4	30.5	26.8
8 »	61.8	21.8	49.3	38.3	34.0	7-VIII	55.4	19.4	44.7	34.0	30.6
14 »	62.8	22.3	49.3	38.8	33.8	21 »	58.1	18.3	44.9	32.7	28.1
15 »	53.4	17.4	42.3	33.5	28.5	17-IX	58.7	19.9	43.8	33.7	29.5
21 »	61.4	21.3	46.7	37.0	33.0	20 »	59.0	16.6	45.0	33.4	28.2
25 »	64.7	22.6	50.8	40.9	36.7	21 »	58.0	22.0	44.3	35.0	31.7
26 »	64.2	22.2	49.4	38.7	34.7	23 »	58.9	18.8	43.6	33.7	29.8
27 »	55.0	17.2	41.5	33.0	29.0	28 »	59.8	22.6	47.2	36.1	31.9
28 »	59.7	18.6	43.8	34.8	35.8	29 »	59.9	18.0	45.9	34.0	28.6
29 »	60.4	19.9	47.3	37.4	33.1	17-X	46.8	15.2	37.6	28.3	24.0
30 »	62.1	19.2	49.5	38.1	33.2	14-XI	51.8	15.7	38.7	30.2	26.6
11-IV	60.9	19.1	47.9	34.7	31.8	19 »	56.8	19.1	42.8	31.3	28.5
12 »	59.0	19.9	47.1	35.7	31.5	28 »	59.1	20.6	41.7	35.5	30.3
20 »	60.0	18.2	44.8	33.8	29.5						
23 »	56.1	16.6	40.8	30.6	26.6	1936					
3-V	65.1	21.2	49.0	38.0	31.2						
7-VI	58.6	17.9	43.9	32.4	28.2	8-II	55.0	14.4	45.3	34.6	30.4
11 »	58.8	18.7	42.1	31.9	27.8	11-VI	58.7	16.8	45.7	48.0	28.8
12 »	63.0	22.2	46.9	36.8	32.6	9-VII	58.0	16.0	44.6	31.7	27.9
13 »	61.5	20.7	45.5	35.0	30.9	15 »	57.3	15.7	43.3	30.0	25.8

Segue: TABELLA.

Data	T	A	G	R	RC	Data	T	A	G	R	RC
1936						1936					
18-VII	59.2	18.4	44.8	33.1	28.1	24-XI	54.7	16.3	44.6	34.5	30.2
19 »	55.6	15.3	42.3	30.8	25.6	25 »	53.5	12.0	43.8	32.5	27.3
28 »	52.5	15.7	39.9	29.3	25.0	26 »	60.5	17.7	48.0	37.0	33.0
30-VIII	61.0	17.7	46.3	34.3	28.5	30 »	60.0	20.8	46.8	36.3	32.3
2-X	57.7	—	46.3	35.6	31.3	4-XII	57.6	16.3	46.3	34.6	28.7
3 »	55.0	11.9	41.5	30.1	26.4	23 »	59.1	18.9	48.4	40.9	35.6
5 »	59.2	18.8	44.3	33.3	—	25 »	54.1	16.4	44.0	34.5	24.8
29 »	57.5	—	46.3	35.6	31.3						

Fisica (Fisica Matematica). — *Sopra un sistema di equazioni gravitazionali del primo ordine.* Nota II di G. WATAGHIN, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Nella Nota I ⁽²⁾ abbiamo studiato oltre a un sistema di equazioni gravitazionali del primo ordine le leggi di trasformazioni del trasporto parallelo dei vettori-matrici γ_μ e degli spinori ψ . Ora ci proponiamo di mostrare che i risultati precedenti sono suscettibili di notevoli semplificazioni e che le equazioni gravitazionali nel vuoto si possono ridurre alla forma seguente:

$$(23) \quad \frac{\partial \gamma_\mu}{\partial x^\sigma} - \Gamma_{\sigma\mu}^\alpha \gamma_\alpha = 0 \quad \frac{\partial \gamma^\mu}{\partial x^\sigma} + \Gamma_{\sigma\alpha}^\mu \gamma^\alpha = 0$$

ovè

$$\Gamma_{\sigma\alpha}^\mu = g^{\alpha\lambda} \Gamma_{\lambda,\sigma}^\mu = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} \left(\frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^\lambda} \right)$$

$$(15) \quad \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2 g^{\mu\nu} \cdot I.$$

Dalle (23) segue che il trasporto parallelo del vettore-matrice γ_μ è integrabile [V. (26) e (14) della Nota I].

(1) Nella seduta del 1° maggio 1938.

(2) «R. Acc. Lincei», vol. XXVI, p. 285, 1937. La numerazione delle formole nella presente Nota II è scelta in continuazione di quella della Nota I.

Prendendo in esame le dimostrazioni d'invarianza delle equazioni di Dirac, notiamo che l'introduzione della trasformazione degli spinori ψ mediante una trasformazione spinoriale isomorfa alla trasformazione di Lorentz si fa per riottenere nel nuovo sistema di coordinate le equazioni di Dirac colle medesime matrici costanti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 = \beta$ (il che non è essenziale perchè le α_i possono essere sostituite da $S\alpha_i S^{-1}$). Nel caso delle trasformazioni generali di coordinate x_1, x_2, x_3, x_4 un risultato analogo non può essere raggiunto, perchè le γ^μ si trasformano come vettori-matrici e in generale non è possibile trovare una trasformazione S del tipo $\bar{\psi} = S\psi$ tale che le nuove $\bar{\gamma}^\mu$ siano rappresentate da $\bar{\gamma}^\mu = S\gamma^\mu S^{-1}$. Infatti dalle relazioni di Tetrode (15) si deduce:

$$(24) \quad \begin{aligned} 2 \bar{g}^{\mu\nu} \cdot I &= S\gamma^\mu S^{-1} S\gamma^\nu S^{-1} + S\gamma^\nu S^{-1} S\gamma^\mu S^{-1} = \\ &= 2 S g^{\mu\nu} \cdot I \cdot S^{-1} = 2 g^{\mu\nu} \cdot I \end{aligned}$$

ossia si ha: $\bar{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$, il che non è vero in generale. Quindi una generalizzazione del concetto dello spinore al caso delle trasformazioni generali [che subordinano nell'infinitesimo un gruppo (3') dipendente da 16 parametri α_v^μ] è incompatibile colle relazioni di Tetrode.

Osservando che la covarianza del 4-vettore corrente $J^\mu = \psi^\dagger \gamma^\mu \psi$ è compatibile con diverse leggi di trasformazione delle ψ purchè collegate con convenienti trasformazioni delle γ^μ , deduciamo da considerazioni svolte

a pagina 286 Nota I che è lecito considerare le $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$ come qua-

terne di funzioni invarianti ⁽¹⁾ rispetto alle trasformazioni puntuali (3) e semplificare nel modo seguente le formole del trasporto parallelo dei vettori γ^μ e delle ψ (cfr. (13) e (9) Nota I):

$$(25) \quad \delta\gamma^\mu = \chi_{\sigma}^\mu \gamma^\sigma dx^\sigma = -\Gamma_{\sigma\sigma}^\mu \gamma^\sigma dx^\sigma$$

$$(26) \quad \begin{cases} \delta\gamma_\mu = \Gamma_{\sigma\mu}^\alpha \gamma_\alpha dx^\sigma \\ \delta\psi = \Gamma_\nu \psi dx^\nu = i A_\nu \psi dx^\nu \end{cases}$$

$$(27) \quad \Gamma_\nu = i A_\nu \cdot I = -\Gamma_\nu^+$$

(ove A_ν sono le componenti del 4-vettore potenziale elettromagnetico).

Il principale vantaggio che deriva dalle regole precedenti risulta dal fatto che nelle equazioni di Dirac gli operatori $p_\sigma = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\sigma}$ rappresentano ora

(1) Tale constatazione è stata già fatta dal C. TOLOTTI, «R. Acc. Lincei», vol. XXV, p. 380, 1937. Cfr. anche T. LEVI-CIVITA, *Diracsche und Schrödingersche Gleichungen*. «Ber. Preuss. Akad.», 1933, p. 240.

derivate covarianti di funzioni invarianti ψ e le (27) si trasformano anche come componenti di un vettore covariante.

Mentre le α_i di Dirac sono matrici costanti e perciò permutabili con operatori $\frac{\partial}{\partial x^e}$, le matrici γ^μ non commutano con le p_e . Ci sembra perciò notevole, che adottando le semplificazioni sopra indicate, si ottiene che il quadrato dell'operatore

$$(28) \quad \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{i}{\hbar} \gamma^\mu p_\mu$$

(da applicarsi a uno scalare) risulta esattamente eguale all'operatore d'Alembertiano scritto in coordinate generali (il che non succede nei casi più generali considerati da Fock, Iwanenko, Schrödinger ed altri). Infatti [tenendo conto delle (23) e delle (15)] si ottiene:

$$(29) \quad \left(\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)^2 = \sum_{\mu, \nu} \left[\gamma^\mu \gamma^\nu \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \gamma^\mu \frac{\partial \gamma^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right] = \\ = 2 g^{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - 2 g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} = \square.$$

Particolarmente utile risulta questa semplificazione formale nello studio delle varie forme possibili dell'interazione tra particelle pesanti (protone-neutrone), elettroni e neutrini.

Siano $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_4 \end{pmatrix}$ e $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_4 \end{pmatrix}$ le soluzioni di equazioni di Dirac che

rappresentano gli elettroni e i neutrini, e sia ogni componente ψ_i, φ_k invariante rispetto alle sostituzioni (3). Volendo formare una interazione invariante che sia bilineare nelle ψ, ψ^+ e nelle φ, φ^+ si può determinare quattro forme tetralineari nelle $\psi, \psi^+, \varphi, \varphi^+$:

$$(30) \quad \xi_\mu^{\epsilon\lambda\theta\sigma} \varphi_\epsilon^+ \varphi_\lambda \psi_\theta^+ \psi_\sigma \quad (\mu = 1, 2, 3, 4)$$

con coefficienti $\xi_\mu^{\epsilon\lambda\theta\sigma}$ che si trasformano come componenti di un vettore covariante:

$$(30') \quad \xi_\mu^{\epsilon\lambda\theta\sigma} = \alpha_\mu^\nu \overline{\xi_\nu^{\epsilon\lambda\theta\sigma}} \quad \text{ove} \quad \alpha_\mu^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu}.$$

È chiaro che le quattro forme (30) formano un vettore covariante, e perciò, indicando con Ψ lo spinore che rappresenta la particella pesante, possiamo considerare un'interazione invariante del tipo seguente:

$$(31) \quad G \cdot \Psi^+ \gamma^\mu \Psi \cdot \xi_\mu^{\epsilon\lambda\theta\sigma} \varphi_\epsilon^+ \varphi_\lambda \psi_\theta^+ \psi_\sigma.$$

Espressioni del tipo (31) o contenenti eventualmente un numero maggiore di fattori φ, ψ possono essere introdotte nell'interazione tra particelle leggere e pesanti per sostituire vantaggiosamente le espressioni del tipo Kono-pinski-Uhlenbeck, in quanto le note obiezioni di Fierz non sono applicabili alle espressioni del tipo (31).

Notiamo inoltre che, volendo applicare la seconda quantizzazione a tutti i campi di particelle che intervengono nelle interazioni tipo (31), è necessario limitarsi a considerare forme bilineari o quadrilneari ecc. invarianti rispetto alle trasformazioni canoniche della teoria quantica (trasformazione degli assi nello spazio Hilbertiano).

Dalle equazioni (23) seguono le equazioni gravitazionali einsteiniane nel vuoto.

Nella deduzione indicata nella Nota I, p. 288 vi è un'errore di calcolo ⁽¹⁾ (dovuto a uno scambio di indici nel tensore $R_{\rho\sigma\mu}^{\dots\alpha}$) che ci affrettiamo a rettificare in questo luogo, valendoci della nuova forma (23) delle equazioni gravitazionali del primo ordine.

Dalle (23) si ottiene col metodo noto ⁽²⁾:

$$(33) \quad (\nabla_\rho \nabla_\sigma - \nabla_\sigma \nabla_\rho) \gamma_\mu = R_{\rho\sigma\mu}^{\dots\alpha} \gamma_\alpha = 0.$$

Moltiplicando (33) una volta a sinistra e una volta a destra per γ^ρ e sommando rispetto a ρ si ottiene:

$$(34) \quad R_{\rho\sigma\mu}^{\dots\alpha} [\gamma_\alpha \gamma^\rho + \gamma^\rho \gamma_\alpha] = R_{\rho\sigma\mu}^{\dots\alpha} \cdot 2 \delta_\alpha^\rho = 2 R_{\rho\sigma\mu}^{\dots\rho} = 2 R_{\sigma\mu} = 0$$

ossia, si ottengono le equazioni einsteiniane nel vuoto [essendo $\gamma_\alpha \gamma^\rho + \gamma^\rho \gamma_\alpha = 2 \delta_\alpha^\rho$].

Ricordando il teorema di Ricci che le derivate covarianti del tensore fondamentale $g_{\mu\nu}$ sono nulle, si trova facilmente che il precedente risultato resta inalterato se si pone il secondo membro delle (23) uguale a $\lambda g_{\mu\rho}$ oppure a $\lambda \gamma_\mu \gamma_\rho$.

Osserviamo infine che nella teoria qui discussa compaiono le due forme lineari:

$$(ds) = \gamma_\mu dx^\mu \quad \text{e} \quad \gamma^\mu p_\mu = -i\hbar \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}.$$

La prima è la forma fondamentale per le proprietà metriche dello spazio-tempo mentre l'altra può essere pensata come forma metrica dello spazio duale dei momenti p_μ .

(1) Vedi anche «La Ricerca Scientifica, ser. II, a. VIII, p. 361, settembre 1937. Col procedimento indicato si ottiene una identità invece delle equazioni (34).

(2) Ved. T. LEVI-CIVITA, *Der absolute Differentialkalkül*, 1928, p. 307, formula (4, 25).

Chimica. — *Struttura di alcuni triterpeni.*⁽¹⁾ Nota preliminare di G. GIACOMELLO, presentata ⁽²⁾ da N. PARRAVANO.

In Note precedenti ⁽³⁾ furono esposti i risultati ottenuti nello studio della struttura del composto $C_{24}H_{48}$, che si ottiene per deidrogenazione con selenio o palladio dalla maggior parte dei triterpeni.

Queste ricerche permisero, non solo di stabilire l'ordinamento della molecola in seno alla cella elementare, ma altresì di dire che si trattava dell'1,8-dimetilpicene e quindi di fare delle considerazioni sulla formula proposta dal Ruzicka per i triterpeni ⁽⁴⁾.

Si trattava ora di fare un passo avanti e precisamente di stabilire se anche per queste sostanze complesse si poteva senz'altro, dalla costituzione del prodotto di deidrogenazione, risalire alla struttura fondamentale del triterpene.

Allo scopo furono eseguite delle ricerche strutturistiche su alcuni dei termini di questa classe di sostanze ⁽⁵⁾.

Sui singoli composti furono eseguiti dei fotogrammi oscillatori e dei diagrammi Weissenberg intorno ai tre assi cristallografici: furono così determinate le dimensioni delle celle elementari ed i gruppi spaziali nei quali le singole sostanze cristallizzano. Nella tabella I sono riportati i risultati ottenuti.

Nella colonna 1 sono riportati i nomi delle sostanze colla relativa formula e peso molecolare, nella 2 il gruppo spaziale, nella 3 il numero delle molecole contenute nella cella elementare, nella 4 le grandezze caratterizzanti la cella elementare, nella 5 il peso molecolare determinato in base alla densità della sostanza ed ai dati roentgenografici ed infine nella 6 la letteratura riguardante i singoli termini.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 3 giugno 1938.

(3) GIACOMELLO, « Ind. Sacc. », novembre 1937; ID., « Zeitschr. f. Kristallographie », 99, 89 (1938).

(4) RUZICKA, GOLDBERG e HOFMANN, « Helv. Chim. Acta », 20, 325 (1937).

(5) Le sostanze furono preparate nel laboratorio del prof. Ruzicka di Zurigo che sentitamente ringrazio per l'ospitalità accordatami.

TABELLA I.

S o s t a n z a	Gruppo spaziale	N° delle mole- cole contenute nella cella	Dimensioni della cella				Densità ^e Peso Molecolare Sperimentale (<i>m</i>)	Indicazioni bibliografiche riguardanti le singole sostanze
			<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	β		
I 1-8 dimetilpicene C ₂₄ H ₁₈ p. m. calc. = 306,2	P ₂₁	2	8,16	6,36	15,01	96°	<i>d</i> = 1,316 <i>m</i> = 308,7	Giacomello, « Z. G. Kristall » 99 89 (1938) Ruzicka e coll, « Helv. Chim. Acta » 17 442 (1934) Ruzicka-Hofmann, « Helv. Chim. Acta » 20 1155 (1937)
II cloruro di acetiloleanolite C ₃₂ H ₄₉ O ₃ Cl p. m. calc. = 516,9	P ₂₁ 2 ₁ 2 ₁	4	15,6	9,86	17,6		<i>d</i> = 1,250 <i>m</i> = 512,7	Ruzicka-Schellenberg, « Helv. Chim. Acta » 20 1553 (1937)
III ac. glicerretinico C ₃₀ H ₄₆ O ₄ p. m. calc. = 470,4	P ₂₁	2	12,6	6,85	15,4	95°	<i>d</i> = 1,164 <i>m</i> = 466,9	Ruzicka-Leuenberg, « Helv. Chim. Acta » 19 1402 (1936) Ruzicka-Leuenberg, « Helv. Chim. Acta » 20 312 (1937)
IV ac. chinovico C ₃₀ H ₄₆ O ₃ p. m. calc. = 486,36	P ₂₁	2	8,25	11,23	15,5	107°	<i>d</i> = 1,149 <i>m</i> = 484,3	Ruzicka-Leuenberg, « Helv. Chim. Acta » 20 1271 (1937) Ruzicka-Prelog, « Helv. Chim. Acta » 20 1570 (1937)
V ac. acetilipsogeninico C ₃₂ H ₄₈ O ₆ p. m. calc. = 528,4	P ₂₁	2	8,24	11,5	15,7	98°	<i>d</i> = 1,179 <i>m</i> = 526,4	Ruzicka-Giacomello, « Helv. Chim. Acta » 21 83 (1937)
VI chetolattone dell'ac. acetilip- sogeninico C ₃₂ H ₄₆ O ₇ p. m. calc. = 542,4	P ₂₁ 2 ₁ 2 ₁	4	13,75	11,6	17,69		<i>d</i> = 1,265 <i>m</i> = 536,5	Ruzicka-Giacomello, « Helv. Chim. Acta » 20 306 (1937)
VII Terpene dalla cera di violette C ₃₀ H ₅₀ O p. m. calc. = 426,9	C ₂	4	13,4	6,41	30,5	84°	<i>d</i> = 1,079 <i>m</i> = 425,9	

I dati di questa tabella ci permettono di trarre le seguenti conclusioni:

1° Vi è analogia di costituzione fra il composto I e le sostanze III, IV e V dalle quali esso si ottiene per deidrogenazione. Ciò sta ad indicare che il processo di deidrogenazione è solamente un processo di «aromatizzazione». Infatti se si considera che la distanza fra due atomi di carbonio «aromatici» è di $1,41 \text{ \AA}$ e fra due atomi di carbonio idroaromatici è di $1,52 \text{ \AA}$, si calcola per la molecola dell'1,8-dimetilpicene la lunghezza di $11,28 \text{ \AA}$, e per il triterpene la lunghezza di $11,68 \text{ \AA}$.

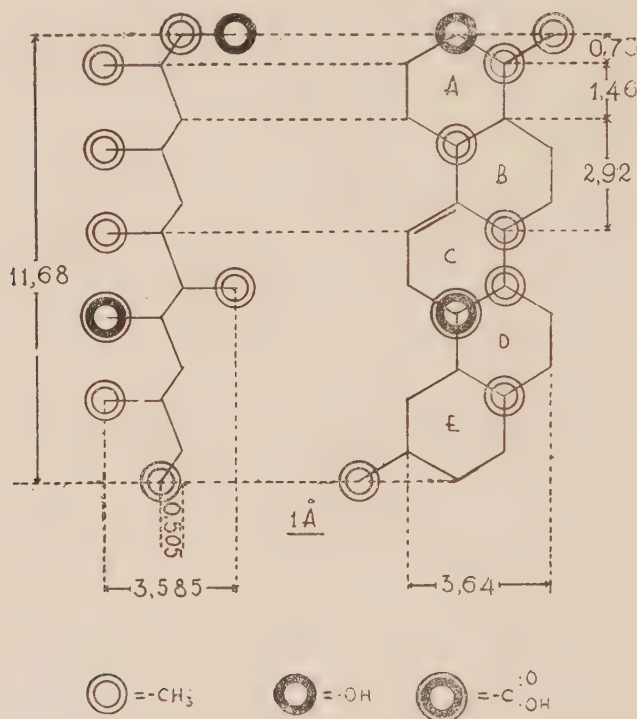


Fig. 1.

Se a queste lunghezze si aggiunge la distanza minima di $3,7 \text{ \AA}$, determinata da Robertson e collaboratori, che deve sussistere fra due atomi di carbonio vicini, ma appartenenti a due molecole diverse, si ha per il picene la lunghezza di $11,28 + 3,7 = 14,98 \text{ \AA}$, e per il triterpene quella di $11,68 + 3,7 = 15,38 \text{ \AA}$; ambedue in ottimo accordo con quelle determinate sperimentalmente e cioè di $15,01 \text{ \AA}$, rispettivamente di $15,4-15,5 \text{ \AA}$. Nel caso del composto V la lieve differenza $15,7-15,38 = 0,32 \text{ \AA}$ è dovuta al gruppo acetilico unito all'ossidrile 2.

2° L'ossidrile in posizione 2 è situato in modo da non influire sulla lunghezza della molecola. Dato che rispettando la configurazione tetraedrica dell'atomo di carbonio, per l'ossidrile vi sono solo due posizioni possibili: una quasi parallela al piano medio della molecola ed una perpendicolare, si è autorizzati ad affermare che nei triterpeni studiati si abbia quest'ultima disposizione.

3° La molecola nel suo insieme è quasi piana ed i diversi «anelli» A-B, C-D, D-E costituenti i triterpeni hanno una configurazione del tipo della trans-decalina.

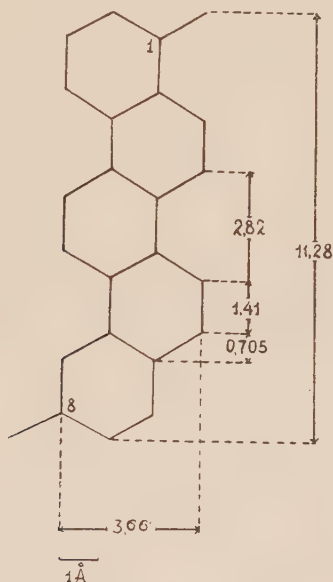


Fig. 2.

La figura 1 che rappresenta la molecola dell'acido oleanolico proiettata in direzione perpendicolare e parallela al suo «piano medio», servirà ad illustrare quanto fu detto. Inoltre la figura 2 metterà in evidenza l'analogia che esiste fra la molecola del composto idroaromatico e quella dell'1,8-dimetilpicene tanto per quel che riguarda la struttura, quanto per quel che riguarda le dimensioni.

Essendo stata dimostrata la costituzione dell'idrocarburo $C_{24}H_{18}$ e la sua analogia di costituzione coi prodotti dai quali si ottiene per deidrogenazione, tenendo conto delle relazioni di parentela chimica già stabilite per alcuni triterpeni, si può dare a questi la formula generale seguente:

TABELLA II.

Sostanza	R ^I	R ^{II}	R ^{III}	R ^{IV}
ac. oleanolico	— CH ₃	— CH ₃	— CH ₃	— C $\begin{smallmatrix} \text{O} \\ \vdots \\ \text{OH} \end{smallmatrix}$
ederagenina	— CH ₂ OH	— CH ₃	— CH ₃	— C $\begin{smallmatrix} \text{O} \\ \vdots \\ \text{OH} \end{smallmatrix}$
gipsogenina	— C $\begin{smallmatrix} \text{H} \\ \diagup \\ \vdots \\ \text{O} \end{smallmatrix}$	— CH ₃	— CH ₃	— C $\begin{smallmatrix} \text{O} \\ \vdots \\ \text{OH} \end{smallmatrix}$
eritrodiole	— CH ₃	— CH ₃	— CH ₃	— CH ₂ OH
β-amirina	— CH ₃	— CH ₃	— CH ₃	— CH ₃
ac. chinovico	— C H ₃	— C $\begin{smallmatrix} \text{O} \\ \vdots \\ \text{OH} \end{smallmatrix}$	— C $\begin{smallmatrix} \text{O} \\ \vdots \\ \text{OH} \end{smallmatrix}$	— CH ₃

I singoli termini si possono dedurre esaminando la tabella n. 2 ⁽¹⁾. Per quanto riguarda i composti II e VI, data la loro costituzione alquanto complessa, si potranno trarre delle conclusioni solo quando le ricerche in corso saranno ultimate.

Estesi pure le ricerche strutturistiche ad una sostanza di cui poco si sapeva dal lato chimico ⁽²⁾. È questo il composto VII ottenuto per ripetute cristallizzazioni della parte insaponificabile della cera di violette da un miscuglio di alcool metilico-cloroformio (3 : 1). Ottenni così un composto fondente a 285° (corr.) che si mostrò purissimo sia al microscopio di fluorescenza che a quello con tavolino riscaldabile (tutti i cristalli fondevano contemporaneamente).

L'analisi elementare diede i seguenti risultati: C 84,4 % H 11,88 %. Alla sostanza compete quindi la formula C₃₀H₅₀O per la quale si calcola un contenuto dell'84,4 % di C e dell'11,78 % di H. Il peso molecolare determinato roentgenograficamente è 425,9 in ottimo accordo con quello richiesto dalla formola su indicata (426,39). Il gruppo spaziale al quale la sostanza appartiene e le dimensioni della molecola consentono di dire che trattasi di un triterpene a struttura analoga a quella dei triterpeni già considerati. Sulla struttura chimica di questa sostanza si ritornerà in seguito quando saranno ultimate le ricerche in corso.

(1) Per quel che riguarda la letteratura di questi composti confronta: RUZICKA e GIACOMELLO, «*Helv. Chim. Acta*», 19, 1136 (1936); *Id.*, 20, 299 (1937); ZIMMERMANN, «*Helv. Chim. Acta*», 19, 247 (1936); BEYNON HEILBRON e SPRING, «*J. Chem. Soc.*», 989-91 (1937).

(2) Un preparato abbastanza puro della sostanza mi fu gentilmente concesso dal prof. D'Ambrosio che sentitamente ringrazio.

Radioattività. — *Alcune proprietà chimiche dell'elemento 43.*⁽¹⁾

Nota II di C. PERRIER ed E. SEGRÈ, presentata⁽²⁾ dal Socio N. PARRAVANO.

Il prof. Lawrence ci ha nuovamente inviato del molibdeno che era stato bombardato con deutoni nel cyclotron di Berkeley.

Abbiamo cercato di estendere le nostre ricerche sulle proprietà del 43 approfittando della maggiore quantità di sostanza a disposizione rispetto all'anno scorso⁽³⁾.

Riferiamo qui i principali risultati delle ricerche chimiche.

Abbiamo trovato un metodo estremamente semplice per estrarre l'attività, cioè il 43, dal molibdeno bombardato. Poichè l'attività dovuta al bombardamento di deutoni è concentrata in uno strato sottilissimo, superficiale, della lastra di molibdeno un attacco superficiale e blando basta a portare in soluzione l'attività. Il modo più semplice di ottenere questo attacco è di bollire a lungo il molibdeno in ammoniaca diluita: nel liquido si trovano piccole quantità (alcuni mgr.) di molibdeno e la massima parte dell'attività. Si ottiene così l'attività mista solo con molibdeno.

In particolare si ha il vantaggio di avere il 43 non misto a renio, contrariamente a quanto succedeva coi metodi usati precedentemente.

Abbiamo preso quantità di attività circa dieci volte maggiori di quelle usate l'anno scorso e le abbiamo separate dal molibdeno, zirconio e niobio aggiunti separatamente alla soluzione; abbiamo riprecipitato infine l'attività insieme a renio aggiunto come trascinatore.

La separazione dal molibdeno è stata eseguita precipitando rapidamente il molibdeno (5 mgr.) con ossichinolina e successivamente il renio (5 mgr.) col nitron; l'attività nel molibdeno era meno dell'1 % di quella nel nitron. La separazione dallo zirconio è stata eseguita precipitando lo zirconio (5 mgr.) come idrato. Anche qui si è raccolto nello zirconio meno dell'1 % dell'attività. La separazione dal niobio è stata fatta aggiungendo (5 mgr.) di renio (HReO_4) e soda all'attività; poi abbiamo aggiunto 20 mgr. di pentossido di niobio e fuso con soda. I cristalli di niobato sodico risultarono inattivi (meno dell'1 % dell'attività).

(1) Lavoro eseguito negli Istituti di Fisica e di Mineralogia della R. Università di Palermo.

(2) Nella seduta del 3 giugno 1938.

(3) C. PERRIER ed E. SEGRÈ, «Rend. Lincei», vol. XXV, 1937, p. 723.

Queste prove confermano quantitativamente i risultati dell'anno scorso e dimostrano che tutta l'attività è dovuta a isotopi del 43. La contaminazione di P_{32} osservata l'anno scorso, manca quest'anno.

Solfuri. — Abbiamo studiato più quantitativamente la precipitazione del 43 come solfuro. In ambiente acido per acido cloridrico da 0,4 N a 5 N la precipitazione, usando renio o platino come trascinatore, dopo 24 ore, è completa. Con acido cloridrico 10 N il 43 non precipita che in piccola quantità, mentre il renio precipita ancora in massima parte, sebbene lentamente: risultati analoghi si sono ottenuti usando l'arsenico come trascinatore. Rепutiamo che questa proprietà possa essere utile per un frazionamento del 43 dal renio o da altri elementi che precipitano come solfuri anche da soluzioni acidissime.

In ambiente alcalino per ammoniaca abbiamo usato manganese, ferro e zinco come trascinatori. La precipitazione con manganese sembra abbastanza completa: meno quella con ferro e ancora meno si ottiene con lo zinco (ordine di grandezza del quarto).

Cristallizzazioni frazionate. — Per l'eventualità di una separazione per cristallizzazione frazionata tra 43 e renio, abbiamo cercato di determinare il coefficiente di ripartizione del 43 tra cristalli di perrenato potassico e una soluzione satura del medesimo sale; le misure sono state eseguite cristallizzando il sale per evaporazione a 14°. Abbiamo trovato come media di parecchie misure un coefficiente di ripartizione dell'attività specifica (attività per mgr. di sale) fra soluzione e sale solido di 2,6. Dobbiamo per altro avvertire che le singole misure hanno dato risultati variabili tra 3,7 e 2,2. Tali variazioni sono da attribuirsi in buona parte alla difficoltà di avere preparati che abbiano un autoassorbimento dei raggi β ben precisabile, cioè alla misura radioattiva.

Analoghe misure col perrenato di cesio e 43 hanno dato un coefficiente di ripartizione tra soluzione e sale solido di 0,75.

Abbiamo cercato di vedere se si aveva un sensibile frazionamento tra 43 e renio precipitando quest'ultimo come perrenato di nitron: il trascinamento del 43 è stato completo, perchè una seconda precipitazione di renio aggiunto al filtrato ha dato meno dell'1 % dell'attività.

Estrazione con etere. — Abbiamo estratto con etere il molibdeno dei nostri preparati di 43, previamente ossidati con cloro, da una soluzione cloridrica contenente solfocianuro di potassio. Il 43 non è passato nell'etere che in minima quantità⁽¹⁾.

(1) Cfr., p. es., EINECKE, « Zeitschrift Analytische Chemie », 90, 1932, p. 220.

Volatilità. — Abbiamo solfurato 10 mgr. di renio, 10 mgr. di platino e una certa quantità di 43. L'insieme dei solfuri è stato posto in una navicella in corrente di cloro, non secco, a 100°. Il solfuro di renio e l'attività volatilizzano completamente e si condensano in buona parte nelle parti fredde del tubo.

Riduzione. — Una soluzione contenente perrenato potassico e 43 viene trattata con cloruro stannoso in soluzione alcalina; aggiungendo nitrato di bismuto precipita bismuto che non trascina l'attività se separato subito; lasciando riposare a lungo il bismuto trascina, invece, buona parte dell'attività.

Ci sia permesso infine di ringraziare vivissimamente il prof. E. O. Lawrence e il Radiation Laboratory di Berkeley (California) che col prezioso dono del molibdeno attivo hanno reso possibile questa ricerca.

Elettrochimica. — *Influenza degli ultrasuoni sui potenziali di scarica dell'idrogeno, dell'ossigeno e del cloro* ⁽¹⁾. Nota di R. PIONTELLI, presentata ⁽²⁾, dal Corrisp. L. CAMBI.

1. In una Nota precedente ⁽³⁾, sono stati esposti i risultati di alcune esperienze preliminari, relative all'influenza di u. s., di 1196 Kc/sec., sul potenziale di scarica dell'idrogeno, su Pt liscio, da soluzioni di KCl, HCl, NaOH 0.1 n.

Risultati analoghi sono stati ottenuti, con apparecchiatura e metodo identici, con soluzioni di KOH, Na₂SO₄, H₂SO₄, pure 0.1 n ⁽⁴⁾.

In successive esperienze, si è fatto uso di celle del tipo in fig. 1, con le regioni anodica e catodica collegate soltanto da un sottile tubo a rubinetto, lasciato quasi completamente chiuso, durante il passaggio di corrente. Il recipiente catodico è stato chiuso inferiormente con una sottile membrana di collodio, fissata con anelli di gomma e con collodio, e parzialmente immerso nell'olio di vasellina contenente il quarzo emittente. Si è accresciuta ulteriormente la resistenza in serie al circuito polarizzante, portando, contemporaneamente, la tensione a 36 volt, in modo da rendere minime

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica industriale della R. Università di Milano.

(2) Nella seduta del 3 giugno 1938.

(3) Questi « Rendiconti », 1938.

(4) L'effetto polarizzante riscontrato, alle alte densità di corrente, in HCl, per prolungata azione degli u. s., non si è ripresentato, in modo ben definito, con nessun'altra soluzione. Tuttavia (sempre nel campo delle alte densità), anche con H₂SO₄, si sono avuti deboli effetti polarizzanti, a lento decorso, e di scarsa riproducibilità. Per definire le leggi e l'interpretazione di questo interessante fenomeno (riscontrato anche da G. SCHMID e L. EHRET, « Zs. f. Elektroch. », 43, 1937, p. 597) si richiede una accurata e difficile indagine sperimentale.

le variazioni dell'intensità di corrente, in seguito all'azione depolarizzante degli u. s. Si è, infine, fatto uso di soluzioni della stessa composizione della precedente, ma previamente bollite a lungo, raffreddate in atmosfera di idrogeno puro, e, infine, saturate con questo gas, per prolungato gorgogliamento nella stessa cella.

L'azione degli u. s., anche in queste condizioni, è fortemente depolarizzante, alle più basse densità di corrente (5×10^{-5} A/cm²)⁽¹⁾, ma richiede, per manifestarsi, un tempo assai più rilevante (fino a 15') che in precedenza. Il valore primitivo del potenziale di scarica si ripristina rapidamente al cessare degli u. s. L'entità della depolarizzazione, e la sua legge di dipendenza dalla densità di corrente corrispondono ai precedenti risultati.

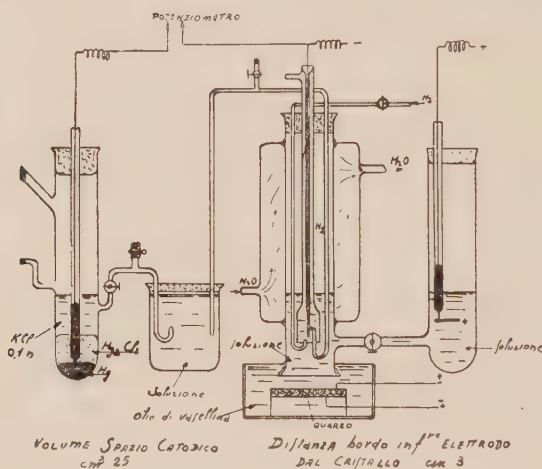


Fig. 1.

Forti depolarizzazioni, nelle stesse condizioni, sono state ottenute anche con elettrodi di Pb e Cu, preparati, per deposizione elettrolitica, da soluzioni purissime, su elettrodi di Pt liscio del tipo precedente, in modo da formarvi spessi strati con superficie regolarissima. Risultati analoghi sono presumibilmente ottenibili con elettrodi di qualsiasi metallo. È interessante, al riguardo, il confronto, che verrà effettuato in una prossima pubblicazione, tra i risultati delle esperienze di depolarizzazione (tuttora in corso di completamento), relative ai diversi elettrodi ed alle diverse soluzioni, ed i corrispondenti valori della sovratensione.

L'interpretazione qualitativa di tutti gli effetti finora riscontrati si può riassumere nel seguente modo:

La sovratensione η di scarica dell'idrogeno su di un dato elettrodo, in una soluzione e con una densità di corrente assegnate, è definita come il

(1) Resta così eliminato ogni dubbio riguardante l'eventuale influenza dell'ossigeno disciolto, o di H₂O₂ formata per azione su di esso da parte degli u. s.

valore del potenziale di scarica riferito a un elettrodo reversibile (Pt platinato), immerso nella stessa soluzione, saturata con idrogeno a pressione atmosferica. Se C_0 è la concentrazione di H_2 nella soluzione in equilibrio col gas a 1 atm., e C_{H_2} quella nello strato di soluzione con il quale l'elettrodo sotto corrente scambia H_2 , si può porre:

$$\eta = \frac{RT}{2F} \ln \frac{C_{H_2}}{C_0} + \varepsilon^{(1)}.$$

In questa espressione di η , il primo termine rappresenta la parte di η termodinamicamente definibile in base alla concentrazione di H_2 , mentre il termine ε tiene conto dei fenomeni irreversibili nei processi di scarica dei protoni (con o senza adsorbimento), di ricombinazione degli atomi neutri, di disadsorbimento ecc. Il valore di η dipende da numerosissimi fattori, ma, soprattutto, dalla densità di corrente, dalla natura, e dalle condizioni superficiali dell'elettrodo. Se, con un mezzo qualunque, ad es. per azione di u. s., ferma restando la densità di corrente, si eliminano i prodotti della scarica, in modo da diminuire C_{H_2} , si può deprimere η scendendo a valori, i quali, a parità di diminuzione di C_{H_2} , dipendono dai valori di ε e dalle loro variazioni eventualmente provocate dall'azione depolarizzante, e quindi dall'intensità di questa e dalla natura dell'elettrodo. Si possono così realizzare delle condizioni di scarica in cui η è negativa, cioè l'elettrodo presenta una « sottotensione ». È questo il caso di Pt liscio, precedentemente studiato, in cui ε è pressochè zero.

È da notare che, nelle condizioni sperimentali da me adottate (elettrodo verticale ⁽²⁾ ecc.), l'azione degli u. s. è relativamente poco intensa.

Per questo motivo, quando la densità di corrente ha superato i valori per i quali comincia a formarsi una fase gassosa distinta, e si inizia lo svolgimento di gas, gli u. s. pur eliminando, per cavitazione, le bolle, e forse il velo gassoso avvolgente l'elettrodo, non riescono a sottrarre i prodotti della scarica con velocità sufficiente per deprimere, in modo rilevante, lo stato di saturazione della superficie.

Viceversa, nelle già ricordate esperienze di G. Schmid e L. Ehret, l'azione degasante è assai più intensa, e può spingersi agli strati superficiali dell'elettrodo, nei quali può produrre profonde alterazioni. L'effetto depolarizzante è, allora, sensibile anche a densità relativamente elevate (2.5 mA/cm²),

(1) Si assume, implicitamente, η positivo, quando il potenziale dell'elettrodo sotto corrente è negativo rispetto all'elettrodo di riferimento. Se questo è un elettrodo qualsiasi, il potenziale di scarica misurato è $V = A + \eta$, dove A dipende dalla temperatura e dalla natura dell'elettrodo di riferimento.

(2) In questo modo non si stabilisce un sistema di onde stazionarie tra la superficie dell'elettrodo e quella del quarzo. Usando tensione di alimentazione del generatore di u. s. non raddrizzata, si ottiene, anzichè un'emissione continua, una successione di treni di onde di durata inferiore a 1/84 di sec. e ad intervalli superiori a tale durata.

ma le alterazioni superficiali degli elettrodi complicano notevolmente i fenomeni e la loro interpretazione.

Risultati che rientrano nel quadro precedente sono quelli forniti dalle esperienze sull'influenza del gorgogliamento di gas sul valore del potenziale di scarica.

Ampie ed accurate ricerche al riguardo, con elettrodi attivi di Pt e Pd sono dovute a Kandler, Knorr e Schwitzer ⁽¹⁾. Nel corso delle mie esperienze, che confermano, in definitiva, quelle di questi AA. ho notato quanto segue: se, in una soluzione non degasata e lasciata all'aria, si fa gorgogliare una rapida corrente di H_2 puro a lambire il catodo, sia questo di Pt, di Pb o di Cu, nel campo della corrente residua, si ha, inizialmente, una fortissima depolarizzazione (dello stesso ordine di quella prodotta dagli u. s.), che va poi decrescendo, più o meno lentamente, a seconda delle condizioni sperimentali, fino a riassumere valori prossimi a quelli iniziali.

In ogni caso, però, all'atto dell'arresto del gorgogliamento di gas, il potenziale diviene un po' più negativo, in misura che dipende dalla velocità di gorgogliamento e dalla densità di corrente, e questo fenomeno si presenta anche nel campo dell'elettrolisi visibile, in cui l'effetto iniziale è assai ridotto. Facendo gorgogliare ossigeno, l'effetto depolarizzante, non solo si mantiene, ma cresce anzi nel tempo.

Facendo circolare l'elettrolita, in una cella del tipo in fig. 1, ma aperta, in modo da farlo entrare dallo spazio catodico ed uscire dall'anodico, si riscontra, alle basse densità, la solita depolarizzazione.

Se, viceversa, in una soluzione saturata di H_2 , si fa circolare elettrolita pure saturo, e sottratto all'aria (mantenendolo in atmosfera di H_2), l'azione depolarizzante è assai ridotta, anche alle più basse densità.

Mentre l'azione degli u. s. è certamente attribuibile all'eliminazione, per degasamento, dei prodotti della scarica, l'azione depolarizzante all'inizio del gorgogliamento di idrogeno, e per circolazione di elettrolita non degasato, è, assai probabilmente, fortemente legata all'esistenza di ossigeno disciolto nella soluzione, di cui assicura l'apporto all'elettrodo ⁽²⁾.

A conferma di questo, stà il risultato che, facendo gorgogliare N_2 puro, con catodo di Pt liscio, dopo il solito effetto iniziale di depolarizzazione, il potenziale diviene progressivamente più negativo, come nel caso del gorgogliamento di idrogeno, ma con valori di regime più bassi ⁽³⁾.

(1) «Zs. Elektr.», 40, 1934, p. 38; 42, 1936, p. 669; 44, 1938, p. 62; «Zs. phys. Ch.», (A), 176, 1936, p. 161; 180, 1937, p. 281.

(2) Si deve notare, al riguardo, che, mentre tale ossigeno non si combina, praticamente, con l'idrogeno fatto gorgogliare, esso reagisce, con facilità, con l'idrogeno attivo prodotto dall'elettrolisi.

(3) Questi risultati, che confermano quelli delle esperienze di Kandler, Knorr e Schwitzer, sono interpretabili ammettendo che, con il progressivo impoverirsi della solu-

2. Esperienze analoghe alle precedenti, e con la stessa apparecchiatura, sono state effettuate a riguardo dei processi di scarica, su Pt liscio, dell'ossigeno (da NaOH, KOH, H_2SO_4 0.1 n) e del cloro (da HCl e KCl 0.1 n). È noto che il potenziale di un elettrodo di Pt liscio a ossigeno si scosta, anche a riposo, da quello termodinamicamente reversibile, e presenta, sotto corrente, un'elevata sovratensione anodica. La causa più probabile di tale comportamento è l'esistenza di ossidi ricoprenti la superficie dell'elettrodo, e forse parzialmente in soluzione solida. Come già era prevedibile, in base alle esperienze di Ehret e Schmid, nel caso dell'ossigeno, sia con u. s. (anche per azione assai prolungata), sia con violento gorgogliamento di ossigeno, sia con circolazione di elettrolito, si ha un'azione depolarizzante assai più

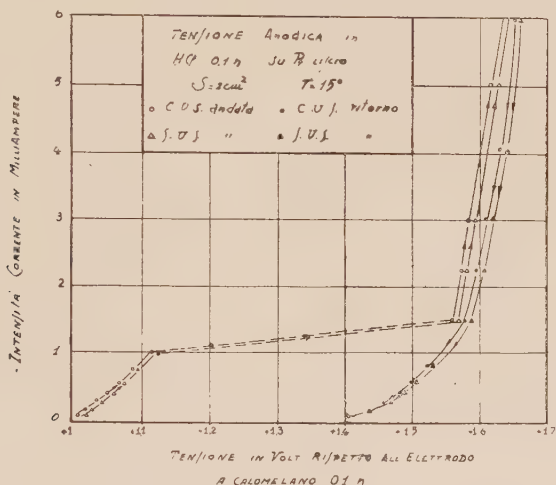


Fig. 2.

debole che nel caso dell'idrogeno. Tali risultati apportano una valida conferma alla teoria dello strato di ossidi.

Nel caso del cloro, il risultato delle mie esperienze, di cui la fig. 2 mostra l'andamento⁽¹⁾, è stato analogo a quello con ossigeno. L'azione depolarizzante è infatti assai scarsa anche nelle curve di ritorno, quando cioè l'elettrodo presenta i fenomeni di semipassività, il che conferma esser questa dovuta, come nel caso dell'ossigeno, alle condizioni superficiali di trasformazione chimica dell'elettrodo (presumibilmente di ossidazione), in seguito a polarizzazione anodica sufficientemente intensa.

zione in O_2 , eliminato dalla corrente di N_2 , cessi la causa chimica di depolarizzazione, e permanga la causa meccanica, in questo caso assai minore che sotto l'azione degli u. s.

(1) Tale andamento riproduce quello messo in evidenza, in condizioni analoghe, dai classici studi di MÜLLER, «Zs. An. u. allg. Chemie», 26, 1901, p. 1; SUTHER e BRISBEE, «Zs. phys. Chemie», 45, 1903, p. 216; PFLEIDERER, «Id.», 68, 1909, p. 49.

Il fatto che Schmid ed Ehret hanno riscontrato, dopo prolungata azione degli u. s., una forte depolarizzazione, in buona parte persistente, una volta cessata tale azione, mi sembra attribuibile ad una disintegrazione dello strato di ossido, che è, presumibilmente, assai meno stabile che nel caso dell'ossigeno, essendo la scarica degli ioni OH^- , a cui è dovuta la sua formazione, un fenomeno secondario rispetto a quello della scarica degli ioni Cl^- .

Ringrazio lo studente J. Orshansky, che mi ha validamente aiutato nelle esperienze.

Geologia. — *Il permiano nel territorio di Orroli (Sardegna).*
Nota di A. CAVINATO, presentata ⁽¹⁾ dal Socio G. BOERIS.

Ho trovato dei terreni di età permiana in territorio di Orroli. Questi si estendono per parecchi km² ed occupano e riempiono l'ampia valle di R. Mulargia (e dei suoi affluenti: R. Melas, R. Pilarda, R. Maiori ecc.) a monte della gola di M. Surei.

È una serie sedimentare con conglomerato basale, trasgressiva e discordante sul siluriano (sedimentare e porfiroide): il giurese sta sopra trasgressivo e talvolta discordante sempre nettamente separato da essa dal suo caratteristico e ben noto conglomerato base.

A Rio Taccu Coronas, sulla destra di Rio Melas, dove questa formazione permiana ha una potenza di cento metri circa si susseguono in questo ordine: un conglomerato basale a carattere puddingoide, di ciottoli di porfido, di quarzite, di pietra lidia, di scisto, talora fortemente cementato (ed in tal caso identico al coevo verrucano delle Alpi), talaltra incoerente in vario grado in quanto degradato o a cementazione argillosa; un banco di scisti neri argilloso arenacei (uguali ai coevi delle Alpi), di Seui di S. Giorgio di Iglesias ecc.); banchi di arenarie grigie, o di color rosso mattone (e allora identiche a quelle delle Alpi denominate *arenarie di Val Gardena*); banchi di marne azzurre, grigie, violacee, talvolta scistose così da ricordare il servino inferiore alpino; un banco 4-6 metri di calcare marnoso, alquanto giallastro e leggermente cavernoso, che ha una certa somiglianza con la carniola alpina; infine un banco di tufo trachitico cenere chiaro del tardo miocene.

E sulla sinistra della strada Escalaplano-Foghesu, trecento metri anzi ponte Tradali, il calcare marnoso, ora detto, sopporta il giurese (conglomerato base e calcare) e l'eocene: questo punto è fondamentale. Raccordando quanto si vede qui con ciò che si osserva a Taccu Coronas risultano esatti quei rapporti di giacitura su enunciati: non dico l'età permiana.

Salendo ad Orroli dal fondo di R. Pilarda si nota che il conglomerato base del permiano sopporta le arenarie rosse, e non già gli scisti neri, qui

(1) Nella seduta del 3 giugno 1938.

mancanti: vengono, quindi, nell'ordine: eocene, miocene, basalto. In questa zona di R. Pilarda il giurese manca; almeno non ce l'ho trovato.

Nel suo complesso questa serie sedimentare permiana è analoga a quella permotriassica delle Alpi, ripetiamolo, salvo la potenza: specie quale l'ho vista, e vado rilevandola, nella zona meridionale di M. Adamello: analoga stratigraficamente e litologicamente. Ma più giova rilevare la analogia del suo conglomerato base e degli scisti neri e delle arenarie, sovrastanti, con i terreni sardi di Seui, d'Ingurti Pani, di Seulo che hanno avuto sicuro riferimento al permiano inferiore.

Non ho nessun dubbio nell'affermare questa identità di facies litologica. E poichè la giacitura dei terreni di R. Mulargia rispetto all'imbasamento scistoso cristallino ed al sovrastante giurese, è la stessa di quelli di Seui, Seulo ecc. ho creduto di assegnarli al permiano, pur mancandomi una documentazione paleontologica.

La parte inferiore di questi terreni di R. Mulargia: conglomerato e scisti, sarebbero del permiano inferiore, autuniano; le arenarie rosse del permiano superiore. Le marne, credo che possano rappresentare i terreni di transizione dal permiano al trias e siano da riferirsi al werfen: specie quelle scistose, le superiori, arieggianti il servino. In quanto al calcare marnoso esso potrebbe rappresentare il werfen superiore. Ma in proposito a quanto è detto in questo ultimo a capo non mi sento di poter fare affermazioni categoriche.

Questa formazione permiana (o permotriassica) da me trovata in territorio di Orroli è la più estesa e la più caratteristica tra le coeve dell'Isola: quelle note. Essa colma, nella Sardegna meridionale-orientale, gran parte dello hiatus, sinora ammesso, esteso dalla fine del devonico all'oolitico inferiore.

Brandelli di conglomerato base del permiano e di arenarie e marne, ce ne sono anche in territorio di Escalaplano, in fondo a R. is Ceas dalle due parti della strada per Ballao; e se ne incontrano salendo a S. Salvatore ed a S. Giovanni (qui c'è anche il calcare marnoso che sopporta l'eocene), o dirigendosi ad Escalaplano da Arcu Azzinuri, sulla sinistra, alla prima svolta della strada, o scendendo da M. Cardiga sia ad oriente verso Tertenia e Villaputzu, sia ad occidente verso Ballao.

Questa formazione è poco appariscente, nonostante la sua estensione, perchè dove affiora è stata in gran parte erosa ed asportata, e dove è ben conservata è seppellita sotto il giurese o l'eocene che la proteggono ma anche la nascondono.

Il Lamarmora aveva riconosciuti e distinti questi terreni (pp. 103, 115, 140, 141, 228-235, 167-168 ecc., ed. 1857); ma non gli ascrisse al « suo carbonifero » (il permiano di Seui, Foghesu ecc.) perchè avendoli incontrati a frammenti sparsi dovunque non si curò di ricostruire la serie, coordinandoli.

Perchè quest'Uomo aveva visto tutto; anche se in alcuni riferimenti cronologici ed in certe classificazioni petrografiche non fu preciso. E in quei tempi non poteva esserlo specie in rispetto alle rocce.

Fisiologia vegetale. — *Fenomeni di attivazione nell'accrescimento vegetale*⁽¹⁾. Nota I di S. DOJMI DI DELUPIS, presentata⁽²⁾ dal Socio E. CARANO.

Gli studi compiuti fino ad oggi sui fenomeni di attivazione nell'accrescimento vegetale hanno riguardato essenzialmente le reazioni fisiologiche « endogene » di « parti attive » dell'organismo (induttori od organizzatori) e di agenti specifici (fattori di crescita, biocatalizzatori), in relazione alla capacità dei medesimi di liberare determinate « potenze », promuovere stimoli e trasmettere impulsi per dar luogo a incrementi di crescita, a differenziamenti di forma e di funzioni e a organizzazioni caratteristiche di « regioni ». La vasta indagine sperimentale intrapresa in merito — per i soli fattori di crescita si contano, come ha rilevato Jost⁽³⁾ in una recentissima rassegna, oltre 100 memorie pubblicate negli ultimi due anni — mostra con quanto interesse ci si adoperi attualmente per giungere ad una più approfondita conoscenza dell'importante problema. Un aggiornato esame della letteratura fa però notare che da nessuno è stata mai posta la domanda: esistono accanto ai fenomeni endogeni di autostimolazione altri analoghi che traggono però origine da una *attività extracellulare* dell'organismo e si manifestano con un impulso vegetativo che la pianta riceve quale riflesso condizionato di cambiamenti fisici e chimici indotti dalla pianta stessa nel substrato esterno?

Se a fenomeni di questo tipo si attribuisce, in riferimento soprattutto alla nota teoria di Robertson⁽⁴⁾ ⁽⁵⁾ ⁽⁶⁾, una grande importanza per gli organismi unicellulari, non si ha forse ragione di supporre che essi siano manifestazioni del tutto normali anche nella vita delle piante superiori?

A formulare questo quesito e a indagarne la validità mi hanno spinto gli studi che da alcuni anni conduco sulle correlazioni dell'accrescimento vegetale con i processi di scambio ionico nel suolo, studi che hanno rivelata la esistenza di una attività, di natura spiccatamente *polare*, con cui le piante superiori si pongono in equilibrio elettrostatico col substrato quando vengono a trovarsi col sistema radicale a contatto fisico di particelle colloidali elettrizzate, contenenti nel proprio « campo di forza » allo stato assorbito, un abbondante *sciame* di ioni calcio.

(1) Lavoro eseguito presso la R. Stazione sperimentale di bieticoltura in Rovigo.

(2) Nella seduta del 3 giugno 1938.

(3) « Ztschr. f. Bot. », 31, 1937, p. 95.

(4) « Biochem. J. », 15, 1921, p. 595.

(5) « Biochem. J. », 15, 1921, p. 612.

(6) *The chemical basis of growth and senescence*. London, 1923.

Il fatto stesso che in tali condizioni, come ho riferito in apposite Note ⁽¹⁾⁽²⁾, le piante sono indotte a compiere uno sforzo energetico per dar luogo a modificazioni nella composizione ionale dei colloidi (essenzialmente attraverso una deposizione di ioni H, da esse stesse prodotti, al posto di ioni Ca rimossi, in quantità equivalenti, allo stato di carbonato precipitato) e con esse ad una catena di altri cambiamenti anche nella fase liquida del mezzo, fa pensare di trovarsi di fronte ad una manifestazione atta a stimolare ed attivare l'accrescimento.

L'ipotesi di una auto-attivazione per questa via esterna si lascia sperimentalmente studiare con metodo indiretto, usando come substrato una permutite saturata quasi completamente con ioni Ca e facendo seguire ad una prima coltura, con cui si sia indotta per deposizione di ioni H e rimozione di ioni Ca una nuova posizione di equilibrio nel mezzo, una seconda coltivazione della medesima pianta. Le differenze di peso in sostanza organica, conseguibili in tali condizioni, messe in confronto con quelle ottenibili tra due successive colture eseguite contemporaneamente e con le medesime modalità in sabbia pura di quarzo, in assenza cioè di un campo elettrico e di ioni assorbiti, danno modo di desumere eventuali differenzamenti di crescita in funzione di detti fenomeni.

Sperimentalmente questo metodo comparativo differenziale è stato realizzato mediante prove di vegetazione del frumento in vasi di vetro (tipo Neubauer), con cinque repliche, impiegando la permutite in miscuglio con sabbia di quarzo nel rapporto 1 : 1. Nella preparazione della permutite si è seguito il procedimento di R. L. Cook ⁽³⁾, già sperimentato in altre ricerche. La composizione ionale della permutite è stata determinata col metodo di P. Vageler e con l'ausilio della formulazione matematica dello stesso autore ⁽⁴⁾. I valori ottenuti sono, per 100 gr. di miscuglio, i seguenti:

Ioni Ca	milliequivalenti	40.0	%	94.0
Ioni H	»	<u>2.5</u>	%	<u>6.0</u>
Capacità totale di saturazione		42.5		100.0

Le quantità di permutite e sabbia sono state limitate a 200 gr. per vaso, allo scopo precipuo di ottenere accentuate differenze sia nella deposizione di ioni H sia nei pesi in sostanza organica, e di potere così dedurre, con la maggiore possibile approssimazione, il grado di attivazione indotta. Allo stesso scopo si è vista l'opportunità di effettuare una semina molto fitta, precisamente di 50 semi per vaso.

(1) « Ztschr. f. Pflanzenern., Düng. u. Bodenk. », 39, 1935, p. 295.

(2) « La Ricerca Scientifica », ser. II, anno VIII, vol. I, 1937.

(3) « Jour. Amer. Soc. Agron. », 27, 1935, p. 297.

(4) *Der Kationen- und Wasserhaushalt des Mineralbodens*. J. Springer, Berlin, 1932.

Per escludere eventuali incidenze, le prove di vegetazione sono state condotte in condizioni microbiologicamente sterili. Per quanto concerne le condizioni alimentari, si sono aggiunti, in partenza, ad ogni vaso 20 cc. di una soluzione nutritiva composta dalle seguenti quantità di sali puri, in gr. per litro:

KNO_3	2.0	MnCl_2	0.010
$\text{CaH}_4(\text{PO}_4)_2$	2.0	NaI	0.002
$\text{Ca}(\text{NO}_3)_2 \cdot 4 \text{H}_2\text{O}$	1.0	$\text{FeCl}_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$	0.028
$\text{MgSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$	0.5	$\text{Na}_2\text{B}_4\text{O}_7 \cdot 10\text{H}_2\text{O}$	0.001

Durante le prove la temperatura-ambiente (serra) era mantenuta costantemente a 18–20° C. L'umidità nei vasi, corrispondente inizialmente alla *capacità idrica minimale* del miscuglio permutite-sabbia (cc. 80 di acqua per vaso) veniva, nel corso della vegetazione, riportata a tale valore (con acqua distillata sterile ed esente di CO_2), ogni volta che l'umidità stessa si abbassava a circa la metà della capacità idrica. Questa costante è stata misurata secondo il metodo adoperato in precedenti lavori ⁽¹⁾. I consumi idrici erano giornalmente controllati.

La durata di vegetazione fu di 30 giorni sia in prima che in seconda coltura. Quest'ultima venne effettuata dopo avere asportato da ogni vaso, insieme alla parte aerea, anche tutte le radici delle piante, e disseccata a 30° C, setacciata e nuovamente inumidita la permutite o rispettivamente la sabbia dei singoli vasi.

Per i necessari raffronti e per i calcoli dei valori relativi, si è aggiunta nella seconda coltura, quale *prova standard*, una nuova serie di vasi con sabbia pura di quarzo, in cui erano rigorosamente riprodotte le condizioni originarie delle altre serie di vasi.

Le osservazioni sull'accrescimento delle piante e i risultati finali, espressi dai pesi di sostanza organica (seccata a 100° C), hanno posto in rilievo uno spiccato comportamento differenziale del frumento nei due momenti successivi di coltivazione, a seconda che il substrato era stato costituito da permutite o da sabbia pura di quarzo. In quest'ultima, infatti, da un accrescimento vivace ed efficiente del frumento nella prima semina hanno fatto seguito, in seconda coltura, un vigore vegetativo visibilmente più ridotto e pesi di sostanza organica sensibilmente più bassi rispetto alle prove standard; su substrato di permutite invece l'accrescimento, sempre in seconda coltura, è variato in senso precisamente opposto, rivelando, insieme ad un notevole incremento di pesi, anche un ritmo più accelerato nella successione dei differenzamenti morfologici caratteristici delle prime fasi di sviluppo.

(1) «Nuovo Giorn. Bot. Ital.», n. s., 43, 1936, p. 660.

Ai fini interpretativi di questo comportamento differenziale si riportano nel seguente prospetto i pesi di sostanza organica riferiti al valore 100 delle prove standard (rappresentate dalle colture in sabbia pura di quarzo), le differenze percentuali dei valori della seconda coltura rispetto a quelli della prima semina e le quantità assolute e relative di ioni H riscontrate nella permutite coltivata a frumento (per differenza dalla permutite lasciata, quale testimone, senza vegetazione):

Substrato	Pesi relativi		Differenze percentuali	Ioni H depositati	
	1 ^a coltura	2 ^a coltura		m. e.	%
Sabbia	100.0	76.0	— 24	— —	— —
Permutite-Ca . .	40.0	64.0	+ 60	8.2	20.5

Mentre in sabbia di quarzo, esente di ioni allo stato assorbito, i pesi in sostanza organica si abbassano in seconda coltura nella misura del 24 %, su substrato costituito da permutite calcica e in corrispondenza ad una sostituzione nella medesima di 8,2 m. e. di ioni Ca con ioni H, i pesi al contrario aumentano di ben il 60 %, eguagliando quasi quelli della coltura in sabbia, che nella prima semina era invece risultata due volte e mezza superiore.

Poichè l'unica variante sperimentale sta sostanzialmente nella diversità di substrato e precisamente nella presenza o assenza di un campo elettrico con ioni Ca e H allo stato assorbito, viene fatto di ammettere che il comportamento differenziale del frumento sia l'espressione conseguenziale di una attivazione impressa all'accrescimento dalle modificazioni indotte dal frumento stesso nella composizione ionale della permutite. Tale attivazione appare un fenomeno tipicamente « autogenico » ed eminentemente « extracellulare », consistendo in stimoli esterni susseguenti a reazioni di scambio ionico, che sono provocate dalle piantine a contatto di particelle colloidali elettrizzate per il conseguimento del voluto equilibrio elettrostatico in conformità alle leggi generali di distribuzione degli ioni nei sistemi polari.

La presenza nella permutite dell'idrogeno, elemento attivatore per eccellenza del metabolismo vegetale, svela l'origine fisiologica e la natura polare dei fenomeni.

Biologia. — *Nuove osservazioni sul «disseccamento dei germogli» dei pioppi*⁽¹⁾. Nota di G. GOIDÀNICH, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. L. PETRI.

Tre anni di osservazione molto particolareggiata della malattia conosciuta comunemente col nome di «defogliazione primaverile del pioppo», grazie ai mezzi concessimi dal Servizio Fitopatologico del Ministero dell'Agricoltura e Foreste ed alla cordiale collaborazione dell'Istituzione per il Miglioramento del pioppo di Torino e di numerosi proprietari di aziende pioppicole, mi han messo in grado di giungere a conclusioni sulla natura e sui caratteri della malattia che ritengo si possano considerare definitive e servano ad appianare le incertezze sorte a causa del contrastante risultato di molti studi di ricercatori stranieri ed italiani, anche miei⁽³⁾, sull'argomento.

È innanzitutto apparsa infondata la supposta esistenza di un parassita pleomorfo dotato di uno stadio ifale, di uno stadio picnidico e di uno stadio perfetto, ascoforo. Dopo le ricerche dei francesi Vuillemin⁽⁴⁾ e Prillieux⁽⁵⁾ la «maladie du peuplier pyramidal» e quindi anche la nostra «defogliazione primaverile» veniva infatti attribuita all'ascomicete sferiaceo *Didymosphaeria populina* Vuill. nel cui ciclo di sviluppo entravano un *Phoma* sp. (prob. *Ph. salicina*) e il *Napicladium tremulae* Fr. (*Fusicladium radiosum*, *Napicladium asteroma*).

Come annunciai⁽³⁾ due anni or sono mi fu abbastanza agevole isolare dai pioppi ammalati oltre all'ifale anche uno sferossidale (indicato col nome provvisorio di *Sferossidale* G. 2191) che non esitai a identificare con quello descritto precedentemente da Vuillemin. Queste due forme fungine isolate apparvero subito assolutamente diverse tra di loro sia per i caratteri microscopici dell'apparato vegetativo, sia per il comportamento in cultura artificiale: la differenza più saliente ed appariscente risiede nella velocità di accrescimento delle colonie, assai limitata per l'ifale, notevole per lo sferossidale. In questi due anni le culture del primo han dato sempre e solo origine a conidi demaziacei, mentre quelle del secondo sempre e solo picnidi a spore ialine, confermando così l'autonomia dei due funghi. Rimane ancora

(1) Ricerche eseguite nella R. Stazione di Patologia vegetale di Roma.

(2) Nella seduta del 3 giugno 1938.

(3) G. GOIDÀNICH, *Sulle cause della cosiddetta «defogliazione primaverile» del pioppo in alta Italia*. «Rendic. R. Acc. Naz. dei Lincei, Cl. Sc. fis., mat. e nat.», XXIV, ser. 6^a, 1936, pp. 27-30; *Morfologia, biologia e sistematica di un fungo parassita delle foglie di pioppo* [*«Stigmata radiosum»* (Lib.) G. Goid.]. «Annali di Botanica», XXI, 1936, 12 pp.

(4) P. VUILLEMIN, *La maladie du Peuplier pyramidal*. «Compt-Rend. d. l'Ac. de France», 108, 1889, pp. 632-634.

(5) E. PRILLIEUX, *Sur la maladie du Peuplier pyramidal*. «Compt-Rend. d. l'Ac. de France», 108, 1899, pp. 1133-1136.

in sospeso la questione dell'esistenza e dell'appartenenza all'uno o all'altro parassita della *Didymosphaeria populina*: nonostante le abbia in diversi modi cimentate, le culture non hanno dato origine ad alcuna fruttificazione ascofora; soltanto in quelle dell'ifale sono comparsi quasi costantemente dei piccoli corpi rotondeggianti che potrebbero essere abbozzi di periteci (che non giunsero mai ad un completo differenziamento però). Purtroppo non mi è riuscito neppure di rinvenire la *Didymosphaeria* sui rametti secchi del pioppo dove, a detta degli autori francesi, si sviluppa in autunno ed in inverno: in questa ricerca ho insistito, esaminando materiale in tutti i periodi dell'anno, in modo particolare poichè è chiaro che quando si riuscirà ad avere a disposizione la forma ascofora, la questione dei suoi stadi metagenetici sarà facilmente risolta.

Nuovi dati interessanti sono stati ottenuti nel comportamento parassitario dei due funghi ed, insieme, sull'eziologia del « disseccamento dei germogli ». Mentre nel primo anno delle mie indagini, nel 1936, ebbi a constatare sui germogli una notevole, quasi esclusiva, predominanza delle infezioni da sferossidale ed un limitato attacco dell'ifale (che invece danneggiava intensamente le foglie) nell'anno decorso ed ancor più nel corrente anno, almeno stando alle analisi fatte sino a questo momento, i termini si sono invertiti: inferiore — quest'anno addirittura sporadica — la comparsa dello sferossidale, diffuso l'attacco al germoglio dell'ifale. Il fenomeno, veramente singolare, può trovare spiegazione nelle diverse condizioni di ambiente in cui si è svolta l'infezione nei diversi anni, su cui sarà detto più sotto; esso inoltre permette di comprendere il perchè della controversia fra Vuillemin e il Prillieux, a proposito della individuazione del parassita agente della malattia, altrimenti inconciliabile.

Sulla posizione dell'ifale del pioppo è comparso nel 1937 uno studio di Baldacci⁽¹⁾. Secondo questo A. il fungo appartiene ad un genere di nuova creazione, *Pollaccia* Bald. et Cif., a cui passa con la denominazione binomiale *Pollaccia radiosa* (Lib.) Bald. et Cif. [sin. = *Napicladium tremulae* Fr., *Fusicladium radiosum* (Lib.) Lind., *Stigmina radiosa* (Lib.) G. Goid. ecc.]⁽²⁾.

L'andamento dell'infezione in questi ultimi anni indica chiaramente quali siano i fattori ambientali che regolano la comparsa della malattia, sia essa

(1) E. BALDACCI, *Un nuovo genere di micete parassita del pioppo*. *Pollaccia radiosa* (Lib.). Bald. et Cif. « Atti dell'Istituto Botanico dell'Università di Pavia », ser. IV, vol. 10, 1937, pp. 54-72.

(2) Per tutte queste ragioni deve venire modificata anche la terminologia da me proposta per indicare i fenomeni patologici che si comprendevano col nome non esatto di « defogliazione primaverile ». Il termine « Stigminosi delle foglie del pioppo » cade per ragioni ovvie essendo esso derivato dal nome del fungo *Stigmina radiosa* ora soppresso; tale alterazione potrà invece indicarsi col termine lato di « seccume delle foglie del pioppo ». Anche la denominazione di « disseccamento apicale dei germogli » potrà essere sostituita con quella più breve di « disseccamento dei germogli » che io adotto nel titolo della presente Nota.

dovuta allo sferossidale che alla *Pollaccia*. Di norma, nelle annate a primavera piovosa, i primi e forti attacchi compaiono dalla metà di aprile al principio di maggio, dopo le prime giornate calde; così è avvenuto nel 1936 e 1937. Nel corrente anno invece, in cui i mesi primaverili sono decorsi eccezionalmente asciutti e freddi, la malattia non si è presentata nel medesimo periodo. Una visita fatta nel Cremonese al 19 aprile, allo scopo di ricercare le prime tracce d'infezione che compaiono sempre con notevole anticipo rispetto all'attacco totale delle piante, è rimasta del tutto negativa. È stato solo nell'ultima decade di maggio, dopo le prime piogge di questa primavera, che riuscii a raccogliere qualche germoglio e qualche foglia infetta sia nei pioppeti del Piemonte che dell'Emilia e della Lombardia. È da supporre perciò che la malattia nell'anno 1938 non potrà comparire (se comparirà) in forma grave se non nel mese di giugno, col ritardo per lo meno di un mese rispetto agli anni passati.

Un altro fatto interessante, risultato dalle indagini di questi anni, è che la malattia non è soltanto « primaverile », perchè continua a svilupparsi, seppure in misura ridotta, per tutta l'estate e persino in autunno. La chioma che si riforma dopo i primi forti attacchi è nuovamente e ripetutamente colpita e ciò contribuisce a rendere più gravi gli effetti dannosi del « disseccamento dei germogli ».

Sulla distribuzione della malattia non vi sono molte novità dopo le segnalazioni dell'anno passato: l'invasione delle zone pioppicole della pianura padana prossima al Po è ormai pressochè completa, fatta esclusione per il Veneto. Sembra inoltre che nel 1937 siano comparsi casi di disseccamento dei germogli nel Lazio.

Notevoli progressi sono stati fatti nel campo della selezione dei pioppi resistenti alla malattia. Il prof. Jacometti, dato il carattere di urgenza che riveste la ricostituzione dei pioppeti, ha moltiplicato la sua attività estendendo le ricerche ad un più grande numero di ibridi, alcuni dei quali, già introdotti in coltivazioni sperimentali, hanno avuto successo culturale e fitopatologico. La effettiva refrattarietà all'infezione di queste nuove piante ho potuto controllarla in diversi sopralluoghi fatti assieme al prof. Jacometti stesso, nelle zone maggiormente colpite dalla malattia. Col prossimo anno si inizierà un saggio sistematico dei nuovi pioppi mediante inoculazioni artificiali, metodo che, col futuro funzionamento della Stazione di Pioppicoltura di Casale Monferrato, potrà essere applicato su larga scala ⁽¹⁾.

Le prove sperimentali di riproduzione della infezione oltre che dello sferossidale anche della *Pollaccia*, eseguite nella corrente primavera, serviranno a stabilire l'epoca e la tecnica più indicate per la loro riuscita nella pratica applicazione.

(1) Cfr. *Atti del Convegno di Pioppicoltori in Casale Monferrato* (11 luglio 1937), Milano, Tipogr. « Popolo d'Italia ».

Fisiologia (Fisiologia vegetale). — *Fenomeni di attivazione nell'accrescimento vegetale*. Nota II di S. DOJMI DI DELUPIS, presentata dal Socio E. CARANO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia (Fisiologia vegetale). — *Fenomeni di attivazione nell'accrescimento vegetale*. Nota III di S. DOJMI DI DELUPIS, presentata dal Socio E. CARANO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Botanica. — *Cimelii scientifici linnei ritrovati*. Nota di G. GABRIELI, presentata dal Socio E. CARANO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Sull'efficacia della parola parlata per l'elaborazione del riflesso condizionato dell'ammiccamento nel cane* ⁽¹⁾. Nota di A. ALIBRANDI, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. C. CIACCIO.

In una rassegna critica sui riflessi condizionati ⁽³⁾ il Pekelis, fondandosi sui risultati sperimentali di diversi Autori russi, sosteneva che l'elaborazione di riflessi a catena, mediante fonemi, fosse addirittura impossibile ottenerla nel cane. Egli così scriveva: «...è certo di grande importanza il fatto che la parola — uno degli stimoli più complessi e di ordine di molto superiore a quelli di solito usati in laboratorio — non possa trovar posto nella psiche dell'animale (altro che sotto una forma affatto rudimentale) per incompatibilità costituzionale (funzionale e fors'anco strutturale) del suo sistema nervoso ».

Poichè da qualche tempo ci occupiamo del problema dei riflessi condizionati, ci è sembrato opportuno verificare sperimentalmente quest'ultima asserzione del Pekelis.

Come nelle nostre precedenti ricerche, che sono state in parte comunicate in questa sede, ci siamo serviti per l'elaborazione del riflesso asso-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Umana della R. Università di Messina.

(2) Nella seduta del 5 giugno 1938.

(3) PEKELIS, *I riflessi condizionati*. « Riv. di Psicologia », XXV, 1929, p. 195.

ciativo di quello congenito (incondizionato) dell'ammiccamento. È questo un riflesso dominato dal centro sensitivo-motore corticale (sigmodeo) dell'orbicolare palpebrale, di cui è suscitato lo stato attivo, nelle ordinarie condizioni, dagli eccitamenti centripeti partenti da una ben nota e ben delimitata zona riflessogena.

La tecnica sperimentale escogitata per l'elaborazione artificiale di riflessi condizionati dell'ammiccamento nel cane è stata già più volte diffusamente descritta nell'occasione di precedenti pubblicazioni⁽¹⁾.

Nelle esperienze di cui qui riferiremo i risultati, che vennero eseguite su di un giovane cane dal lungo pelame nero, d'indole assai calma, modificammo leggermente la tecnica da noi usata nelle precedenti ricerche: precisamente lo stimolo faradico, destinato a provocare la contrazione riflessa incondizionata dell'orbicolare palpebrale, veniva trasmesso, attraverso un leggerissimo morsetto a mascelle di coccodrillo, a un ciuffetto di peli della zona riflessogena, mantenuto umido attraverso una strisciolina di garza imbevuta di soluzione di soda. La strisciolina di garza circondava il ciuffetto ed era tenuta *in situ* dai denti delle mascelle di coccodrillo; queste erano a loro volta saldate a un sottile filo metallico.

In una prima prova si procedette all'elaborazione di due distinti riflessi dell'ammiccamento a mezzo di brevi catene di fonemi (parole) condizionate: coll'occhio destro a mezzo della parola *uno*, col sinistro mediante la parola *due*. La parola veniva pronunciata con voce scandita, esattamente due secondi prima dell'applicazione dello stimolo faradico (incondizionato) sulla cute riflessogena. Dopo un certo tempo si ottenne la comparsa dei due riflessi per la sola azione dello stimolo condizionato (non seguito da quello elettrofaradico).

Precisamente furono necessarie 16 sedute con un complesso di 1156 stimolazioni accoppiate alla parola *uno* per ottenersi la perfetta costanza del riflesso a destra e 1147 associazioni colla parola *due* per ottenersi il medesimo risultato a sinistra. Dopo ventisette giorni dall'inizio dell'esperimento il cane discriminava perfettamente i due segnali.

Il cane venne mantenuto in allenamento per successivi quindici giorni, durante i quali la durata del potere di discriminazione andò sempre aumentando. Esso fu poi lasciato in riposo per undici giorni.

(1) G. MARTINO, *Necessità dell'ordinaria via afferente, costante ed insostituibile, nel meccanismo del riflesso associativo*. « Atti R. Acc. Peloritana », vol. XXXVIII, p. 67.

G. MARTINO e A. ALIBRANDI, *Analisi di un particolare riflesso condizionato (dell'ammiccamento), nel cane*. « Boll. Soc. It. Biol. sper. », 1936.

G. MARTINO e A. ALIBRANDI, *L'attività riflessa dei centri sensitivo-motori corticali sotto l'azione di stimoli condizionati*. « Arch. di Fisiol. », vol. XXXVII, 1937, p. 533.

G. MARTINO e A. ALIBRANDI, *L'agevolazione e l'inibizione in rapporto alla qualità dello stimolo luminoso nel riflesso condizionato dell'ammiccamento*. « Arch. di Fisiol. » (in corso di stampa).

Venne quindi eseguito il tentativo dell'elaborazione di nuovi riflessi, colla sostituzione, rispettivamente, alle parole *uno* e *due* delle parole *dolore* e *dovere*: il cane dopo poche associazioni si dimostrò ancora capace di una perfetta e duratura discriminazione pei nuovi segnali; anzi il riflesso così ottenuto si manifestò molto più energico e costante di quello precedentemente provocato da noi stessi in altri soggetti mediante un segnale sonoro più semplice⁽¹⁾.

Fisiologia (Chimica biologica). — *Ricerche sperimentali sul liquido seminale*. — IV. *Sul valore del pH del liquido seminale di cane*⁽²⁾. Nota di V. ZAGAMI, presentata⁽³⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

In alcune Note precedenti⁽⁴⁾ abbiamo esposto i valori del pH del liquido seminale umano e di quello di gallo, da noi ottenuti sperimentando col metodo elettrometrico, ed adottando opportuni accorgimenti di tecnica, necessari per potere pervenire a dati esatti. Abbiamo pure messo in evidenza le variazioni di detti valori, da noi riscontrate in dipendenza del riposo e dell'attività sessuale, nonché quelle connesse con il tempo e il modo di conservazione del liquido seminale, e quelle connesse con la temperatura e la diluizione del liquido stesso.

Capraro⁽⁵⁾, in questo stesso Istituto, contribuendo allo svolgimento dello studio sistematico da noi intrapreso e diretto a precisare non solo l'organizzazione chimico-fisica del liquido seminale come tale, ma anche quella delle varie frazioni che lo costituiscono, ha studiato e riferito in merito al valore del pH del secreto delle vescichette seminali di ratto albino.

Anche per quanto riguarda il liquido seminale di cane mancano adeguate ricerche dirette a precisarne il valore della concentrazione in ioni H^+ . Soltanto Milovanov⁽⁶⁾ riferisce, in base ai lavori degli Autori russi, che il

(1) A. ALIBRANDI, *Nuova conferma sperimentale per la necessaria partecipazione della via afferente congenita al meccanismo dei riflessi condizionati*. «R. Acc. dei Lincei», 1938.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica biologica della R. Università di Roma.

(3) Nella seduta del 3 giugno 1938.

(4) V. ZAGAMI, *Ricerche sperimentali sul liquido seminale*. — I. *Sul valore del pH del liquido seminale umano normale*. «Rendiconti R. Accademia Nazionale dei Lincei», XXV, 268, 1937; II. *Sul valore del pH del liquido seminale di gallo*. «Ibidem», XXVI, 123, 1937; III. *Sulle variazioni del pH del liquido seminale umano in dipendenza della temperatura e della diluizione*. «Ibidem», in corso di pubblicazione.

(5) V. CAPRARO, *Sul valore del pH del secreto delle vescichette seminali di ratto albino*. «Rendiconti R. Accademia Nazionale Lincei», in corso di pubblicazione.

(6) V. H. MILOVANOV, trad. di T. BONADONNA, *Le basi scientifiche e le possibilità applicative della fecondazione artificiale negli animali domestici*. Vannini G., Edit., Brescia, 1937.

liquido seminale di cane presenta un pH di 6.6–7.2; ma mancandoci, al solito, ogni notizia relativa alla tecnica adottata da tali Autori, non siamo affatto in grado di esprimere alcun apprezzamento circa il valore effettivo dei dati suddetti, e riteniamo perciò del tutto giustificato il nostro proposito di estendere anche al liquido seminale di cane la nostra metodica indagine.

Le ricerche in proposito le abbiamo eseguite su tre cani adulti, ma non vecchi, in ottime condizioni generali e di nutrizione.

Per la raccolta del liquido seminale ci siamo serviti della vagina artificiale, ideata e descritta da G. Amantea ⁽¹⁾ fin dal 1914, e che gli ha permesso le note numerose ricerche sulla secrezione spermatica. Nel caso nostro, il sacchetto interno collettore della vagina artificiale era costituito da un comune guanto di gomma – condom –, previamente lavato con acqua distillata ed asciugato, in cui veniva messo inizialmente un po' di olio di vasellina, in maniera che il liquido seminale, a mano a mano dall'animale ejaculato, rimanesse subito coperto e al riparo dal contatto con l'aria.

Come già G. Amantea ha rimarcato nelle accennate Note, sperimentando con tale tecnica, non si può negare, che il « coito fittizio » si svolga in condizioni assai vicine a quelle del coito normale, e che quindi anche la costituzione e la composizione del liquido così ottenuto sperimentalmente debba ritenersi corrispondente a quella del liquido che si elimina nell'accoppiamento normale.

Così come nelle ricerche sui galli, allo scopo di studiare anche la influenza del riposo e dell'attività sessuale sul valore del pH del liquido seminale di cane, abbiamo sperimentato sia intercalando fra una raccolta e l'altra un congruo periodo di riposo sessuale (da uno a otto giorni), sia intercalando invece un brevissimo periodo di riposo (1–2 ore).

Precisamente, per ogni esperienza abbiamo tenuto conto del periodo di riposo sessuale antecedente alla raccolta del liquido seminale, della durata del coito fittizio, della quantità di liquido eliminato, e del valore del pH.

Tenendo poi presente, che l'ejaculazione nel cane dura parecchi minuti, e che è possibile distinguere in essa – secondo Amantea ⁽²⁾ – tre periodi, in cui il liquido seminale eliminato si presenta successivamente sempre meno ricco di spermatozoi, alcune volte – modificando opportunamente la tecnica sperimentale – abbiamo raccolto lo sperma in modo frazionato, ed abbiamo determinato il pH separatamente nelle varie porzioni ottenute.

(1) G. AMANTEA, *Ricerche sulla secrezione spermatica*. — I. *La raccolta dello sperma del cane*. « Rendiconti R. Accademia Nazionale Lincei », XXIII, 369, 1914; II. *Prime osservazioni sulla secrezione spermatica normale del cane*. « Ibidem », XXIII, 457, 1914; III. *La prostata e la raccolta del secreto prostatico del cane*. « Ibidem », XXIII, 621, 1914; IV. *Influenza del riposo sulla secrezione spermatica del cane*. « Ibidem », XXIV, 985, 1915. *Recherches sur la sécrétion spermatique*. « Arch. It. Biol. », LXII, 1, 1914; LXIII, 1, 1915; LXIV, 65, 1915.

(2) G. AMANTEA, loc. cit.

Le determinazioni del pH sono state eseguite col metodo elettrometrico (potenziometro di Allocchio Bacchini), servendoci della siringa-elettrodo a chinidrone di Mislowitzer, e con la tecnica già descritta nelle precedenti Note per evitare ogni eventuale perdita di CO_2 .

Come abbiamo già fatto per il liquido seminale umano, allo scopo di conoscere il coefficiente di temperatura, in base al quale potere calcolare agevolmente il valore del pH del liquido seminale alla temperatura di $37-38^\circ \text{C}$. (che più interessa dal punto di vista fisiologico), per alcuni campioni di liquido abbiamo determinato il valore del pH contemporaneamente alla temperatura di 20° e di 38°C .

Anche per il liquido seminale di cane è necessario sperimentare al riparo assoluto dall'aria per ottenere valori esatti del pH. La seguente esperienza, fra le diverse da noi eseguite in proposito, mostra infatti quali sensibili differenze si possono avere omettendo tale accorgimento di tecnica:

Valore del pH del liquido seminale di cane all'inizio	6.57
» » » dopo 10' min. di esposizione del liquido all'aria	6.78
» » » » 20' » » » »	6.85
» » » » 30' » » » »	6.90
» » » » 45' » » » »	6.96

Nella Tabella I sono riportati i valori del pH (a 20°C .), ottenuti sperimentando sul liquido seminale eliminato dai cani in riposo sessuale da 1 a 8 giorni, in periodo cioè di sicura efficienza sessuale, raccolto e studiato, il più presto possibile dopo la eliminazione, con le precauzioni di tecnica descritte, per evitare perdita di CO_2 .

Dall'esame di essa si nota, che il valore medio del pH del liquido seminale è stato di 6.79 nel cane n. 1, di 6.65 nel cane n. 2, e di 6.70 nel cane n. 3.

Da queste medie sono esclusi i valori notevolmente più bassi ottenuti in alcune esperienze (esperienza 1^a e 9^a del cane n. 1; esperienza 1^a del cane n. 2; ed esperienza 1^a del cane n. 3), in cui l'eiaculazione, come denota la minore durata del coito fittizio e la minore quantità di liquido eliminato, è stata incompleta, a causa di condizioni ostacolanti o inibitrici (inibizione psichica nell'animale per la prima volta esplorato, dolore involontariamente provocato all'animale durante l'esplorazione).

Ora in tali casi di eiaculazione incompleta è da ritenersi, che nel liquido eliminato relativamente sia in eccesso la porzione proveniente dagli epididimi e difetti quella delle ghiandole sessuali accessorie: ciò corrisponde precisamente a quello che, secondo G. Amantea, si ha nel primo periodo dell'eiaculazione in cui perciò si elimina la porzione di sperma più ricca di spermatozoi.

Le poche osservazioni suddette potrebbero dunque far pensare, già da sole, ad una diversa concentrazione in ioni H^+ delle diverse frazioni, che in definitiva costituiscono il liquido seminale « in toto ».

TABELLA I.

Valori del pH (a 20° C.) del liquido seminale di cane														
Soggetto n. 1					Soggetto n. 2					Soggetto n. 3				
pH					pH					pH				
Riposo sessuale giorni	Durata del coito fittizio	Quantità di liquido eliminato cmc.			Riposo sessuale giorni	Durata del coito fittizio	Quantità di liquido eliminato cmc.			Riposo sessuale giorni	Durata del coito fittizio	Quantità di liquido eliminato cmc.		
5	8'	1.6	6.24*		ignor.	13'	1.0	6.29*		ignor.	12'	2.4	6.25*	
2	12'	5.9	6.75		1	21'	1.3	6.54		5	12'	6.1	6.45	
2	10'	7.0	6.86		2	27'	1.7	6.67		2	9'	4.2	6.77	
2	10'	7.1	6.88		2	27'	1.7	6.53		2	8'	3.6	6.88	
1	9'	4.5	6.97		3	20'	2.0	6.62						
1	9'	6.0	7.00		4	30'	1.8	6.65						
1	8'	5.2	6.80		8	29'	2.2	6.87						
7	9'	7.5	6.88											
1	2'	1.4	6.37*											
1	13'	5.0	6.72											
2	15'	6.0	6.60											
1	13'	5.0	6.53											
MEDIE . . .				6.79					6.65					6.70

1	1	6.25*	2.4	12'	ignor.	2	6.29*	1.0	13'	ignor.	2	6.24*	1.6	8'	5
2	2	6.45	6.1	12'	5	2	6.75	5.9	21'	1	2	6.75	5.9	12'	2
3	3	6.77	4.2	9'	2	2	6.86	7.0	27'	2	2	6.86	7.0	10'	2
4	4	6.88	3.6	8'	2	2	6.88	7.1	27'	2	2	6.88	7.1	10'	2
5	5					3	6.97	4.5	20'	3	1	6.97	4.5	9'	1
6	6					4	7.00	6.0	30'	4	1	7.00	6.0	9'	1
7	7					8	6.80	5.2	29'	8	1	6.80	5.2	8'	1
8	8						6.88	7.5			7	6.88	7.5	9'	7
9	9						6.37*	1.4			1	6.37*	1.4	2'	1
10	10						6.72	5.0			1	6.72	5.0	13'	1
11	11						6.60	6.0			2	6.60	6.0	15'	2
12	12						6.53	5.0			1	6.53	5.0	13'	1

* Ejaculazione incompleta; valore non compreso nella media.

Osservazioni

Le esperienze da noi condotte, raccogliendo lo sperma in modo frazionato durante una completa ejaculazione, e determinando il pH distintamente nelle varie successive porzioni di liquido raccolto, ci hanno dimostrato che, in effetti, il valore del pH non è corrispondente nelle varie frazioni, ma che esso va sensibilmente aumentando dalla prima all'ultima, come dimostrano i dati presentati nella seguente

TABELLA II.

Valori del pH (a 20° C.) delle varie successive porzioni di liquido seminale eliminate durante una completa ejaculazione				
Numero progress. delle esperienze	Valori del pH della			
	1 ^a porzione	2 ^a porzione	3 ^a porzione	4 ^a porzione
1	6.11	6.47	6.66	—
2	6.28	6.50	6.57	6.67
3	6.21	6.39	6.49	6.52
4	6.39	6.48	6.55	—

Di guisa che, ammettendo che in effetti nel processo di ejaculazione del cane si abbia nel primo tempo prevalentemente l'eliminazione del liquido proveniente dagli epididimi e, successivamente, prevalentemente l'eliminazione di quello proveniente dalle glandole sessuali accessorie — come è logico pensare, soprattutto in base al numero degli spermatozoi, a mano a mano decrescente nelle successive porzioni di liquido eliminato (G. Amantea⁽¹⁾) —, abbiamo ragione di ritenere, che la concentrazione in ioni H⁺ del liquido proveniente dagli epididimi sia in effetti più elevata di quella del liquido proveniente dalle glandole sessuali accessorie e di quella che apparirà in definitiva — come risultante — nel liquido seminale « in toto ».

Le esperienze finora potute eseguire sul cane, allo scopo di studiare l'influenza del riposo e dell'attività sessuale sul valore del pH del liquido seminale, non le riteniamo ancora sufficienti a permettere fondate conclusioni. Comunque i risultati a tutt'oggi ottenuti, riportati nella seguente Tabella III, sembrerebbero indurre ad escludere che vi sia alcuna sensibile differenza del valore del pH nel liquido raccolto a brevi intervalli (due-tre volte nello spazio di poche ore). Queste osservazioni esigono però ulteriore sviluppo.

(1) G. AMANTEA, loc. cit.

TABELLA III.

Valori del pH del liquido seminale di cane raccolto in coiti ripetuti a brevi intervalli di tempo					
Data	Numero progressivo delle esperienze	Periodo di tempo intercorso dal coito precedente	Durata del coito fittizio	Quantità di liquido eliminato cmc.	pH
7-IV	1	7 giorni	9' minuti	7.5	6.88
		90' minuti	10' minuti	4.2	6.87
9-IV	2	1 giorno	13' minuti	5.0	6.72
		80' minuti	11' minuti	4.2	6.78
		70' minuti	9' minuti	2.2	7.09
11-IV	3	2 giorni	15' minuti	6.0	6.60
		90' minuti	11' minuti	4.3	6.52
		50' minuti	8' minuti	0.8	6.54

Le esperienze, infine, dirette a stabilire le variazioni del pH del liquido seminale di cane, connesse con la temperatura del liquido stesso, e i cui risultati sono presentati nella Tabella IV, ci permettono di rilevare, che, per effetto della variazione di temperatura da 20° a 38° C., il pH del liquido seminale, pari rimanendo la concentrazione globale di CO₂, si è abbassato in media, di 0.24, ossia presso a poco nella stessa misura precedentemente stabilita per il liquido seminale umano.

TABELLA IV.

Valori del pH del liquido seminale di cane alla temperatura di 20° e di 38° C.			
Numero progressivo delle esperienze	pH		Differenza fra i due valori
	a 20° C.	a 38° C.	
1	6.57	6.35	0.22
2	6.83	6.53	0.30
3	6.78	6.57	0.21
4	6.80	6.49	0.31
5	6.60	6.39	0.21
6	6.68	6.46	0.22
7	6.77	6.52	0.25
MEDIE . . .	6.72	6.48	0.24

Come per il liquido seminale umano, anche per quello di cane possiamo dire che, per effetto della variazione di temperatura da 20° a 38° C., si ha una modificazione del pH di entità pressochè identica a quella che subisce il pH corrispondente alla neutralità alle due suddette temperature.

Per concludere, rimane fissato da queste nostre nuove ricerche, che:

1° il liquido seminale di cane, al pari di quello umano e di quello di gallo, per la determinazione del valore del pH, va raccolto ed esaminato al riparo assoluto dall'aria, per evitare eventuali perdite di CO₂, capaci di arrecare sensibili variazioni dell'effettivo valore normale;

2° in tali condizioni sperimentali, il valore medio del PH del liquido seminale di cane, a pressione parziale di CO₂ corrispondente a quella fisiologica, e alla temperatura di 20° C., è di 6.65-6.79;

3° le varie porzioni del liquido seminale, frazionatamente raccolte durante una normale completa ejaculazione, mostrano un pH successivamente sempre più elevato;

4° infine, per una variazione di temperatura da 20° a 38° C., pari rimanendo la concentrazione globale di CO₂, il liquido seminale di cane presenta una diminuzione media del pH di 0,24.

Fisiologia (Chimica biologica). — *Ricerche sperimentali sul liquido seminale.* — V. *Pressione osmotica, conduttività elettrica e concentrazione in ioni H del liquido seminale umano.* Nota di V. ZAGAMI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

PERSONALE ACCADEMICO

Il PRESIDENTE dà ai Colleghi il triste annuncio della morte dei Soci PIETRO BURGATTI e GUIDO PELLIZZARI e del Socio Straniero ERNST RUTHERFORD e alla memoria degli Scomparsi invia il saluto commosso e reverente dell'Accademia.

Il Socio BETTI come condiscipolo del Pellizzari si associa alle parole di compianto pronunciate dal Presidente e rievoca con commossa parola lo Scomperso.

Il Socio ENRIQUEZ commemora brevemente come amico e collega nell'Università di Bologna il compianto Pietro Burgatti.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio SACCO presenta in omaggio tre suoi lavori sul « Glacialismo veneto », sul « Glacialismo lombardo » e sul « Glacialismo piemontese » e ne parla.

L'Accademico Segretario PARRAVANO presenta le opere inviate in dono all'Accademia segnalando tra le altre il bel volume del Socio GINORI CONTI su « Il vetro per ottica in Italia ».

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano note per l'inserzione nei « Rendiconti » i Soci CARANO, CASTELNUOVO, CROCCO, ENRIQUES, FUBINI, GIORGI, LEVI-CIVITA, PETRI, QUAGLIARIELLO e STELLA.

PRESENTAZIONE DI PLICHI SUGGELLATI

Il PRESIDENTE presenta un plico suggellato del dott. Renato Moretti, plico che sarà conservato negli archivi dell'Accademia.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio BORTAZZI anche a nome del Collega HERLITZKA presenta la relazione con la quale si propone la stampa della Memoria del prof. R. Margaria dal titolo: « Sulla fisiologia e specialmente sul consumo energetico della marcia e della corsa a varie velocità ed inclinazione del terreno ».

L'Assemblea approva.

RELAZIONI SU TEMI DATI

Il PRESIDENTE dà quindi inizio alla discussione della Relazione del Socio GINORI CONTI su « L'attività endogena quale fonte di energia ».

In assenza del Socio GINORI CONTI, il Presidente invita a prendere la parola il conte Giovanni Ginori Conti che, a nome di suo padre, legge alcune pagine di chiarimenti che il Socio GINORI CONTI ha voluto dettare in aggiunta alla relazione presentata.

Il prof. Sborgi dell'Università di Milano, pure invitato dal Presidente, prende la parola per illustrare l'importanza dell'attrezzatura dei laboratori scientifici di Larderello creati dalla passione di studioso e di mecenate del principe Ginori Conti ed espone il metodo ivi praticato per l'analisi dei gas nobili.

Il Socio LONGO mette in rilievo l'opera svolta dal conte Piscicelli-Taeggi per l'utilizzazione delle acque calde naturali a scopo di riscaldamento di serre.

Il Socio SACCO cita degli esempi di utilizzazione di acque calde naturali per riscaldamento praticata in Piemonte e in California.

Il conte Giovanni Ginori Conti espone largamente i metodi di captazione dei gas endogeni.

Il Socio BLANC mette in rilievo come nell'opera grandiosa del principe Ginori Conti l'interesse tecnico coincida con quello scientifico ed augura che egli possa continuare sereno nella sua grande impresa.

Il Socio STELLA afferma che forse Abano è l'ambiente più adatto per la continuazione delle ricerche già fatte dal principe Ginori Conti nell'isola di Vulcano e nei Campi Flegrei.

Il Presidente MILLOSEVICH concorda con quanto ha esposto il Socio STELLA e conclude la discussione ringraziando vivamente gli intervenuti e i Soci che vi hanno preso parte.

Il Socio PARRAVANO propone che al principe Ginori Conti sia inviato un telegramma per esprimergli tutta l'ammirazione e il compiacimento dell'Accademia per la sua opera.

La proposta viene approvata all'unanimità e il Presidente rivolge speciali ringraziamenti, per il loro intervento alla seduta e per la parte presa alla discussione, ai figli del principe Ginori Conti, conte Giovanni e conte Federico.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 3 giugno 1938.

- Abstracts of theses and Faculty bibliography. (Publications of the University of Washington. Theses Series vol. II). Washington, 1937. 8°, pp. I-XV, 1-749.
- Atti del convegno di pioppicultori in Casale Monferrato, 11 luglio 1937 - anno XV). Casale Monferrato, 1937. 8°, pp. 1-158.
- BOLLIO G. — La fumigazione di piante da vivaio ed ornamentali, di casse di frutta, e i diversi usi di una nuova tenda di fumigazione. (Estr. dagli « Annali della Facoltà di Agraria della R. Università di Napoli ». Vol. LX, pp. 83-120). Portici, 1938. 8°.
- BUHL M. A. — Nouveaux éléments d'analyse. Calcul infinitesimal, géométrie, physique théorique. Tomé II. Variables complexes. Paris, 1938. 8°, pp. I-VI, 1-213.
- DE TONI GIUSEPPE. — La nomenclatura botanica sistematica ed i suoi problemi. (Estr. dalla « Rivista di Biologia ». Vol. XXIV. Firenze, 1938. 8°, pp. 1-12.
- FRECHET MAURICE. — Méthode des fonctions arbitraires. Théorie des événements en chaîne dans le cas d'un nombre fini d'états possibles. (Traité du Calcul des probabilités et des ses applications. Tome I, fasc. III). Paris, Editeur Gauthier-Villars, 1938. 8°, pp. I-X, 1-315.
- GINORI CONTI PIERO. — Il vetro per ottica in Italia e l'Istituto del boro silicio in Firenze. Firenze, 1938. 4°, pp. 1-59, tavole 39.
- GUIGLIA DELFA. — Appunti intorno al Chalinus Branusi Enslin. (Hymen Phytophaga). (Estr. dagli « Annali del Museo Civico di Storia Naturale di Genova ». Vol. LX). Genova, 1938. 8°, pp. 1-4.
- GUIGLIA DELFA. — Imenotteri aculeati (Estr. dagli « Annali del Museo Civico di Storia Naturale in Genova ». Vol. LVIII, pp. 182-188). Genova, 1938. 8°.
- JANNONE GIUSEPPE. — Su alcuni Ortotteri di Rodi e sulla presenza del genere. Heterogamades Chop. (Blattoidea) in quest'isola. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Vol. XXX, pp. 163-168). Spoleto, 1938. 8°.
- JULIA GASTON. — Introduction mathématique aux théories quantiques. (Cahiers scientifiques, fasc. XIX). Paris, 1938. 8°, pp. I-VI, 1-218.
- KVELBERG IRMA e POPOFF BORIS. — Die Tafoni - Verwitterungserscheinung. (Acta Universitatis Latuensis, IV, pp. 129-368). Riga, 1937. 8°.
- MANGINI ARMANDO. — Una missione agricola-zootecnica-veterinaria nel Sud Africa. (Relazioni e monografie agrario-coloniali, n. 45). Firenze, 1938. 8°, pp. I-VII, 1-97.
- PEROTTI RENATO. — La teoria microrganica della concimazione. Edizione II. Bologna, Editore Licinio Cappelli, 1938. 8°, pp. I-XV, 1-216.
- POPOFF BORIS. — Vedi KVELBERG IRMA.
- PUTNINS R. — On the Division of Earth's Surface into Zones of Illumination. Riga, 1935. 8°, pp. 1-219.
- SACCO FEDERICO. — Il glacialismo lombardo. (Estr. da « L'Universo ». Anno XVII, nn. 8, 9, 10). Firenze, 1936. 8°, pp. 1-55.

SACCO FEDERICO. — Il glacialismo piemontese. (Estr. da « L'Universo », Anno XIX, n. 3-4). Firenze, 1938. 8°, pp. 1-30.

SACCO FEDERICO. — Il glacialismo veneto. (Estr. da « L'Universo ». Anno XVIII, n. 7-8). Firenze, 1937. 8°, pp. 1-40.

VANNI MASSIMO. — La navigazione sull'ellissoide terrestre sulle linee dei minimi percorsi. (Estr. dagli « Annali del R. Istituto Superiore Navale ». Vol. VI, pp. 139-165). Napoli, 1937. 8°.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 19 giugno 1938 — Anno XVI

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Astronomia. — *I problemi fondamentali della Cosmogonia e la legge di Newton.* Nota II ⁽¹⁾ del Socio G. ARMELLINI.

1. In una precedente Nota ho dimostrato che — se si ammette che il coefficiente attrattivo si modifichi lievemente secondo la velocità con cui varia la distanza tra due punti che si attraggono, in modo cioè che la forza attrattiva sia data dall'espressione:

$$(1) \quad F = -f \frac{m m'}{r^2} \left[1 + \varepsilon \frac{dr}{dt} \right]$$

dove ε indica una costante *positiva* estremamente piccola — molti problemi cosmogonici divengono facilmente risolvibili. In particolare, partendo dalla (1), ho dimostrato: *a)* che le orbite dei pianeti tendono, col tempo, a divenire circolari; *b)* che i pianeti debbono ruotare intorno al Sole nello stesso senso e precisamente nel senso in cui il Sole ruota intorno al proprio asse.

2. Dobbiamo ora dimostrare una proprietà ancora più importante per le ricerche cosmogoniche e cioè che, ammessa la (1), *le orbite planetarie tendono a divenire complanari*, e precisamente a disporsi *sul piano dell'equatore del Sole*.

(1) Presentata nella seduta del 21 novembre 1937.

3. Per dimostrarlo, prendiamo come piano fondamentale il piano dell'equatore del Sole e consideriamo una particella materiale s di massa infinitesima $d\mu$ appartenente al globo solare e che, per il momento, supporremo situata sul piano equatoriale. Siano Ω ed J il nodo ascendente e l'inclinazione dell'orbita di un pianeta P , riferiti sempre al piano equatoriale del Sole; L ed l la longitudine eliocentriche della particella s e quella del pianeta P nella propria orbita, ambedue contate a partire da Ω .

Prendiamo come unità di lunghezza il semiasse maggiore dell'orbita del pianeta P e sia a la distanza della particella s dal centro S del Sole: ω ed n indichino la velocità angolare di rotazione del Sole ed il moto medio del pianeta P .

Ovviamente, poichè abbiamo già dimostrato che le orbite planetarie tendono a divenire circolari e che i pianeti debbono muoversi nello stesso senso della rotazione solare, potremo sempre supporre — senza ledere la generalità — che le eccentricità siano piccole, che le quantità ω ed n abbiano eguale segno e che l'angolo J sia compreso tra 0° e 90° . Ciò posto studiamo l'effetto prodotto dal termine in ε — o *termine complementare* della legge di Newton — sopra l'inclinazione J .

4. Come è noto dalla Meccanica Celeste, se si decompone la forza perturbatrice agente sopra un pianeta in tre componenti, dirette secondo il raggio vettore, secondo la perpendicolare al raggio vettore nel piano orbitale e secondo la normale al piano dell'orbita rivolta verso il suo polo boreale B_∞ , soltanto questa ultima — che chiameremo W — modifica l'inclinazione orbitale.

Ma, a causa del termine complementare introdotto nella legge di Newton e dipendente dalla variazione della distanza, se indichiamo con r la distanza tra la particella s e il pianeta P e con m la massa del pianeta, l'attrazione esercitata da s su P viene aumentata di $\frac{\varepsilon f m}{r^2} \frac{dr}{dt} d\mu$.

Quindi la W , agente sul pianeta P a causa dell'attrazione complementare della particella s , è evidentemente data dall'espressione:

$$(2) \quad W = \frac{\varepsilon f m d\mu}{r^2} \frac{dr}{dt} \cos H = - \frac{\varepsilon f m d\mu}{2} \frac{r \cos H}{dt} \left(\frac{1}{r^2} \right)$$

dove r indica la distanza sP ed H l'angolo sPB_∞ .

Ma si vede immediatamente che il prodotto $r \cos H$ è eguale al segmento di perpendicolare q abbassato da s sul piano A dell'orbita del pianeta P ; distanza contata positivamente o negativamente, secondo che s è al disopra (dalla banda di B_∞) o al disotto del piano A . Avremo dunque dalla trigonometria sferica:

$$(3) \quad q = r \cos H = - a \sin J \sin L,$$

Analogamente, trascurando l'eccentricità di P, avremo indicando con E l'angolo $\angle SP$:

$$(4) \quad r^2 = 1 + a^2 - 2a \cos E$$

$$(5) \quad \cos E = \cos L \cos l + \sin L \sin l \cos J.$$

Ora la derivata di L rispetto al tempo è eguale alla velocità angolare di rotazione ω del Sole, mentre — supponendosi circolare l'orbita del pianeta P — la derivata di l è eguale al moto medio n .

Con facili calcoli otterremo quindi da (4) e da (5):

$$(6) \quad \frac{1}{2a} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r^2} \right) = \frac{(\omega \cos J - n) \cos L \sin l + (n \cos J - \omega) \sin L \cos l}{(1 + a^2 - 2a \cos L \cos l - 2a \sin L \sin l \cos J)^2}.$$

Avremo allora dalla (2) dalla (3) e dalla (6)

$$(7) \quad W = \frac{\epsilon f m N \sin J \sin L}{Q} a^2 d\mu$$

dove per semplicità abbiamo indicato con N e Q il numeratore ed il denominatore della frazione al secondo membro della (6).

D'altra parte la Meccanica Celeste ci dice ⁽¹⁾ che, trascurando le eccentricità, la variazione dell'inclinazione J dell'orbita del pianetino P è data dall'equazione:

$$(8) \quad \frac{dJ}{dt} = - \frac{W \cos l}{mn}.$$

In conseguenza, tenendo conto delle equazioni precedenti, avremo con alcune riduzioni:

$$(9) \quad \frac{dJ}{dt} = \frac{\epsilon f N d\mu \sin J \sin L \cos l}{n (1 + a^2 - 2a \cos L \cos l - 2a \sin L \sin l \cos J)^2}.$$

Ma il secondo membro della (9) è funzione periodica di L ed l , ed anzi non si altera se L ed l cambiano *simultaneamente* di segno. Avremo dunque per note proprietà delle funzioni:

$$(10) \quad \frac{dJ}{dt} = \sum D_{ij} \cos (iL + jl)$$

dove la sommatoria va estesa a tutti i valori interi, positivi e negativi, dei due indici i ed j .

(1) Per evitare equivoci, notiamo che alcuni trattatisti indicano con Z, o con W, la forza riferita all'unità di massa supponendo anche $f = 1$, e che nella (8) la distanza media di P è posta eguale all'unità.

Ora, avendo supposto le orbite circolari, abbiamo, indicando con t il tempo:

$$(11) \quad L = \omega t + L_0 \quad ; \quad l = nt + l_0$$

onde, sostituendo in (10), la serie al secondo membro assume la forma ordinaria delle serie della Meccanica Celeste e può essere integrata con metodi noti.

5. Ma, per il nostro studio cosmogonico, interessa soltanto di calcolare le perturbazioni *secolari* di J ; dovremo quindi conservare nella (10) soltanto il termine indipendente dalle funzioni trigonometriche e cioè D_{00} .

Ora si ha dal teorema di Fourier:

$$(12) \quad D_{00} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} S dL dl = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \Sigma D_{ij} \cos(iL + jl) dL dl$$

essendo S il secondo membro della (10).

6. Il calcolo del doppio integrale, benchè alquanto laborioso, non presenta difficoltà. Ma esso si semplifica assai osservando che le dimensioni del Sole sono piccole rispetto alle distanze dei pianeti e quindi a è sempre assai piccola di fronte all'unità. Si vede anzi facilmente che, passando dal pianeta più vicino (Mercurio) al più lontano (Plutone), a varia tra 0.01 e 0.0001.

Trascurando quindi a rispetto all'unità al denominatore della (6), Q diviene eguale ad 1 e la (12) dà:

$$(13) \quad D_{00} = \frac{\varepsilon f d\mu \sin J}{4\pi^2 n} \left[(\omega \cos J - n) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin L \cos L \cos l \sin l dL dl + \right. \\ \left. + (n \cos J - \omega) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 L \cos^2 l dL dl \right] = \frac{\varepsilon f d\mu \sin J}{4n} (n \cos J - \omega).$$

Ora la velocità angolare di rotazione ω del Sole è *maggiore* di quella n dei pianeti, giacchè il Sole fa un giro intorno a sè stesso in circa 25 giorni, mentre Mercurio impiega 88 giorni a compiere la sua orbita, Venere 225 giorni, la Terra un anno ecc. In conseguenza D_{00} è *certamente negativo*.

Abbiamo fin qui supposto che l'elemento $d\mu$ sia situato nel piano dell'equatore solare, trovando formole che saranno utili anche per la cosmogonia di nebulose aventi forma di dischi schiacciati. Immaginiamo ora che l'elemento $d\mu$ sia in posizione generica nell'interno del Sole e siano a, L, λ le sue coordinate cilindriche riferite al piano dell'equatore solare.

Allora, essendo sempre grande la distanza dei pianeti rispetto alle dimensioni del Sole, facili considerazioni mostrano che nella (3) q diviene $\chi \cos J - a \sin J \sin L$, che $\frac{dr}{dt}$ è eguale al valore già trovato diminuito di $\chi n \sin J \cos l$, mentre r si conserva presso a poco eguale all'unità.

Ora un calcolo, analogo a quello fatto nella Nota I, mostra che non occorre tener conto dei termini di primo grado in χ ; d'altra parte quelli di secondo grado danno in W il termine $-\epsilon f m n \chi^2 \sin J \cos J \cos l d\mu$ e quindi in $\frac{dJ}{dt}$ il termine $-\epsilon f \chi^2 \sin J \cos J \cos^2 l d\mu$, il quale dopo l'integrazione rispetto ad l , diviene $-\frac{I}{2} \epsilon f \chi^2 \sin J \cos J d\mu$.

7. Chiamando allora con I il valore secolare dell'inclinazione dell'orbita del pianeta P , avremo l'equazione:

$$(14) \quad \frac{dI}{dt} = \frac{\epsilon f \sin I (n \cos I - \omega)}{4n} \int a^2 d\mu - \frac{\epsilon f \sin J \cos J}{2} \int \chi^2 d\mu.$$

Ora, supponendo il Sole presso a poco sferico e composto di strati sferici omogenei, il primo integrale è eguale al suo momento d'inerzia C rispetto all'asse χ , mentre il secondo integrale è $\frac{I}{2} C$. Avremo dunque dalla (14):

$$(15) \quad \frac{dI}{dt} = -\frac{\epsilon f C \omega \sin I}{4n}.$$

Con la nota trasformazione

$$(16) \quad \operatorname{tg} \frac{I}{2} = x$$

si ha facilmente, integrando la (15):

$$(17) \quad -\frac{\epsilon f C \omega}{4n} t = \log \operatorname{tg} \frac{I}{2} + \text{costante}.$$

Quando t cresce all'infinito, il primo membro della (17), essendo sempre ω dello stesso segno di n , tende verso $-\infty$. Dunque x e quindi l'angolo I tendono verso zero.

Osserviamo che se si avesse $\omega = 0$, vale a dire se il Sole non ruotasse, I resterebbe costante, come del resto è intuitivo. Se invece n ed ω fossero di segno contrario, I tenderebbe verso 180° ; vale a dire l'orbita

planetaria tenderebbe ancora ad adagiarsi sul piano dell'equatore solare, compiendo però un ribaltamento in modo da rendere il movimento di rivoluzione del pianeta dello stesso senso del moto di rotazione del Sole.

Il teorema si estende pure al caso di un satellite che ruoti intorno ad un pianeta, avente forma sferica o di un ellissoide rotondo schiacciato ai poli. Si dimostra che il piano dell'orbita del satellite tende asintoticamente a coincidere col piano equatoriale del pianeta.

In conseguenza, riepilogando quanto è stato dimostrato in questa Nota e nella Nota precedente, vediamo che, *se si ammette la legge di attrazione (1), la struttura del nostro sistema planetario viene spiegata senza più aver bisogno di ricorrere a particolari ipotesi cosmogoniche (1).*

Geodesia. — *La grande anomalia geoidica nella Valle Padana.* Nota ⁽²⁾ del Corrisp. U. BARBIERI.

Nel 1935 presentavo alla Reale Accademia d'Italia una Memoria ⁽³⁾ nella quale riassumevo i risultati da me conseguiti in una serie di determinazioni astronomico-geodetiche, compiute nei vertici della rete trigonometrica di primo ordine italiana, disposti lungo il meridiano di Mondovì; risultati che pubblicai via via dal 1925, nei « Rendiconti » di questa Reale Accademia Nazionale dei Lincei. Nella Memoria citata ponevo in discussione i risultati; rendevo palese come le traccie dei piani delle attrazioni locali convergessero in una località molto ristretta dell'Alessandrino; dimostravo che in detta località doveva esistere nel sottosuolo una minora- zione nella densità terrestre, e facevo infine vedere come, e per l'aspetto geologico della regione, e per i fenomeni locali, la causa della suddetta minora- zione dovesse ritenersi costituita da un vastissimo giacimento di idrocarburi ⁽⁴⁾.

(1) In una Nota successiva vedremo anche come sia possibile spiegare con la (1) anche la rotazione dei pianeti intorno al proprio asse.

(2) Presentata nella seduta del 19 giugno 1938.

(3) U. BARBIERI, *Stazioni astronomico-geodetiche di latitudine, azimut e longitudine compiute lungo il meridiano di Mondovì.* « Memorie della Reale Accademia d'Italia », vol. VI, 1935.

(4) In due sondaggi eseguiti uno presso Valle S. Bartolomeo, in quel di Alessandria, l'altro a Val Cerrina, in quel di Crea, si ebbe per il primo che le argille (scagliose) a 200 metri di profondità mostrarono di essere pregne di idrocarburi; e nel secondo si resero manifeste imponenti e violenti fughe di gas.

Più esattamente una prima fuga si ebbe a 69 metri di profondità; ed una seconda, violentissima, a 137 metri, mantenutasi sempre di ugual violenza, sino ad oltre 180 metri, mentre a tale profondità, con l'acqua che veniva iniettata dal gas fuori del pozzo, erano visibili non dubbie traccie di idrocarburi.

Tutto ciò è ampiamente e dettagliatamente confermato da dichiarazioni scritte di persone di fede sicura e ineccepibile.

Sempre nella Memoria in discorso accennavo alla giustificata opportunità di ricercare la zona in cui l'attrazione locale si annullava, e dicevo al riguardo che di recente era stata fatta stazione nel vertice trigonometrico di Montecastello, e che un primo assaggio sulle osservazioni compiute, aveva dimostrato essersi già fatto un passo importante verso la regione cercata.

I risultati della suddetta stazione furono dati in una Nota recente, pubblicata in questi « Rendiconti »; li ricordiamo qui appresso, riportando altresì quelli relativi alla stazione precedente di Tortona, che ci necessitano.

Montecastello	$\xi = + 2''.3$	$\eta = + 2''.0$	$\theta = 3''.0$	$A = 41^{\circ} 03' 32''$
Tortona . .	$+ 9''.4$	$- 10''.0$	$13''.8$	$313^{\circ} 07' 28''$

Dall'esame e dal paragone di questi elementi si presenta assai verosimile l'ipotesi che il punto di attrazione locale nulla sia ben vicino a Montecastello, e probabilmente, con più esattezza, poco a nord di esso, e, quindi, prossimo al luogo (vedi Memoria citata) indicato dalla convergenza delle direzioni dei piani dell'attrazione locale, come quello di minor densità sotterranea (Bric d'Oлива, Bric dell'Olio).

Difatti avviene che se noi, interpolando la ξ sulla linea Bric-Torniola-M. Crea, stazioni in cui essa è di segno contrario, determiniamo la latitudine ($44^{\circ} 58' 40''$) del punto in cui detta componente si annulla, troviamo, a meno di pochi secondi, la stessa latitudine ($44^{\circ} 58' 03''$) del punto consimile sulla linea Tortona-Montecastello-Crea, che per fortunata combinazione costituisce un unico allineamento, agli estremi del quale, eziandio, tanto la ξ che la η sono di segno contrario; onde appare molto attendibile che questo punto, in cui $\xi = 0$, in effetti esista sul detto allineamento, e sia prossimo e poco a nord di Montecastello.

Osserviamo, poi, che fra le due componenti ξ e η dell'attrazione locale, quella che nella sua determinazione presenta maggiori difficoltà è, senza dubbio, la componente η , tanto più se il vertice del quale si determinò l'azimut astronomico è un punto non di primo ordine: la componente ξ dipendendo, invece, soltanto dalle due latitudini astronomica e geodetica, risulta di più facile ed esatta determinazione.

Ora basta ammettere nella componente η a Montecastello, un errore della medesima sua piccola grandezza, per cadere, con $\eta = 0$, prossimi al punto ove $\xi = 0$, nel quale, pertanto, risulterà nulla l'attrazione locale. E che anche la η debba annullarsi, appare evidente giacchè, come abbiamo detto, nelle due stazioni di M. Crea e Tortona, la componente stessa è di segno contrario.

Possiamo, dunque, asserire che la condizione $\theta = 0$ si verifica, con molta prossimità, nel luogo riconosciuto di minor densità sotterranea.

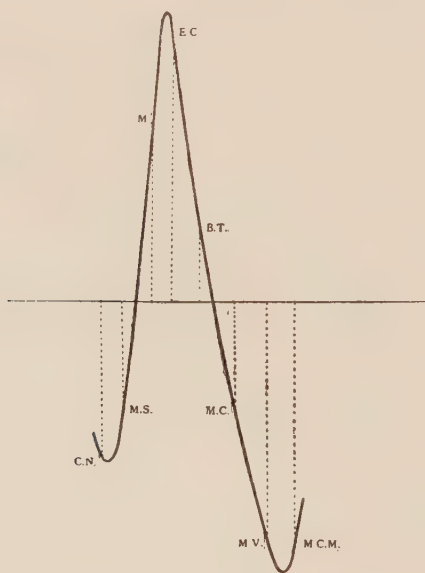
PROFILO DELLO SFEROIDE LUNGO LA LINEA LIVELLATA.

Avendo a disposizione gli elementi necessari alla sua costruzione, riteniamo interessante tracciare il profilo dello Sferoide lungo la linea livellata Mondovì-M. Colma di Mombarone.

A questo scopo sia ⁽¹⁾

$$\gamma = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha$$

la componente dell'attrazione locale secondo le congiungenti delle diverse stazioni nella loro successione: essa, notoriamente, misura, nella direzione definita dall'azimut delle varie congiungenti, l'angolo di depressione della



tangente allo Sferoide, rispetto alla superficie dell'Ellissoide. Riportati su di un foglio di disegno quali ordinate i valori di γ , rappresentando con l'ordinata di 1 mm. il valore di $\gamma = 0''$. 1 e prendendo come ascisse le rispettive distanze tra i vertici nella scala dell' $\frac{1}{1.000.000}$, l'incremento della depressione dello Sferoide rispetto all'Ellissoide tra due vertici consecutivi sarà dato da

$$-\Delta N = 0.1,000 \cdot \text{arc } 1'' \int \gamma^{mm} ds^{mm} = \frac{1}{2062.65} S_{ik}^{mm}$$

(1) F. R. HELMERT, *Höhere Geodäsie*, vol. I, cap. 12.

essendo S_{ik}^{mm} l'area espressa in mmq. delimitata dalla curva, l'asse delle ascisse e le ordinate dei due punti P_i e P_k .

Nella tabella che segue sono raccolti i dati per il calcolo e il tracciamento del profilo, e nelle ultime colonne i valori dei $\Sigma \Delta N$ dedotti dal profilo rappresentato in appresso.

Dall'esame del profilo costruito emerge subito che, a partire da Capo Noli, l'angolo di depressione decresce fino ad un punto compreso fra i 52 e 76 chilometri (-1.3), ($+1.3$), e cioè fino ad un punto compreso fra Mondovì ed Eremo di Cherasco, dove passa l'isoanomala zero della gravità.

Successivamente l'angolo di depressione cresce fin dopo i 175 chilometri, e cioè fino ad un punto compreso fra Monte Vesco e il Mombarone, località ove, eziandio, transita l'isoanomala suddetta.

Notiamo inoltre che i due punti dell'isoanomala zero cadono proprio in corrispondenza delle due cuspidi del profilo, poichè in esse cambia segno la variazione dell'angolo di depressione, e pertanto l'attrazione locale presenta un massimo.

I due punti appartengono nello stesso tempo allo Sferoide e all'Ellissoide, e quindi, se calcoliamo i ΣN da uno dei due punti, per esempio dal primo, avremo quale risultato, che le altezze dei punti del profilo saranno senz'altro i dislivelli rispetto all'Ellissoide, giacchè in questo caso risulta nulla la costante, che invece viene introdotta, computando le altezze, per esempio da Capo Noli.

Abbiamo applicato questo procedimento (che ad ogni buon conto è un procedimento approssimato a causa della formula che fornisce γ) a partire da Mondovì, prossimo alla isoanomala zero, e il risultato si vede nell'ultima colonna della tabella, dove le cifre estreme stanno precisamente ad indicarci che la quota sull'Ellissoide dei due punti terminali, è assai prossima allo zero.

Le cifre della tabella ci dicono inoltre che il massimo scostamento tra le due superficie ellissoidica e sferoidica si ha presso Bric Torniola, vertice nel quale l'attrazione locale presenta un minimo⁽¹⁾, e che, rispetto a quella regione, le quote sull'Ellissoide si presentano simmetriche, spostandoci verso Mondovì e verso il Mombarone.

Vedremo in una prossima Nota quali siano le dimensioni dell'anomalia studiata, e precisamente come essa si estenda a tutta la Valle Padana.

(1) Vedi Memoria già citata.

TABELLA.

Stazioni	ξ	η	θ	α	A	α-A	γ	s	distanze progres- sive		-F	ΣN	Σ N da Mondovi
Capo Noli . . .	+ 0".1	+ 17".1	17.1	189°.46'	288°.12'	— 198°.26'	— 16".20	18608	18608	0 km.		0	
M. Settepani . .	+ 1.0	13.3	13.3	85.36	298.47	— 213.11	— 11.13	33513	52121	da 0 a 18.6	— 2770	— m. 1.4	
Mondovi . . .	+ 18.4	+ 17.9	25.6	44.10	355.04	— 310.54	+ 19.35	23637	75808	da 18.6 a 520	+ 230	— m. 1.3	+ 0.1
Eremo di Che- rasco . . .	+ 19.0	+ 23.2	29.7	51.18	29.07	22.11	+ 27.50	27994	103802	da 52 a 76	+ 6000	+ m. 1.3	+ 2.9
Bric Torniola .	+ 4.0	+ 6.9	8.0	60.03	37.39	22.24	+ 7.40	38311	142113	da 76 a 104	+ 6600	+ m. 3.0	+ 6.1
M. Crea . . .	— 3.0	+ 15.0	15.2	101.21	318.55	— 217.34	— 12.05	33801	175914	da 104 a 142	— 830	+ m. 2.5	+ 5.7
M. Vesco . . .	— 19.6	+ 26.2	32.7	126.48	345.30	— 218.42	— 25.52	30062	205976	da 142 a 175	— 6700	— m. 0.8	+ 2.4
M. Colma di Mombarone .	— 21.1	+ 19.8	28.0	136.49	345.26	— 208.37	— 25.37			da 175 a 206	— 8000	— m. 4.7	— 1.5

Geodesia. — *Estensione dell'anomalia geoidica in Val Padana, e l'isoanomala zero per la gravità.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. U. BARBIERI.

Ci proponiamo di determinare in questa Nota l'estensione della perturbazione geoidica nella Valle Padana, da noi già posta in evidenza e studiata in Note precedenti.

Abbiamo accennato come, in corrispondenza della regione ove il sottosuolo presenta la minor densità, l'attrazione locale sia nulla; ivi le due superficie sferoidica ed ellissoidica, parallele fra loro, presentano il massimo scostamento, mentre si intersecano o si lambiscono là dove l'attrazione è massima, località per la quale passa l'isoanomala zero della gravità.

Questa curva rappresenta, dunque, col suo percorso, la linea secondo cui le due superficie si tagliano, o sono tangenti, e, conseguentemente, la linea che definisce le dimensioni della perturbazione geoidica di cui trattiamo.

Appare, quindi, tutta l'importanza della determinazione, il più possibilmente completa, della curva in discorso.

Qualche idea sull'andamento parziale di questa isoanomala, possiamo averla pensando ⁽²⁾ che essa deve passare prossima e a nord di Mondovì, prossima e a nord di Monte Vesco, e, molto probabilmente, prossima e ad est di Torino: ma un'indicazione più importante, e riflettente il suo andamento complessivo, la deduciamo dalla considerazione che l'insieme di anomalie negative, sparpagliate nella regione centrale della Valle Padana, è tutto cinto da nord e da sud, da ovest e da est, da una fascia di anomalie positive; onde la conseguente esistenza di una linea di separazione tra i valori positivi e negativi dell'anomalia, che sarà rappresentata dalla isoanomala zero.

Ci siamo pertanto proposti di determinare questa curva per punti e per interpolazioni, ammettendo che la gravità varii linearmente fra due località, una ad anomalia positiva ed una ad anomalia negativa; ipotesi questa la cui attendibilità diminuisce con l'aumentare della distanza, ma che pure, come accenneremo, sembra si verifichi più di quanto, *a priori*, possa sospettarsi.

(1) Presentata nella seduta del 19 giugno 1938.

(2) U. BARBIERI, *Stazioni astronomico-geodetiche di latitudine, azimut e longitudine compiute lungo il meridiano di Mondovì*. «Memorie della Reale Accademia d'Italia», vol. VI, 1935.

TABELLA.

	Estremi di interpolazione	Distanze in Km. del punto zero da uno degli estremi	Località ove cade il punto zero
1	Novara-Pallanza Novara-Arona	da Novara 20 Km.	a nord-ovest di Oleggio
2	M. Vesco-Romagnano M. Vesco-Pallanza	da M. Vesco 32	a nord-ovest di Buronzo
3	M. Vesco-Rivarolo M. Vesco-Caluso	da M. Vesco 4	presso Villareggia
4	M. Crea-Rivarolo M. Crea-Caluso	da M. Crea 23	ad ovest di Crescentino
5	M. Crea-Avigliana Bric Torniola-Caluso	da M. Crea 26	a est di Sciolze
6	Lanzo-Bric Torniola Pinerolo-M. Crea	da M. Crea 43	a sud di Trofarello
7	Lanzo-Cherasco Pinerolo-Bric Tola	da B. Torniola 20	a nord di Racconigi
8	Cuneo-B. Torniola Cuneo-Cherasco	da Cherasco 18	a sud-ovest di Fossano
9	Mondovì-Cherasco Mondovì-B. Torniola	da Mondovì 16	a nord di Carrù
10	Cairo-Cherasco Mondovì-Acqui	da Mondovì 10	a sud-ovest di Niella
11	Cairo-Aqui Genova-Cherasco	da Cairo 14	a Mioglia
12	Genova-Asti Genova-Acqui	da Genova 10	ad Acquisanta

Segue TABELLA.

	Estremi di interpolazione	Distanze in Km. del punto zero da uno degli estremi	Località ove cade il punto zero
13	Genova-Parma	da Genova 14 Km.	presso Bavari
	Genova-Reggio		
14	Novi-Boscolungo	da Barigazzo 70	a sud-est di Borgo Taro
	Acqui-Barigazzo		
15	Barigazzo-Parma	da Barigazzo 15	presso Teano
	Barigazzo-Fornovo		
16	Barigazzo-Bologna	da Barigazzo 16	a sud di Pavullo
	Pracchia-Reggio		
17	Pracchia-Bologna	da Giogo 28	a nord-est di Porretta
	Prignano-Giogo		
18	Bologna-Pietramala	da Pietramala 4	a Filigaro
	Bologna-Giogo		
19	Pietramala-Ravenna	da Giogo 25	a sud di Casola Valsenio
	Giogo-Ravenna		
20	Ferrara-Chioggia	da Ferrara 20	a Polesella
	Ferrara-Padova		
21	Mantova-Padova	da Padova 20	a Teolo
	Borgoforte-Padova		
22	Mozzecane-Mantova	da Mozzecane 5	a Castiglione
	Mozzecane-Borgoforte		
23	Piacenza-Dossobuono	da Piacenza 80	a Pozzolengo
	Piacenza-Ceraino		
24	Milano-Peri	da Milano 65	a Travagliato
	Milano-Ceraino		
25	Milano-M. Generoso	da Milano 15	a sud di Seveso

Per diminuire l'arbitrarietà e contenerla in limiti ristretti, abbiamo pertanto cercato di scegliere punti fra loro il più possibile vicini, e stazioni che dessero il maggiore affidamento di esattezza e precisione nelle osservazioni di gravità in esse compiute: queste condizioni furono soddisfatte sempre, tolti pochi casi ove la scarsezza delle determinazioni disponibili impedì di operare altrimenti.

I valori delle anomalie, ridotti al sistema di Potsdam, furono tolti dalla conosciuta pubblicazione del Borrás, e da due Note, una del chiarissimo prof. Dore, e l'altra del prof. Ballarin: tra due o più determinazioni di epoca differente, si dette poi molto spesso la preferenza alla più recente.



Riguardo, infine, alla necessità di adoperare valori di gravità in cui si manifestasse tutta intera l'influenza delle condizioni locali del terreno ⁽¹⁾ le determinazioni vennero tutte corrette della sola riduzione al livello del mare.

Nella tabella che è riportata più avanti sono riferiti i risultati della interpolazione compiuta; eseguita sempre in doppio, salvo una volta sola,

(1) Vedi « Verbale della R. Commissione Geodetica Italiana per la seduta tenuta in Napoli nei giorni 30, 31 maggio 1938 ».

con l'avvertenza di accettarne il risultato sotto la condizione che le due interpolazioni si presentassero in buon accordo fra di loro.

Per dare un'idea del grado d'approssimazione conseguito nella determinazione della isoanomala che ci interessa, riportiamo qui sotto gli scarti incontrati fra i due estremi delle interpolazioni

N. d'ordine	1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 , 11 , 12 , 13 , 14 , 15 ,
scarto in km.	5 , 12 , 0 , 3 , 1 , 8 , 11 , 2 , 2 , 5 , 5 , 0 , 6 , 11 , 6 ,

N. d'ordine	16 , 17 , 18 , 19 , 20 , 21 , 22 , 23 , 24
scarto in km.	13 , 5 , 3 , 10 , 11 , 11 , 0 , 19 , 12

Da queste cifre, mentre si vede determinata la curva con accettabile approssimazione nel suo complesso, emerge che essa lo è meno soddisfacentemente dalla parte di nord-est, ove, in effetti, le osservazioni utili di gravità scarseggiano più che altrove.

Il procedimento grafico che ci ha portato alle varie deduzioni, noi lo abbiamo condotto su quattro fogli congiunti, della Carta d'Italia dell' $\frac{1}{500.000}$. Da essi, riducendo, siamo passati al grafico in scala minore, che alleghiamo più sopra.

Venendo, infine, a concludere, diremo che noi non abbiamo avuto qui il proposito di fornire una determinazione rigorosa del contorno della isoanomala zero, ma solo abbiamo inteso di fissarne il completo andamento generale, con il che restano conclusi i bordi estremi della perturbazione geoidica da noi posta in evidenza, e che, mentre senza dubbio, trova le sue origini nell'Alessandrino, si estende sino ad abbracciare tutta intera la Valle Padana.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Semplificazioni ed estensioni del metodo di Picone per l'integrazione delle equazioni lineari alle derivate parziali del 2° ordine di tipo iperbolico.* Nota di RADU BADESCU, presentata⁽¹⁾ dal Socio G. CASTELNUOVO.

1. In due ben noti lavori sulle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine, del tipo iperbolico⁽²⁾, il sig. Mauro Picone ha ricondotto la risoluzione dell'equazione

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} - c(x, y, u) = 0$$

all'equazione integrale seguente

$$(2) \quad u(x, y) = \varphi(x, y) + \int_{l(x)}^y d\eta \int_{h(\eta)}^x \Phi[x, y; \xi, \eta; u(\xi, \eta)] d\xi$$

che è del tipo di Volterra. A tale scopo, l'Autore ricerca tre funzioni di x e y : α , β e γ , tali che il primo membro della (1) sia della forma

$$(3) \quad \frac{1}{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \alpha \frac{\partial}{\partial y} (\beta u) \right\} - \gamma(x, y, u) = 0$$

e con un'identificazione, ottiene

$$(4) \quad \beta = H(x) e^{\int_0^y a(x, \eta) d\eta}, \quad \alpha\beta = K(y) e^{\int_0^x b(\xi, y) d\xi},$$

$$\gamma = c + \frac{u}{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial \beta}{\partial y} \right)$$

$H(x)$ e $K(y)$ essendo due funzioni arbitrarie. Si può subito osservare che la γ non dipende dalle arbitrarie H e K introdotte perchè, se poniamo

$$(5) \quad \beta_1 = \frac{\beta}{H(x)} = e^{\int_0^y a(x, \eta) d\eta}, \quad \alpha_1 \beta_1 = \frac{\alpha\beta}{H(y)} = e^{\int_0^x b(\xi, y) d\xi}$$

si ottiene

$$\gamma = c + \frac{u}{\alpha_1 \beta_1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial y} \right) = c + u \left[\frac{\partial a}{\partial x} + ab \right].$$

(1) Nella seduta del 3 giugno 1938.

(2) Pubblicati nei volumi 30 (1910) e 31 (1911) dei « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo ».

Integrando adesso col sig. Picone l'equazione (3) lungo una parallela all'asse x dal punto $P [h(y), y]$ fino al punto $Q (x, y)$, si ha

$$(6) \quad \frac{\partial [\beta u]}{\partial y} = \frac{Y(y)}{\alpha} + \int_{h(y)}^x \frac{\alpha(\xi, y) \beta(\xi, y) \gamma[\xi, y; u(\xi, y)]}{\alpha(x, y)} d\xi$$

— ciò che introduce una funzione arbitraria $Y(y)$ — e poi, integrando lungo una parallela all'asse y , dal punto $R [x, l(x)]$ al punto $M (x, y)$, si perviene all'equazione

$$(7) \quad u(x, y) = \frac{X(x)}{\beta} + \int_{l(x)}^y \frac{Y(\eta) d\eta}{\alpha(x, \eta) \beta(x, y)} + \\ + \int_{l(x)}^y d\eta \int_{h(\eta)}^x \frac{\alpha(\xi, \eta) \beta(\xi, \eta) \gamma[\xi, \eta; u(\xi, \eta)]}{\alpha(x, \eta) \beta(x, y)} d\xi$$

dove la $X(x)$ è anche arbitraria. Abbiamo qui un'equazione integrale del tipo (2), la funzione sconosciuta essendo la $u(x, y)$, e possiamo dire che esiste un'equivalenza tra la risoluzione delle equazioni (1) e (7), ma il passaggio dall'una all'altra ha apparentemente introdotto 4 funzioni arbitrarie e non soltanto due. Osserviamo tuttavia che la funzione Φ figurante sotto i segni d'integrazione

$$\Phi = \frac{\alpha(\xi, \eta) \beta(\xi, \eta) \gamma[\xi, \eta; u(\xi, \eta)]}{\alpha(x, \eta) \beta(x, y)}$$

non dipende anch'essa dalle arbitrarie H e K introdotte, perchè si ha

$$(8) \quad \frac{\alpha(\xi, \eta) \beta(\xi, \eta)}{\alpha(x, \eta) \beta(x, y)} = e^{-\int_{\xi}^x b(\xi, \eta) d\xi - \int_{\eta}^y a(x, \eta) d\eta}$$

e che la $\varphi(x, y)$ dipende soltanto dai quozienti $\frac{X(x)}{H(x)}$ e $\frac{Y(y)}{K(y)}$, perchè

$$(9) \quad \varphi(x, y) = \frac{1}{\beta_1} \frac{X(x)}{H(x)} + \int_{l(x)}^y e^{-\int_0^x b(\xi, \eta) d\xi + \int_y^{\eta} a(x, \eta) d\eta} \cdot \frac{Y(\eta)}{K(\eta)} d\eta.$$

Con queste due osservazioni, la dimostrazione del teorema fondamentale, ottenuto dal Picone nella prima delle Memorie citate, è certo resa più perspicua perchè così si vede che il passaggio dalla (1) alla (7) introduce soltanto le due funzioni arbitrarie $\Psi(x) = \frac{X(x)}{H(x)}$ e $\chi(y) = \frac{Y(y)}{K(y)}$, e si può pertanto porre $H(x) \equiv K(y) \equiv 1$.

2. Per passare dall'equazione (1) alla (2), il sig. Picone ha considerato i casi seguenti: il caso *a*), che è quello indicato da noi [identificazione coll'equazione (3)] quando egli suppone che la derivata $\frac{\partial a}{\partial x}$ è finita e continua nel quadrato $C[|x| \leq a, |y| \leq a]$ e il caso *b*), quando la derivata $\frac{\partial b}{\partial y}$ esiste, è finita e continua nello stesso quadrato, caso in cui egli fa una identificazione dell'equazione (1) colla seguente:

$$\frac{1}{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \beta \frac{\partial(\alpha u)}{\partial x} \right\} - \gamma(x, y, u) = 0.$$

Un attento esame delle funzioni Φ e φ ci fa pensare che non è necessario di supporre le funzioni a, b, c , finite su C , visto che è possibile risolvere l'equazione integrale (2) anche nel caso di una funzione $\Phi[x, y, \xi, \eta, u(\xi, \eta)]$ ammettente delle singolarità in ξ e η nel quadrato C , per $-\infty < u < +\infty$, a condizione che l'integrale doppio figurante nella (7) abbia un senso e sia finito su C ⁽¹⁾.

Per ottenere una tale funzione Φ , si vede che è sufficiente di supporre le tre funzioni a, b, c , integrabili nel senso di Riemann su C , ad eccezione della a nel caso *a*) [o della b nel caso *b*)] la quale dovrà essere finita, continua e derivabile rispetto ad x (o ad y) su C . Queste funzioni possono dunque ammettere delle singolarità di 1^a e di 2^a specie ⁽²⁾. Per esempio, se

$$a = \frac{A(x, y)}{y^p}; p < 1 \quad ; \quad b = \frac{B(x, y)}{x^q y^r}; q, r < 1 \quad ; \quad c = \frac{C(x, y; u)}{x^s y^t}; s, t < 1$$

le A, B, C , essendo finite e continue su C , per $-\infty < u < +\infty$, le funzioni α, β e l'integrale doppio della (7), vi saranno anch'esse finite e continue, a condizione che $p + r < 1$. La stessa circostanza si presenta se

$$b = \frac{B(x, y)}{(x - y)^p}, p < 1 \quad ; \quad c = \frac{C(x, y; u)}{(x - y)^q}, q < 1.$$

3. Prima di risolvere l'equazione integrale (2), introduciamo nel termine noto $\varphi(x, y)$ la funzione

$$\int_{l(x)}^y d\eta \int_{h(\eta)}^x \Phi[x, y; \xi, \eta; 0] d\xi$$

(1) Più precisamente, la funzione Φ dev'essere di quadrato sommabile. Veggasi il paragrafo seguente.

(2) GOURSAT, *Cours d'analyse*, to. III, 1927, p. 342.

che è anche conosciuta. In queste condizioni, la funzione rimasta sotto il segno $\int_{l(x)}^y d\eta \int_{h(\eta)}^x d\xi$ sarà nulla per $u = 0$, dunque dalla forma (1):

$$u \cdot \Phi_1 [x, y; \xi, \eta; u(\xi, \eta)].$$

Questo punto precisato, introduciamo un parametro λ dinanzi all'integrale doppio della (2) e ricerchiamo una soluzione $u(x, y)$ — finita e continua su C — dell'equazione (2), che sia dalla forma

$$(10) \quad u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n(x, y).$$

Le funzioni sconosciute $u_n(x, y)$ sono soluzioni del sistema ricorrente infinito

$$u_0(x, y) = \varphi(x, y)$$

$$(11) \quad u_n(x, y) = \int_{l(x)}^y d\eta \int_{h(\eta)}^x \Phi_1 [x, y; \xi, \eta; u_{n-1}(\xi, \eta)] \times u_{n-1}(\xi, \eta) d\xi$$

$$(n = 1, 2, \dots)$$

e dunque si può dire che la soluzione $u(x, y)$ è *formalmente* determinata, una volta che si conosce la funzione $u_0(x, y) = \varphi(x, y)$.

Una serie maggiorante per la serie (10) si ottiene applicando la formula di Schwarz

$$\left[\int_{l(x)}^y d\eta \int_{h(\eta)}^x A(\xi, \eta) B(\xi, \eta) d\xi \right]^2 \leq \int_{l(x)}^y d\eta \int_{h(\eta)}^x A^2(\xi, \eta) d\xi \times$$

$$\times \int_{l(x)}^y d\eta \int_{h(\eta)}^x B^2(\xi, \eta) d\xi,$$

all'integrale doppio che figura nella seconda relazione (11). Avremo successivamente

$$u_0(x, y) \leq |\varphi(x, y)| < M$$

$$u_1(x, y) \leq \sqrt{\epsilon \int_{l(x)}^y d\eta \int_{h(\eta)}^x \Phi_1^2 [x, y; \xi, \eta; u_0(\xi, \eta)] d\xi} \times$$

$$\times \sqrt{\epsilon' \int_{l(x)}^y d\eta \int_{h(\eta)}^x u_0^2(\xi, \eta) d\xi} < M^2 \Delta$$

(1) Φ può anch'essere dalla forma $u^m \cdot \Phi_m$, con $m > 1$, ma intero.

M essendo un numero positivo superiore alle funzioni

$$\sqrt{\varepsilon \int_{l(x)}^y d\eta \int_{b(\eta)}^x \Phi^2[x, y; \xi, \eta; u(\xi, \eta)] d\xi} \quad \text{o} \quad |\varphi(x, y)| \quad \text{per} \quad -\infty < u < +\infty$$

Δ eguale alla $\sqrt{\varepsilon' \int_{l(x)}^y d\eta \int_{b(\eta)}^x d\xi}$ ed $\varepsilon, \varepsilon' = \pm 1$ secondo che le espressioni sotto le radici sono positive o negative⁽¹⁾. Poi

$$u_2 \leq \sqrt{\varepsilon \int_{l(x)}^y d\eta \int_{b(\eta)}^x \Phi_1^2[x, y; \xi, \eta; u_1(\xi, \eta)] d\xi} \times \\ \times \sqrt{\varepsilon' \int_{l(x)}^y d\eta \int_{b(\eta)}^x u_1^2(\xi, \eta) d\xi} < M^2 \Delta^2$$

e, in generale

$$u_n(x, y) < M^{n+1} \times \Delta^n.$$

Il raggio di convergenza R ricercato sarà inferiore a quello della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n M^{n+1} \Delta$$

che è $\rho = \frac{1}{M\Delta}$, e il cerchio di convergenza corrispondente dovrà contenere il punto $\lambda = 1$. Abbiamo allora la condizione

$$\Delta = \sqrt{\varepsilon \int_{l(x)}^y d\eta \int_{b(\eta)}^x d\xi} < \frac{1}{M}$$

che si scrive, tenendo conto che l'integrale Δ^2 ci dà un'area contenuta nel quadrato C,

$$(12) \quad \Delta < 2a < \frac{1}{M}$$

$2a$ essendo il lato di questo quadrato. La convergenza della serie (10) è dunque stabilita e la condizione di convergenza corrispondente (12) ci dà una limitazione per il lato del quadrato C nel quale siamo sicuri di aver una soluzione $u(x, y)$ dell'equazione (1), finita e continua rispetto alle sue variabili x ed y .

(1) Perchè possiamo scrivere

$$\varepsilon' \int_{l(x)}^y d\eta \int_{b(\eta)}^x u_0^2(\xi, \eta) d\xi < M^2 \int_{l(x)}^y d\eta \int_{b(\eta)}^x \varepsilon' d\xi = M^2 \Delta^2.$$

È interessante osservare che la determinazione del raggio di convergenza R suppone soltanto l'esistenza dell'integrale doppio

$$(13) \quad \int_{l(x)}^y d\eta \int_{h(\eta)}^x \Phi_1[x, y; \xi, \eta; u(\xi, \eta)] d\xi$$

per $-\infty < u < +\infty$; dunque la funzione $\Phi[x, y; \xi, \eta; u(\xi, \eta)]$ deve essere di quadrato sommabile, qualsisia la $u(\xi, \eta)$, finita e continua sul quadrato C .

4. Un esempio semplice è dato dall'equazione

$$(14) \quad x^p y^q \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - u = 0, \quad p, q < 1$$

per la quale $\alpha \equiv \beta \equiv 1$ e $\gamma = x^{-p} \cdot y^{-q}$, e l'equazione integrale (2) corrispondente sarà

$$u(x, y) = X(x) + \int_{l(x)}^y Y(\eta) d\eta + \lambda \int_{l(x)}^y d\eta \int_{h(\eta)}^x \frac{u(\xi, \eta)}{\xi^p \eta^q} d\xi.$$

Prendiamo, per considerare un caso più semplice: $l(x) = y_0$, $h(y) = x_0$ che corrisponde al problema di Goursat, le curve

$$y = l(x), \quad x = h(y)$$

essendo le due caratteristiche $y = y_0$, $x = x_0$.

Adesso se poniamo

$$\int_{y_0}^y Y(\eta) d\eta = \mathfrak{Y}(y)$$

la soluzione $u(x, y)$, per $\lambda = 1$ sarà

$$\begin{aligned} u(x, y) = & X(x) + \mathfrak{Y}(y) + \\ & + \int_{x_0}^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! (n-1)!} \cdot \frac{[y^{1-q} - y_0^{1-q}]^n \cdot [x^{1-p} - x_0^{1-p}]^{n-1}}{t^p (1-q)^n \cdot (1-p)^{n-1}} X(t) dt + \\ & + \int_{y_0}^y \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! (n-1)!} \cdot \frac{[x^{1-p} - x_0^{1-p}]^n [y^{1-q} - y_0^{1-q}]^{n-1}}{t^q (1-p)^n \cdot (1-q)^{n-1}} \mathfrak{Y}(t) dt \end{aligned}$$

serie ottenute applicando alle diverse funzioni $u_n(x, y)$ la formola

$$\int_{x_0}^x f'(t_1) dt_1 \int_{x_0}^{t_1} f'(t_2) dt_2 \cdots \int_{x_0}^{t_{n-1}} f'(t_n) F(t_n) dt_n =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x [f(x) - f(t)]^{n-1} f'(t) \cdot F(t) dt.$$

Si osserva che abbiamo qui l'integrale di una funzione di Bessel⁽¹⁾. Le condizioni di Goursat rispetto alle due caratteristiche considerate essendo

$$u(x, y_0) = U(x), \quad u(x_0, y) = V(y)$$

si trova subito

$$X(x) + Y(y_0) = V(x), \quad X(x_0) + Y(y) = V(y).$$

È chiaro che abbiamo anche $U(x_0) = V(y_0)$.

La $u(x, y)$ soddisfa dunque alle condizioni richieste: continuità e limitatezza rispetto alle due variabili x e y sul quadrato C . Si osserva che la

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ è ben dalla forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{f(x, y)}{x^p y^q}.$$

(1) Più precisamente, c'è la funzione $\alpha \cdot J'_x(1, u \times v)$ di Bessel, per la prima serie dove

$$u = \frac{y^{1-q} - y_0^{1-q}}{1-q}, \quad v = \frac{x^{1-p} - x_0^{1-p}}{1-p} \quad \text{e} \quad \alpha = x^p.$$

Matematica. — *Equazioni di struttura dei gruppi di Lie.*
Nota di A. DE MIRA FERNANDES, presentata ⁽¹⁾ dal Socio
T. LEVI-CIVITA.

Siano

$$(1) \quad x'_i = f_i(x_1, x_2 \dots x_n, a_1, a_2 \dots a_k) \quad (i = 1, 2 \dots n)$$

le equazioni analitiche di un gruppo finito e continuo, dipendente da n variabili e k parametri.

Si può scrivere simbolicamente

$$(1) \quad M' = T(M, a).$$

Se si ha, analogamente,

$$(1') \quad M'' = T(M, a + da),$$

poichè si tratta di gruppo, apparterrà ancora alla famiglia T l'operazione che fa passare direttamente da M' ad M'' . Tale operazione è, come ben si sa, la trasformazione infinitesima

$$(2) \quad dM' = \sum_{\lambda=1}^k \frac{\partial M'}{\partial a_\lambda} da_\lambda = \sum_{s=1}^k \mathbf{V}_s(M') \omega_s(a, da),$$

in cui i vettori $\mathbf{V}_s(M')$ non dipendono nè dai parametri a_i , nè dai loro differenziali, e $\omega_s(a, da)$ designano k forme di Pfaff dei k parametri.

Scrivendo che

$$(dM')' = d(\delta M') - \delta(dM') = 0,$$

cioè che la *derivata esterna* (nel senso di Cartan) di dM' è nulla, si ha

$$\begin{aligned} d(\delta M') - \delta(dM') &= \sum_{s=1}^k [d\mathbf{V}_s \cdot \omega_s(\delta) - \delta\mathbf{V}_s \cdot \omega_s(d)] + \\ &+ \sum_{s=1}^k \mathbf{V}_s [d\omega_s(\delta) - \delta\omega_s(d)] = 0; \end{aligned}$$

ovvero

$$(3) \quad \sum_{s=1}^k [d\mathbf{V}_s \omega_s] + \sum_{s=1}^k \mathbf{V}_s \omega'_s = 0.$$

(1) Nella seduta del 19 giugno 1938.

Come si sa, $[d\mathbf{V}_s \omega_s]$ è un *prodotto esterno*, e ω'_s la *derivata esterna* di ω_s .

Se si pone

$$(4) \quad \mathbf{V}_s(M') = P_s - M',$$

si avrà

$$(5) \quad d\mathbf{V}_s = dP_s - dM' = \sum_{p=1}^k [\mathbf{V}_p(P_s) - \mathbf{V}_p(M')] \omega_p(d).$$

Dunque

$$(6) \quad \sum_{s=1}^k \mathbf{V}_s \omega'_s = - \sum_{q=1}^k [d\mathbf{V}_q \omega_q] = - \sum_{p \neq q} [\mathbf{V}_p(P_q) - \mathbf{V}_p(M')] [\omega_p \omega_q].$$

Indichiamo

$$[\mathbf{V}_p(P_q) - \mathbf{V}_p(M')] - [\mathbf{V}_q(P_p) - \mathbf{V}_q(M')]$$

colla notazione abbreviata $\mathbf{V}_{[pq]}$.

La formula (6) si scriverà

$$(6') \quad \sum_{s=1}^k \mathbf{V}_s \omega'_s = - \sum_{(p, q)} \mathbf{V}_{[pq]} [\omega_p \omega_q] \quad (p < q).$$

Ma

$$(7) \quad \omega'_s = \sum_{(p, q)} c_{pq s} [\omega_p \omega_q]$$

(equazioni di struttura di Cartan).

Dunque

$$\sum_{s \in (p, q)} \mathbf{V}_s c_{pq s} [\omega_p \omega_q] = - \sum_{(p, q)} \mathbf{V}_{[pq]} [\omega_p \omega_q].$$

Ossia

$$(8) \quad \boxed{\mathbf{V}_{[pq]} = - \sum_{s=1}^k c_{pq s} \mathbf{V}_s}.$$

Si ha per definizione

$$\mathbf{V}_s \times \text{grad } f = X_s f,$$

e si vede agevolmente che

$$(9) \quad \mathbf{V}_{[pq]} \times \text{grad } f = -(X_p X_q) f.$$

Le equazioni (8) sono dunque completamente equivalenti alle *equazioni di struttura*

$$(10) \quad (X_p X_q) f = \sum_s c_{pq s} X_s f$$

di Sophus Lie. Ma ne costituiscono l'aspetto duale, esente dall'elemento ausiliario $f(0 \text{ grad } f)$, il quale non figura nelle equazioni di definizione (2).

Come le equazioni di Cartan dipendono unicamente dai pfaffiani ω_s , così le equazioni (8) dipendono esclusivamente dai vettori V_s .

Si verifica subito che, assumendo

$$V_s = B_s - A_s \quad (s = 1, 2 \dots k),$$

si ha analogamente

$$V_{[pq]} = [V_p(B_q) - V_p(A_q)] - [V_q(B_p) - V_q(A_p)].$$

con che, scrivendo

$$V_p(V_q) = V_p(B_q) - V_p(A_q),$$

risulta

$$(11) \quad \boxed{V_{[pq]} = V_p(V_q) - V_q(V_p)}.$$

Matematica. — *Sulle superficie totalmente geodetiche negli spazi di Finsler.* Nota di M. HAIMOVICI, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Gli spazi di Finsler che ammettono, per ogni punto e per ogni giacitura tangente, una varietà di cui tutte le geodetiche siano geodetiche dello spazio (varietà totalmente estemale⁽²⁾) sono stati studiati da diversi autori. Sono gli stessi spazi di cui le rette sono le estremali di distanza⁽³⁾. Invece non mi consta che siano mai stati studiati gli spazi di Finsler che ammettono delle famiglie più ristrette di varietà totalmente estremali, cioè quegli elementi lineari finsleriani che corrispondono agli elementi lineari riemanniani di cui lo studio è stato iniziato dall'Hadamard⁽⁴⁾.

Una varietà totalmente estemale di uno spazio di Riemann ha questa proprietà (caratteristica): Un vettore ad essa tangente vi rimane tangente se lo si sposta per parallelismo di Levi-Civita lungo una curva della va-

(1) Nella seduta del 15 maggio 1938.

(2) Il nome è stato dato dal MOISIL, «Bull. de la Soc. des Sc. Cluj» (Roumanie), to. V, 1931, I^{ère} partie, pp. 451-467.

(3) D. HILBERT, «Math. Annalen», 46, 1895, pp. 91-96; G. HAMEL, «Math. Annalen», 57, 1903, pp. 231-264; W. WIRTINGER, «Monatsh. f. Math. u. Phys.», 32, 1923, pp. 1-14; P. FUNK, «Math. Annalen», 101, 1929, pp. 226-237 (per il caso di due dimensioni); L. BERWALD, «Math. Zeitschr.», 30, 1929, pp. 449-469; L. BERWALD, «Monatsh. f. Math. u. Phys.», 36, 1929, pp. 315-330.

(4) J. HADAMARD, «Bull. des Sc. Math.», XXV (1901), pp. 37-40.

rietà⁽¹⁾. Chiamiamo totalmente geodetica una varietà di uno spazio di Finsler tale che un vettore ad essa tangente vi rimanga tangente se lo si sposta per parallelismo di Cartan⁽²⁾ lungo una famiglia qualunque di elementi lineari tangenti alla varietà.

Una varietà totalmente geodetica è anche totalmente estremale. Ma la reciproca *non* è sempre vera.

In questa Nota vogliamo esporre brevemente — lasciando tutti gli sviluppi di calcolo ed anche qualche dettaglio di dimostrazione — come si possano trovare gli spazi di Finsler a tre dimensioni che ammettono ∞^2 superficie totalmente geodetiche.

1. Anzitutto, si può dimostrare — ciò che noi non faremo qui — che in condizioni assai larghe tutte le superficie totalmente geodetiche che passano per un punto hanno una geodetica d'intersezione comune e che la congruenza Γ di geodetiche in tal modo determinata è normale, cioè le sue giaciture trasversali sono tangenti ad una famiglia di ∞^1 superficie.

Prendiamo allora il sistema di coordinate in modo che queste superficie siano rappresentate dalle equazioni $x^3 = \text{cost.}$; che le geodetiche della congruenza Γ siano date dalle equazioni $x^1 = \text{cost.}$, $x^2 = \text{cost.}$ e che la coordinata x^3 rappresenti l'arco su questa geodetica a partire da una superficie $x^3 = \text{cost.}$ ⁽³⁾.

2. Una superficie totalmente geodetica sarà dunque rappresentata da una equazione della forma

$$(1) \quad f(x^1, x^2) = 0.$$

Sia ξ^i un vettore ad essa tangente e avente l'elemento lineare (x, x) (supposto tangente alla superficie) come « elemento d'appoggio »⁽⁴⁾. Si avrà dunque

$$\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \xi^\alpha = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \dot{x}^\alpha = 0.$$

Il fatto che il vettore rimane tangente alla superficie quando lo si sposta per parallelismo di Cartan dall'elemento (x, \dot{x}) nell'elemento $(x + dx, \dot{x} + d\dot{x})$ (purè tangente alla superficie) si esprime colla equazione

$$(2) \quad \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \xi^\alpha dx^\beta + \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} d\xi^\alpha = 0$$

(1) G. VITALI, « Rend. R. Accad. dei Lincei », vol. XXXI₂, 1922, pp. 86-88.

(2) E. CARTAN, *Les espaces de Finsler*. Paris, Hermann, 1934.

(3) Che questo sia possibile risulta da una nota proprietà della trasversalità; ved., p. es., HADAMARD, *Leçons sur le calcul des variations*. Paris, 1910, p. 149.

(4) E. CARTAN, loc. cit., p. 4.

dove gli incrementi $d\xi^i$ del vettore sono dati da ⁽¹⁾

$$(3) \quad d\xi^i + \sum_{j,k=1}^3 \Gamma_{jk}^{*i} \xi^j dx^k + \sum_{j,k=1}^3 A_{jk}^i \xi^j \omega^k = 0$$

con:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \Gamma_{jk}^{*i} &= \sum_{r=1}^3 g^{ir} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jr}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kr}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^r} \right) + \frac{1}{\mathcal{L}} \sum_{s=1}^3 A_{jks} \frac{\partial G^s}{\partial x^r} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\mathcal{L}} \sum_{s=1}^3 A_{jrs} \frac{\partial G^s}{\partial x^k} - \frac{1}{\mathcal{L}} \sum_{s=1}^3 A_{krs} \frac{\partial G^s}{\partial x^j} \right] \\ A_{jk}^i &= \sum_{r=1}^3 g^{ir} A_{rjk} = \frac{\mathcal{L}}{2} \sum_{r=1}^3 g^{ir} \frac{\partial g_{rj}}{\partial x^k} \quad ; \quad \bar{\omega}^k = dl^k + \frac{1}{\mathcal{L}} \sum_{r=1}^3 \frac{\partial G^k}{\partial x^r} dx^r \quad ; \\ l^k &= \frac{\dot{x}^k}{\mathcal{L}(x, \dot{x})} \quad ; \end{aligned} \right.$$

$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \dot{s}$ dà l'elemento di lunghezza nello spazio, e si è posto

$$(5) \quad \mathcal{F} = \frac{1}{2} \mathcal{L}^2 \quad ; \quad g_{ij} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} \quad ; \quad G_i = \frac{1}{2} \left(\sum_{r=1}^3 \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^r} \dot{x}^r - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^i} \right) \quad ;$$

$$G^i = \sum_{r=1}^3 g^{ir} G_r,$$

g^{ir} essendo le quantità reciproche delle g_{ir} e $dx^i, d\dot{x}^i$ essendo sottoposti alla condizione che l'elemento $(x + dx, \dot{x} + d\dot{x})$ sia tangente alla superficie.

La condizione (2) si può semplificare. Utilizzando le espressioni (4), si arriva con calcoli, a cui rinunciamo per ora, al risultato che essa è identicamente soddisfatta per ogni vettore ξ^i tangente alla superficie (1), l'elemento lineare (x, \dot{x}) , come pure l'elemento $(x + dx, \dot{x} + d\dot{x})$, essendo tangenti alla superficie, se, e soltanto se

$$(6) \quad \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} A_{33}^\alpha = 0 \quad ; \quad \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} G^\alpha = 0$$

$$\left[\text{con } \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \dot{x}^\alpha = 0 \right].$$

3. Dalla prima delle (6), tenendo conto dalla scelta del sistema di coordinate, si ricava

$$(7) \quad A_{33}^i = \lambda l^i + \mu \delta_3^i \quad \text{con} \quad \delta_3^i = \begin{cases} 1 & \text{se } i = 3 \\ 0 & \text{se } i = 1, 2, \end{cases}$$

(1) E. CARTAN, loc. cit., pp. 5 e 32.

λ e μ essendo delle funzioni di x^i, \dot{x}^i omogenee di grado zero in queste ultime. Moltiplicando questa equazione per g_{ir} e sommando rispetto ad i , si arriva a

$$(8) \quad A_{r33} = \lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^r} + \mu g_{r3}.$$

Moltiplicando per \dot{x}^r e sommando rispetto ad r , vista l'espressione (4) di A_{ijk} e l'omogeneità di \mathcal{F} si ottiene

$$\lambda + \mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^3} = 0$$

e con questa, se si tiene ancora conto delle espressioni di g_{ij} e di A_{ijk} date nelle (4), (5), si ottiene finalmente dalla (8):

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial \dot{x}^r \partial \dot{x}^3 \partial \dot{x}^3} = \mu \mathcal{L} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^r \partial \dot{x}^3}.$$

Da questo sistema di equazioni differenziali segue che $\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \dot{x}^3 \partial \dot{x}^3}$ dipende dalle variabili \dot{x}^r soltanto pel tramite di $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^3}$, ciò che si può ancora esprimere coll'equazione dove entra soltanto \mathcal{L} :

$$\mathcal{L} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^3 \partial \dot{x}^3} = F \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^3} \right),$$

intendendo che F può dipendere, oltre che da $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^3}$, anche dalle x^i ($i = 1, 2, 3$).

Integrando questa equazione differenziale e tenendo conto che \mathcal{L} è funzione omogenea di primo grado nelle \dot{x}^r , risulta finalmente che \mathcal{L} deve avere la forma

$$(9) \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}(\dot{x}^3 - \psi, \varphi, x^i)$$

dove ψ, φ , sono funzioni di $x^1, x^2, x^3, \dot{x}^1, \dot{x}^2$ omogenee di primo grado in \dot{x}^1, \dot{x}^2 , e \mathcal{L} è omogenea di primo grado nei primi due argomenti. \mathcal{F} avrà allora una forma analoga ma sarà omogenea di secondo grado nei primi due argomenti.

4. Dalla scelta del sistema di coordinate, più precisamente dal fatto che le superficie $x^3 = \text{cost.}$ sono trasversali alle curve $x^1 = \text{cost.}, x^2 = \text{cost.}$ (nonchè dalle ipotesi sulla regolarità della funzione \mathcal{F} intorno a $\dot{x}^1 = \dot{x}^2 = 0$ e dall'omogeneità), segue ancora che si deve avere $\psi = N\varphi$, dove

$$N = \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi} \right)_{\substack{\varphi=0 \\ \dot{x}^3 - \psi = 1}}$$

è una funzione solo di x^1, x^2, x^3 .

Dalle ipotesi sulla coordinata x^3 (che rappresenta la lunghezza sulla geodetica) segue che

$$(10) \quad \mathfrak{L}(1, 0, x^i) = 2\mathfrak{F}(1, 0, x^i) = 1.$$

5. Passiamo ora a trarre qualche conseguenza dalla seconda equazione (6): Se le superficie totalmente geodetiche sono note, cioè se è nota la funzione $f(x^1, x^2)$ dipendente ancora da due parametri, possiamo in infiniti modi trovare due funzioni g^1, g^2 di $x^1, x^2; \dot{x}^1, \dot{x}^2$ omogenee di secondo grado nelle \dot{x}^1, \dot{x}^2 e tali che la funzione f sia integrale dell'equazione (6) dove si è messo g^α al posto di G^α . Basta perciò trovare le g^α in modo che le curve integrali del sistema di equazioni differenziali

$$(11) \quad \frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} + 2g^\alpha\left(x^1, x^2, \frac{dx^k}{dt}, \frac{dx^2}{dt}\right) = 0 \quad (\alpha = 1, 2)$$

possano essere rappresentate dalla equazione (1). Se g^α soddisfano a questa condizione, vi soddisferanno anche $g^\alpha + \lambda \dot{x}^\alpha$ con λ funzione arbitraria, giacchè questa modificazione delle g^α cambia il parametro su ogni curva ma non cambia il sistema di ∞^2 curve. Viceversa, se le g^α sono date, la funzione $f(x^1, x^2)$ si può trovare integrando la (11) e ponendo l'integrale sotto la forma (1).

Supponiamo ora nota la f e le g^α . Il più generale sistema di funzioni G^i ($i = 1, 2, 3$) che soddisfino alle (6) è

$$(12) \quad G^i = g^i + p\dot{x}^i + q\delta_i^3 \quad \left(\delta_i^3 = \begin{cases} 1 & \text{se } i = 3 \\ 0 & \text{se } i = 1, 2 \end{cases} \right)$$

con $g^3 = 0$ e p, q funzioni arbitrarie delle x^i, \dot{x}^i omogenee nelle ultime, p di primo grado, q del secondo. Moltiplicando queste equazioni per g_{ir} e sommando rapporto a i si ha

$$G_r = \sum_{i=1}^3 g_{ir} g^i + p \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \dot{x}^r} + q \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \dot{x}^r \partial \dot{x}^3},$$

ciò che si può ancora scrivere

$$\sum_{r=1}^3 g_{ir} g^r + p \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \dot{x}^i} + q \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^3} = \frac{1}{2} \left(\sum_{r=1}^3 \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^r} \dot{x}^r - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x^i} \right).$$

6. Eliminando p, q fra questo sistema di equazioni lineari, otteniamo una equazione in \mathfrak{F}, g^α che insieme con la condizione che g^α dipenda soltanto da $x^1, x^2, \dot{x}^1, \dot{x}^2$ esprime la condizione necessaria e sufficiente perchè le G^i abbiano la forma (12).

Tenendo conto della forma (9) di \mathcal{F} (con $\psi = N\varphi$) e dal fatto che il determinante delle g_{ij} deve essere diverso da zero, quella equazione può essere scritta

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}^1} - 2 \sum_{\alpha=1}^2 g_{1\alpha} g^\alpha - (\mathcal{F}_1 N - \mathcal{F}_2) \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \dot{x}^1 \partial x^j} \dot{x}^j + \\ + (\mathcal{F}_1 N - \mathcal{F}_2) \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} + \mathcal{F}_1 \frac{\partial N}{\partial x^1} \varphi - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^1} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}^2} - 2 \sum_{\alpha=1}^2 g_{2\alpha} g^\alpha - (\mathcal{F}_1 N - \mathcal{F}_2) \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \dot{x}^2 \partial x^j} \dot{x}^j + \\ + (\mathcal{F}_1 N - \mathcal{F}_2) \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} + \mathcal{F}_1 \frac{\partial N}{\partial x^2} \varphi - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^2} \end{array} \right| = 0$$

dove

$$\mathcal{F}_1 = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial (\dot{x}^1 - \psi)} \quad , \quad \mathcal{F}_2 = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi}.$$

Questa equazione, vista l'omogeneità delle funzioni che v'entrano, è equivalente alla seguente:

$$\begin{aligned} & - 2 \sum_{\alpha=1}^2 g_{1\alpha} g^\alpha - (\mathcal{F}_1 N - \mathcal{F}_2) \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \dot{x}^1 \partial x^j} \dot{x}^j + \\ & + (\mathcal{F}_1 N - \mathcal{F}_2) \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} + \mathcal{F}_1 \frac{\partial N}{\partial x^1} \varphi - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^1} \\ \hline & - 2 \sum_{\alpha, \beta=1}^2 g_{\alpha\beta} g^\alpha \dot{x}^\beta - (\mathcal{F}_1 N - \mathcal{F}_2) \frac{\partial \varphi}{\partial x^3} \dot{x}^3 + \\ & + \mathcal{F}_1 \varphi \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial N}{\partial x^\alpha} \dot{x}^\alpha - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^\alpha} \dot{x}^\alpha \end{aligned} = \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}^1}.$$

Ponendo qui $\varphi = (\dot{x}^3 - N\varphi)v$ si ottiene dopo eseguiti alcuni calcoli:

$$\begin{aligned} (13) \quad & \left(\frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}^1} \frac{\partial \varphi}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \dot{x}^1 \partial x^3} \right) (\mathcal{F}_1 N - \mathcal{F}_2) + \left(\frac{2}{\varphi} \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \dot{x}^1 \partial x^\alpha} g^\alpha - \right. \\ & - \frac{1}{\varphi} \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \dot{x}^1 \partial x^\alpha} \dot{x}^\alpha - N \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \dot{x}^1 \partial x^3} + \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} + \frac{N}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}^1} \frac{\partial \varphi}{\partial x^3} \Big) (\mathcal{F}_1 N - \mathcal{F}_2) - \\ & - \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^1} - \mathcal{F}_1 \frac{\partial N}{\partial x^1} v \right) \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}^2} \dot{x}^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^2} - \mathcal{F}_1 \frac{\partial N}{\partial x^2} v \right) \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}^1} \dot{x}^1 = 0 \end{aligned}$$

dove

$$\bar{\mathcal{F}} = \mathcal{F}(1, v, x^1, x^2, x^3).$$

7. Riguardando qui le x^1, x^2, x^3 come costanti, si ha nel primo membro la somma dei prodotti di quattro funzioni di v per quattro funzioni di $\frac{\dot{x}^2}{\dot{x}^1}$. Fra le funzioni di v non possono esistere tre relazioni lineari a coefficienti costanti, perchè allora i mutui rapporti delle funzioni sarebbero costanti ciò che non è in realtà. (Si ha, p. es., $\frac{(\bar{\mathfrak{F}}_1 N - \bar{\mathfrak{F}}_2) v}{\bar{\mathfrak{F}}_1 N - \bar{\mathfrak{F}}_2} = v$). In pari modo, se fra le funzioni di $\frac{\dot{x}^2}{\dot{x}^1}$ esistessero più di due relazioni lineari a coefficienti costanti, risulterebbe che, p. es., il rapporto $\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}^1} / \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}^2}$ sarebbe costante, cioè φ sarebbe una forma lineare e il determinante g_{ij} sarebbe nullo per $\dot{x}^3 = 0$. Ne segue che esistono due di tali relazioni fra le funzioni di v e due fra le funzioni di \dot{x}^3/\dot{x}^2 .

8. Visto che $\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}^1}$ non è proporzionale a $\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}^2}$, segue che avremo

$$(14) \quad \frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}}{\partial x^\alpha} = \bar{\mathfrak{F}}_1 \frac{\partial N}{\partial x^\alpha} v + A_\alpha (\bar{\mathfrak{F}}_1 N - \bar{\mathfrak{F}}_2) + B_\alpha (\bar{\mathfrak{F}}_1 N - \bar{\mathfrak{F}}_2) v \quad (\alpha = 1, 2).$$

Derivando il primo membro di queste equazioni rispetto a v tre volte facendo poi $v = 0$ e tenendo conto che $\bar{\mathfrak{F}}_1 + \bar{\mathfrak{F}}_2 v = 2\bar{\mathfrak{F}}$ si trova, che, $A_\alpha = 0$, che B_α sono le derivate di una funzione - chiamiamola $\log B$ - rispetto a x^α ($\alpha = 1, 2$) e che le derivate di N rispetto a x^α sono proporzionali a B^α , cioè N dipende da x^α soltanto pel tramite di B : $N = N(B, x^3)$. Ciò posto, le (14) diventano

$$\frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}}{\partial x^\alpha} = -\bar{\mathfrak{F}}_2 \frac{v}{B} \frac{\partial B}{\partial x^\alpha} + \bar{\mathfrak{F}}_1 v \left(\frac{N}{B} + \frac{\partial N}{\partial B} \right) \frac{\partial B}{\partial x^\alpha},$$

ciò che prova che $\bar{\mathfrak{F}}$ dipende da x^1, x^2 soltanto pel tramite di B (oltrechè pel tramite di v). Con ciò, le stesse (4) si riducono ad una sola equazione

$$\frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}}{\partial B} + \frac{v}{B} \frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}}{\partial v} - 2 \left(\frac{\partial N}{\partial B} + \frac{N}{B} \right) v \bar{\mathfrak{F}} = 0$$

di cui l'integrale generale è

$$(15) \quad \bar{\mathfrak{F}} = \left(\frac{v}{B} \right)^2 \Phi \left[BN + \frac{B}{v}, x^3 \right]$$

Φ essendo una funzione arbitraria di due argomenti.

9. Introducendo nelle (13) le espressioni (14) di $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^a}$, quelle equazioni devono essere verificate identicamente. Ne risulta

$$(16) \quad \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}^1} \frac{\partial \varphi}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \dot{x}^1 \partial x^3} = 0 \quad ; \quad \frac{2}{\varphi} \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \dot{x}^1 \partial \dot{x}^\alpha} g^\alpha - \frac{1}{\varphi} \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \dot{x}^1 \partial x^\alpha} \dot{x}^\alpha + \\ + \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} - \frac{\dot{x}^2}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}^2} B_1 + \frac{\dot{x}^2}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}_1} B_2 = 0.$$

Dalla prima di queste equazioni, segue che φ deve avere la forma

$$\varphi = M(x^1, x^2, x^3) \bar{\varphi}(x^1, x^2; \dot{x}^1, \dot{x}^2)$$

e con ciò, derivando la seconda rispetto a x^3 , otteniamo

$$\frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^3} \left(\log \frac{M}{B} \right) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \dot{x}^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial x^3} \left(\log \frac{M}{B} \right) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \dot{x}^1} = 0.$$

Siccome il rapporto delle $\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}^1}, \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}^2}$ non può essere indipendente dalle \dot{x}^1, \dot{x}^2 , risulta

$$\frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^3} \left(\log \frac{M}{B} \right) = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial x^3} \left(\log \frac{M}{B} \right) = 0$$

ossia

$$M = \theta(x^1, x^2) \tau(x^3) B.$$

Ciò non è ancora sufficiente, giacchè l'equazione data è la (16) e non la (17). Sostituendo questa espressione di M nella (6), il risultato può essere messo sotto una delle due forme seguenti:

$$(18) \quad 2 \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 (\bar{\varphi} \theta)}{\partial \dot{x}^\beta \partial \dot{x}^\alpha} g^\alpha - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 (\bar{\varphi} \theta)}{\partial \dot{x}^\beta \partial x^\alpha} \dot{x}^\alpha + \frac{\partial (\bar{\varphi} \theta)}{\partial x^\beta} = 0 \quad (\beta = 1, 2).$$

Vuol dire che le curve integrali del sistema (18) sono estremali del problema di calcolo delle variazioni

$$\delta \int (\bar{\varphi} \theta) dt.$$

Se si conosce un integrale primo di questo sistema (18), la conoscenza di g^α dipenderà soltanto da quadrature. E così pure dalla funzione $f(x^1, x^2)$ che interveniva nella (1). Viceversa, se $\bar{\varphi} \theta$ è nota, le g^α si trovano con sole operazioni algebriche e derivazioni, e $f(x^1, x^2)$ per integrazione del sistema (11).

10. *Conclusion.* — L'elemento lineare di uno spazio di Finsler a tre dimensioni che ammette ∞^2 superficie totalmente geodetiche può essere messo sotto la forma (ved. (15)):

$$ds = L(dx^3, \tau(x^3)F, x^3)$$

L essendo omogenea di primo grado nei primi due argomenti e F una funzione di $x^1, x^2; dx^1, dx^2$ omogenea di primo grado nelle dx^1, dx^2 (e tale che il problema di calcolo delle variazioni $\delta \int F(x, dx) = 0$ sia regolare) ⁽¹⁾.

Matematica. — *Sulle funzioni poligene di una variabile bicomplessa duale.* Nota II di J. C. VIGNAUX, presentata ⁽²⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

10. I numeri bicomplessi della forma

$$\zeta = x + ky = (x_1 + ix_2) + k(x_3 + ix_4)$$

dove k rappresenta l'unità immaginaria duale ($k^2 = 0$), x e y sono complessi ordinari ($i^2 = -1$), furono considerati da E. Study ⁽³⁾. Costituiscono un tipo particolare d'ipercomplessi (quaternioni)

$$\zeta = x_1 + ix_2 + kx_3 + hx_4$$

con la seguente legge di moltiplicazione:

$$\begin{aligned} i^2 &= -1, & k^2 &= 0, & h^2 &= 0 \\ ki &= ik = h, & hi &= ih = -k, & hk &= kh = 0, \end{aligned}$$

dove x_1, x_2, x_3, x_4 sono numeri reali ⁽⁴⁾.

(1) È da osservare che questa forma di L è sufficiente per l'esistenza delle superficie totalmente geodetiche senza che siano necessarie le ipotesi che abbiamo fatto al n. 1.

(2) Nella seduta del 3 giugno 1938.

(3) E. STUDY, *Geometrie der Dynamen*, p. 195. Leipzig 1903.

(4) Recentemente il dott. Sobrero in tre Note pubblicate in questi «Rendiconti», 1934, si è occupato degli ipercomplessi

$$t = x + jy + j^2u + j^3v,$$

in cui x, y, u, v sono reali e j indica una nuova unità ipercomplessa, tale da soddisfare alla condizione

$$j^4 + 2j^2 + 1 = (j^2 + 1)^2 = 0.$$

Essa si può mettere sotto la forma di (bicomplesso)

$$t = (\xi' + i\xi'') + \omega(\eta' + i\eta'') \quad (\omega^2 = 0)$$

L'algebra commutativa così definita soddisfa al principio dell'annullamento del prodotto. I divisori dello zero sono i bicompleksi della forma: $\alpha = ab$, $\alpha' = a'k$ con a e a' complessi ordinari.

Il modulo del bicomplesso duale

$$\zeta = x + ky = (x_1 + ix_2) + k(x_3 + ix_4)$$

è il numero reale e positivo ⁽¹⁾

$$|\zeta| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}.$$

Definiremo l'esponenziale e^ζ dalla relazione

$$e^\zeta = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\zeta}{n} \right)^n.$$

Si ha allora

$$e^\zeta = e^{x+ky} = e^x (1 + ky) = e^{x_1 + ix_2} [1 + k(x_3 + ix_4)].$$

Rappresentato il numero bicomplesso duale ζ col punto $M(x_1 \dots x_4)$ d'un S_4 reale euclideo, in cui si sia fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, i divisori dello zero si distribuiscono sui piani coordinati: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

I numeri biduali $\zeta = x + ky$, $\zeta = y - kx$ li chiameremo *reciproci*.

II. DERIVATA RADIALE. — Diremo che la funzione biduale

$$\begin{aligned} w = f(\zeta) &= u(x, y) + kv(x, y) \\ &= (p_1 + ip_2) + k(p_3 + ip_4) \end{aligned}$$

col seguente cambiamento di unità dovuta al prof. T. Levi-Civita:

$$1 + j^2 = \omega, \quad \frac{1}{2}(3j + j^3) = i$$

essendo

$$\xi' = x - u, \quad \xi'' = y - v, \quad \eta' = y, \quad \eta'' = \frac{1}{2}(3v - y).$$

G. AGOSTINELLI utilizzando una sua teoria delle omografie vettoriali complesse ha studiato il quaternioni di Sobrero («Atti del R. Ist. Veneto», XCIV, p. II, 1935). Vedi pure G. SCORZA, *Sopra una certa algebra reale del 4° ordine*. «Rend. della R. Acc. dei Lincei», vol. XIX, 1934; N. SPAMPINATO, *Intorno ad un'algebra reale a 4 unità*. «Rend. della R. Acc. dei Lincei», vol. XIV, 1934, nonché una Memoria degli «Annali di Matematica», to. XIV, 1935-36, e la recente generalizzazione del complesso di Sobrero da lui proposta *Sulle algebre potenziali reali o complesse*. «Rend. della R. Acc. dei Lincei», vol. XXI, 1935, p. 65; inoltre C. CARBONARO, «Rend. del Sem. Matematico della R. Università di Roma», vol. I, f. 4, 1934, e M. L. BRUWIER, *Sur les fonctions holomorphes d'une variable hypercomplexe*. «Bulletin de la Société Royale des Sc. de Liège», n. 5, 1937, e «Mathesis», to. 50, 1936.

(1) N. SPAMPINATO, *Sulle funzioni di una variabile in un'algebra complessa ad n unità*. «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo», to. LVII, 1933, § 1, n. 2.

della variabile biduale $z = x + ky = (x_1 + ix_2) + k(x_3 + ix_4)$ definita in un certo dominio dello S_4 sul quale si sia rappresentata la variabile z , è *funzione poligena* se le funzioni $u(x, y)$, $v(x, y)$ delle due variabili complesse $x = x_1 + ix_2$, $y = x_3 + ix_4$, sono derivabili in questo dominio.

Sia z un punto, δ una retta per esso non parallela al piano coordinato ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$) e consideriamo il rapporto incrementale

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta u + k \Delta v}{\Delta x + k \Delta y} \quad (\Delta x \neq 0)$$

essendo: $z + \Delta z$ un punto di δ . Giacchè è, a meno di infinitesimi d'ordine superiore,

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y \\ \Delta v = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y \end{cases}$$

si ha allora

$$(1) \quad \left(\frac{dw}{dz} \right)_m = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta w}{\Delta z} \right)_\delta = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + m \frac{\partial u}{\partial y} \right) + k \left(\frac{\partial v}{\partial x} + m \frac{\partial v}{\partial y} \right)}{1 + km}$$

dove

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m = m_1 + im_2 \quad (i^2 = -1).$$

Questa espressione definisce la derivata radiale di $f(z)$ in funzione del parametro complesso m .

La (1) può scriversi

$$(2) \quad \left(\frac{dw}{dz} \right)_m = \left[\frac{\partial u}{\partial x} + k \frac{\partial v}{\partial x} \right] + me^{-mk} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + k \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right]$$

dove risultano le condizioni di monogeneità

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Avendo presente che: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + i \frac{\partial p_2}{\partial x_1}$, ...; l'espressione (2)

diviene

$$(4) \quad \left(\frac{dw}{dz} \right)_m = \frac{\partial w}{\partial x_1} + me^{-mk} \left(\frac{\partial w}{\partial x_3} - k \frac{\partial w}{\partial x_1} \right)$$

e la (3) ci dà

$$(3') \quad \begin{cases} \frac{\partial p_1}{\partial x_3} = 0 & \frac{\partial p_1}{\partial x_1} = \frac{\partial p_3}{\partial x_3} \\ \frac{\partial p_2}{\partial x_3} = 0 & \frac{\partial p_2}{\partial x_1} = \frac{\partial p_4}{\partial x_3} \end{cases}$$

Dal sistema (3) si deduce

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$$

pertanto, una funzione biduale monogena è della forma

$$(1) \quad f(\zeta) = P(x) + k[yP'(x) + Q(x)]$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono funzioni olomorfe della variabile complessa x .

Se D è un campo di contorno C ; situato nel piano della variabile: $x = x_1 + ix_2$, la funzione olomorfa (1) è rappresentabile in ogni punto ζ interiore ad un ipercilindro di S_4 mediante la formula

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{P(t) dt}{t - \zeta} + k \left(\frac{y}{2\pi i} \int_C \frac{P(t) dt}{(t - \zeta)^2} + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{Q(t) dt}{t - \zeta} \right).$$

12. DERIVATA AREOLARE E MEDIA. — Introduciamo due operatori differenziali: $Df(\zeta)$ e $\bar{D}f(\zeta)$ che chiameremo rispettivamente *derivata areolare biduale* e *derivata media biduale* della funzione biduale $f(\zeta)$, mediante le relazioni

$$Df(\zeta) = \frac{\partial u}{\partial y} + k \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial w}{\partial x_3} - k \frac{\partial w}{\partial x_1}$$

e

$$\bar{D}f(\zeta) = \frac{\partial u}{\partial x} + k \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial w}{\partial x_1} + k \frac{\partial w}{\partial x_3}.$$

I biduali Dw e $\bar{D}w$ sono pertanto reciproci. La derivata radiale può scriversi

$$\left(\frac{dw}{d\zeta} \right)_m = \bar{D}w + m e^{-mk \left(m - \frac{1}{m} \right)} \cdot Dw.$$

La derivabilità delle componenti $u(x, y)$, $v(x, y)$ d'una funzione poligena $w = f(\zeta)$, ci conduce mediante l'introduzione della reciproca della variabile ζ

$$\tilde{\zeta} = x + ky, \quad \tilde{\zeta}' = y - kx$$

alle espressioni

$$Dw = \frac{\partial w}{\partial \bar{z}'} \quad \text{e} \quad \bar{D}w = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Perciò le operazioni Dw e $\bar{D}w$, si riducono a semplici derivazioni parziali di $f(z)$ considerandola come funzioni di z e \bar{z}' .

13. La nozione d'integrale definito d'una funzione biduale $f(z)$ sopra una curva regolare C di S_4 , come pure le formole integrali di Cauchy e del sig. Pompeiu relative alle funzioni olomorfe e poligene ordinarie ⁽¹⁾, si estendono ugualmente alle funzioni biduali, utilizzando le formole di Green ⁽²⁾ per un S_4

$$\int_C \sum_{j=1}^4 U_j(x_j) dx_j = \iint_S \sum_{p,q=1}^4 \left(\pm \frac{\partial U_p}{\partial x_q} \mp \frac{\partial U_q}{\partial x_p} \right) dx_p dx_q.$$

14. Oltre al bicomplesso duale (*ellittico*) possono definirsi altri due tipi di bicomplessi duali; il *biduale (iperbolico)*

$$z = x + ky \quad (k^2 = 0)$$

dove

$$x = x_1 + jx_2, \quad y = x_3 + jx_4 \quad (j^2 = +1)$$

sono complessi iperbolici, ed il *biduale (parabolico)*

$$\bar{z} = x + ky \quad (k^2 = 0)$$

dove

$$x = x_1 + wx_2, \quad y = x_3 + wx_4 \quad (w^2 = 0)$$

($k \neq w$) sono complessi duali ⁽³⁾.

Lo sviluppo di questa Nota sarà pubblicato prossimamente nelle « Contribucion al Estudio de las Ciencias Fisico-matemáticas de la Univ. de La Plata ».

(1) P. POMPEIU, « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », to. 33, 1912, to. 35, 1913; N. THEODORESCO, *Thésis*. Paris, 1931.

(2) J. B. SHAW, *General Vector Calculus*. « Trans. of the Amer. Math. Soc. », vol. 24, 1922, p. 224.

(3) G. SCORZA, *Corpi numerici e algebre*. Messina, 1921; *Le algebre doppie*. « Rend. della R. Acc. di Napoli », 1922-23, pp. 65-79; G. BARBA, *Sui numeri complessi e su certi gruppi di trasformazioni quadratiche*. « Rend. della R. Acc. di Napoli », 1933-34, pp. 194-197, 200-209.

Matematica. — *Contributi alla geometria proiettiva delle varietà anolonome.* — I. *Teorema topologico per le V_n^m di S_n .*
Nota di F. VYČICHLO, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. E. BOMPIANI.

1. Nella comunicazione del 1° Congresso dell'Unione Matematica Italiana (Firenze 1937) il prof. E. Bortolotti ⁽²⁾ si è occupato fra l'altro degli elementi del secondo e terzo ordine delle curve integrali della varietà V_3^2 nello spazio proiettivo ordinario S_3 uscenti da un punto generico ed ha mostrato che tutti gli elementi del secondo ordine di queste curve giacciono sulla calotta olonoma V_2 del secondo ordine che è comune alle quadriche di un certo sistema lineare a tre parametri. L'estensione di questo risultato per le curve integrali di V_n^m in S_n ha pubblicato in recenti lavori, fertili per nuove ricerche, sulle varietà anolonome il prof. E. Bompiani ⁽³⁾.

In questa breve Nota ci occuperemo dapprima degli elementi E_k, E_{k+1}, E_{k+2} dell'ordine k , risp. $k+1, k+2$, ($k \geq 1$ e finito) delle curve integrali della varietà V_n^m , ($m \geq 2, n \geq 3$) uscenti da un punto E_0 e le quali ivi hanno in comune gli $(E_0), E_1, \dots, E_{k-1}$. Tutti gli elementi E_0, E_1, \dots, E_{k+1} di tali curve appartengono a infinite V_m (olonome) in S_n .

L'anolonomia (e cioè: l'impossibilità dell'appartenenza a una stessa V_m olonoma) si presenta invece per quanto riguarda tutti gli $(E_0), E_1, \dots, E_{k+2}$ delle curve integrali che hanno in E_0 il contatto dell'ordine $(k-1)$.

Nel caso particolare V_3^2 in S_3 mostreremo come si può definire il fascio delle quadriche di Darboux e la quadrica di Lie facendo uso di una V_3 in S_3 che contiene la calotta osculatrice di V_3^2 e soddisfa ad altre condizioni.

2. Siano x^λ , ($\lambda = 1, 2, \dots, n$) coordinate proiettive non omogenee in S_n e siano

$$(2.1) \quad d\zeta^r = \mu_{a_1}^r dx^{a_1},$$

dove

$$r, r_1, r_2, \dots = m+1, m+2, \dots, n; \quad a, a_1, a_2, a_3, \dots = 1, 2, \dots, m;$$

$$\text{e} \quad \mu_{a_1}^r(x^\lambda) = \mu_{a_1}^r(x^a, \zeta^{r_1}),$$

le $(n-m)$ forme di Pfaff non integrabili che definiscono una V_n^m in S_n .

Facendo questo escludiamo dalle considerazioni i punti singolari della V_n^m ; e così in seguito tralascieremo lo studio dei punti eccezionali.

(1) Nella seduta del 19 giugno 1938.

(2) Ved. E. BORTOLOTTI, *Geometria proiettiva differenziale delle superficie anolonome*. «Atti del Primo Congresso dell'Unione Matematica Italiana», Firenze, 1937, pp. 305-311.

(3) E. BOMPIANI, *Sulle varietà anolonome.* — I. *Alcuni teoremi generali.* — II. *Le V_3^2 in S_3 proiettivo.* «Rendiconti R. Accademia Nazionale dei Lincei», XXII, Roma, 1938, pp. 37-52. Ved. p. 40.

(2) I termini omissi nella equazione k -rispetto $(k+1)$ -esima non contengono le derivate $x^{(k-1)}a_i$ risp. $x^{(k)}a_i$.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \partial_{a_1} f^r = \mu_{a_1}^r; \\
 (2) \quad & \partial_{a_2 a_1}^2 f^r \cdot x'^{a_1} x'^{a_2} = (\partial_{a_2} \mu_{a_1}^r + \mu_{a_2}^{r_1} \partial_{r_1} \mu_{a_1}^r) x'^{a_1} x'^{a_2}; \\
 (3) \quad & \partial_{a_3 a_2 a_1}^3 f^r \cdot x'^{a_1} x'^{a_2} x'^{a_3} + 3 \partial_{a_2 a_1}^2 f^r \cdot x''^{a_2} x'^{a_1} = \\
 & = (\partial_{a_3 a_2}^2 \mu_{a_1}^r + \dots) x'^{a_1} x'^{a_2} x'^{a_3} + [\partial_{a_2} \mu_{a_1}^r + \\
 & + \partial_{r_1} \mu_{a_1}^r \cdot \mu_{a_2}^{r_1} + 2 (\partial_{a_1} \mu_{a_2}^r + \partial_{r_1} \mu_{a_2}^r \cdot \mu_{a_1}^{r_1})] x'^{a_1} x''^{a_2}; \\
 & \dots \dots \dots \\
 (k) \quad & \partial_{a_k a_{k-1} \dots a_1}^k f^r \cdot x'^{a_1} \dots x'^{a_k} + \dots + k \partial_{a_1 a_2}^2 f^r \cdot x^{(k-1) a_1} x'^{a_2} = \\
 & = (\partial_{a_k \dots a_2}^{k-1} \mu_{a_1}^r + \dots) x'^{a_1} \dots x'^{a_k} + \\
 & + [\partial_{a_2} \mu_{a_1}^r + \partial_{r_1} \mu_{a_1}^r \cdot \mu_{a_2}^{r_1} + (k-1) (\partial_{a_1} \mu_{a_2}^r + \\
 & + \partial_{r_1} \mu_{a_2}^r \cdot \mu_{a_1}^{r_1})] x'^{a_1} x^{(k-1) a_2}; \\
 (k+1) \quad & \partial_{a_{k+1} \dots a_1}^{k+1} f^r \cdot x'^{a_1} \dots x'^{a_{k+1}} + \dots = \\
 & = (\partial_{a_{k+1} \dots a_2}^k \mu_{a_1}^r + \dots) x'^{a_1} \dots x'^{a_{k+1}} + \dots \\
 (k+2) \quad & (k+1) \cdot \partial_{a_1 a_2}^2 f^r \cdot x'^{a_1} = [\partial_{a_2} \mu_{a_1}^r + \partial_{r_1} \mu_{a_1}^r \cdot \mu_{a_2}^{r_1} + \\
 & + k (\partial_{a_1} \mu_{a_2}^r + \partial_{r_1} \mu_{a_2}^r \cdot \mu_{a_1}^{r_1})] x'^{a_1}.
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

Nel caso $k=1$ abbiamo le equazioni (2.5) che determinano precisamente i valori delle derivate $\partial_{a_1} f^r$, $\partial_{a_2 a_1}^2 f^r$ in E_0 .

Nel caso $k > 1$ si vede subito che l'equazione (2) dal sistema (2.6) moltiplicata per $(k+1)$ è uguale alla somma che si ha moltiplicando la $(k+2)$ -esima equazione dello stesso sistema per x'^{a_2} e sommando rispetto ad a_2 .

Così in generale abbiamo per i valori delle derivate

$$(2.7) \quad \partial_{a_1} f^r, \partial_{a_2 a_1}^2 f^r, \dots, \partial_{a_{k+1} \dots a_1}^{k+1} f^r$$

nel punto E_0 solamente $(k+m)(n-m)$ equazioni lineari indipendenti. Poichè per il numero delle incognite (2.7) nel caso in cui $m > 1$, come supponiamo, si ha

$$(2.8) \quad \left[m + \binom{m+1}{2} + \binom{m+2}{3} + \dots + \binom{m+k}{k+1} \right] (n-m) > (k+m)(n-m)$$

possiamo concludere che in generale è possibile risolvere anche il sistema (2.6) rispetto alle incognite (2.7) (anzi in infiniti modi).

(1) I termini omissi nella equazione k — risp. $(k+1)$ -esima non contengono le derivate $x^{(k-1) a_1}$ risp. $x^{(k) a_1}$.

Mediante la soluzione del sistema (2.5) o una soluzione del sistema (2.6) che dà i valori delle derivate del punto E_0 possiamo scrivere lo sviluppo di Taylor per V_m nell'intorno del punto E_0 fino alle $(k+1)$ -esime derivate ($k \geq 1$); le altre derivate sono arbitrarie. Vediamo subito che fra tutte le V_m che godono la proprietà detta prima ve ne sono infinite che hanno nel punto considerato il contatto dell'ordine $k+1$.

Mostreremo ora come non sia possibile imporre alla V_m un contatto ulteriore con le curve in considerazione. Precisamente:

Non esiste una V_m , ($m \geq 2$) tale che contenga tutti gli E_k, E_{k+1}, E_{k+2} delle curve integrali di V_m^m che hanno in comune $(E_0), E_1, \dots, E_{k-1}$ ($k \geq 1$) nel punto E_0 (1).

Dimostrazione. — Se $k=1$ abbiamo per i valori delle derivate $\partial_{a_1} f^r, \partial_{a_2 a_1}^2 f^r, \partial_{a_3 a_2 a_1}^3 f^r$ in E_0 queste condizioni

$$(2.9) \quad \begin{cases} \partial_{a_1} f^r = \mu_{a_1}^r; & \partial_{a_2 a_1}^2 f^r = \partial_{(a_2} \mu_{a_1)}^r + \partial_{r_1} \mu_{(a_1}^r \cdot \mu_{a_2)}^{r_1}; \\ 3 \partial_{a_2 a_1}^2 f^r = \partial_{a_2} \mu_{a_1}^r + \partial_{r_1} \mu_{a_1}^r \cdot \mu_{a_2}^{r_1} + 2 (\partial_{a_1} \mu_{a_2}^r + \partial_{r_1} \mu_{a_2}^r \cdot \mu_{a_1}^{r_1}); \\ \partial_{a_3 a_2 a_1}^3 f^r = \partial_{(a_3}^2 \mu_{a_2 a_1)}^r + 2 \partial_{r_1 (a_2}^2 \mu_{a_1}^r \cdot \mu_{a_3)}^{r_1} + \partial_{r_1 r_2}^2 \mu_{(a_1}^r \cdot \mu_{a_2}^{r_1} \cdot \mu_{a_3)}^{r_2} + \\ + \partial_{r_1} \mu_{(a_1}^r \partial_{a_3} \mu_{a_2)}^{r_1} + \partial_{r_1} \mu_{(a_1}^r \partial_{|r_2|} \mu_{a_2}^{r_1} \cdot \mu_{a_3)}^{r_2}, \end{cases}$$

delle quali la seconda e la terza equazione non sono in generale compatibili, poichè eliminando $\partial_{a_1 a_2}^2 f^r$ si ha

$$(2.10) \quad \partial_{a_2} \mu_{a_1}^r + \partial_{r_1} \mu_{a_1}^r \cdot \mu_{a_2}^{r_1} = \partial_{a_1} \mu_{a_2}^r + \partial_{r_1} \mu_{a_2}^r \cdot \mu_{a_1}^{r_1}$$

la quale in generale nel punto E_0 non è soddisfatta.

Per $k > 1$ scriviamo nei sistemi (2.2) e (2.4) le $(k+2)$ -esime equazioni e poi confrontiamo anche questi sistemi ed esprimiamo che le equazioni corrispondenti siano identiche per ogni $x^{(k)a_1}, x^{(k+1)a_1}, x^{(k+2)a_1}$. Così otterremo oltre il sistema (2.6) altre tre equazioni di cui quella che esprime l'uguaglianza dei coefficienti della derivata $x^{(k+1)a_2}$ è

$$(2.11) \quad (k+2) \partial_{a_2 a_1}^2 f^r x'^{a_1} = [\partial_{a_2} \mu_{a_1}^r + \partial_{r_1} \mu_{a_1}^r \cdot \mu_{a_2}^{r_1} + \\ + (k+1) (\partial_{a_1} \mu_{a_2}^r + \partial_{r_1} \mu_{a_2}^r \cdot \mu_{a_1}^{r_1})] \cdot x'^{a_1}$$

e quella per i coefficienti di $x^{(k)a_2}$ nel caso $k > 2$ è

$$(2.12) \quad \binom{k+2}{2} [\partial_{a_2 a_1}^2 f^r x'^{a_1} + \partial_{a_3 a_2 a_1}^3 f^r x'^{a_1} x'^{a_3}] = \\ = A_{a_2} (\mu_{a_1}^r, \partial_{a_1} \mu_{a_2}^r, \partial_{\lambda \mu}^2 \mu_{a_2}^r, x'^{a_1}, x'^{a_1} \cdot x'^{a_3})$$

(1) Nel caso $k=1$ e per V_3^2 il teorema è citato dal prof. E. BORTOLOTTI (loc. cit., ved. p. 309) e per V_m^m dal prof. E. BOMPIANI (loc. cit., ved. p. 40).

dove con $A_{a_2}(\dots)$ intendiamo di rappresentare il complesso dei termini che si ricavano dalla $(k+2)$ in (2.6) e i quali contengono μ_a^r e le prime e seconde derivate di μ_a^r moltiplicate per x'^{a_1} risp. $x'^{a_1} \cdot x'^{a_3}$.

Nel caso $k=2$ al posto (2.12) abbiamo due equazioni

$$(2.12 a) \quad \partial_{a_2 a_1}^2 f^r = \partial_{(a_2} \mu_{a_1)}^r + \partial_{r_1} \mu_{(a_1}^r \cdot \mu_{a_2)}^{r_1}$$

$$(2.12 b) \quad 6 \partial_{a_3 a_2 a_1}^3 f^r x'^{a_1} x'^{a_2} = B_{a_3} (\mu_a^r, \partial_\lambda \mu_a^r, \partial_{\mu\lambda}^2 \mu_a^r, x'^{a_1} \cdot x'^{a_2})$$

dove con $B_{a_3}(\dots)$ rappresentiamo il complesso dei termini che contengono μ_a^r e le prime e seconde derivate di μ_a^r moltiplicate per $x'^{a_1} \cdot x'^{a_2}$.

Ma l'equazioni (2.11) e $(k+2)$ nel sistema (2.6) non sono compatibili per $k > 1$. Infatti da queste si ha (eliminando $\partial_{a_2 a_1}^2 f^r$)

$$(2.13) \quad (\partial_{a_2} \mu_{a_1}^r + \partial_{r_1} \mu_{a_1}^r \cdot \mu_{a_2}^{r_1}) x'^{a_1} = (\partial_{a_1} \mu_{a_2}^r + \partial_{r_1} \mu_{a_2}^r \cdot \mu_{a_1}^{r_1}) \cdot x'^{a_1}$$

e poichè per $k > 1$ tutte le x'^{a_1} sono date e tutte non possono essere nulle, l'equazione (2.13) non è in generale soddisfatta.

L'equazione (2.13) e quella che si ha eliminando $\partial_{a_2 a_1}^2 f^r, \partial_{a_3 a_2 a_1}^3 f^r$ dalla (2.12) nel caso $k > 2$, o dalle (2.12 a), (2.12 b) nel caso $k=2$, danno un'altra condizione per i valori μ_a^r e le loro derivate e le derivate x'^{a_1}, x'^{a_1} (nel caso $k=2$ altre due condizioni per μ_a^r e le loro derivate e per x'^{a_1}) che oltre alla (2.13) deve essere soddisfatta affinchè in punti particolari della V_n^m data (o ovunque per una V_n^m particolare) esista una V_m che contenga gli E_k, E_{k+1}, E_{k+2} di tutte le curve integrali che hanno in comune gli $(E_0), E_1, \dots, E_{k-1}$ (di cui E_0, E_1, E_2 per $k > 2$, risp. E_0, E_1 per $k=2$ non sono più arbitrari).

Nel caso $k=1$ abbiamo la condizione (2.10) che deve essere soddisfatta affinchè nei punti particolari E_0 di V_n^m esista una V_m che contenga tutti gli E_1, E_2, E_3 di tutte le curve integrali uscenti da E_0 .

Tutte queste condizioni, come si vede subito, sono per l'esistenza di una tale V_m necessarie e sufficienti.

Matematica. - *Contributi alla geometria proiettiva delle varietà anolonyme.* - II. V_3^2 in S_3 ; fascio di Darboux, quadrica di Lie, spigoli di Green. Nota di F. VYČICHLO, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. E. BOMPIANI.

3. A) Nel caso di una V_3^2 in S_3 definita mediante la forma di Pfaff

$$(3.1) \quad d\zeta = p(x, y, \zeta) dx + q(x, y, \zeta) dy$$

supponiamo che il sistema coordinato sia tale che: a) l'origine $O(0, 0, 0)$ sia il punto considerato che è un punto generico della V_3^2 ; b) il piano $\zeta = 0$ sia il piano tangente di V_3^2 in O ; c) gli assi x, y siano le direzioni delle asintotiche in O ; ed infine, d) che una coppia di rette corrispondenti nella proiettività di cella ⁽²⁾ siano l'asse ζ e la retta impropria del piano tangente. In quest'ipotesi si ha in O :

$$(3.2) \quad p = q = p_x = q_y = p_\zeta = q_\zeta = 0 \quad (3).$$

Tutti gli elementi E_1, E_2 delle curve integrali di (3.1) uscenti da $O (\equiv E_0)$ stanno sulla calotta osculatrice olonoma C ; ogni superficie V_2 (in S_3) che contiene questa calotta C ha nell'intorno del punto O una equazione:

$$(3.3) \quad \zeta = \frac{1}{2} (p_y + q_x) xy + \dots,$$

ove i termini omissi sono arbitrari ed almeno del terzo grado rispetto ad x, y .

Possiamo allora chiedere che V_2 soddisfi ad altre condizioni. Come nel caso olonomo consideriamo fra tutte le superficie che contengono l'intorno del secondo ordine del punto al primo posto le quadriche di Darboux, possiamo anche qui considerare le V_2 aventi con V_3^2 in comune la calotta C e le direzioni di Darboux. Tali direzioni per V_3^2 in O , costruite

(1) Nella seduta del 19 giugno 1938.

(2) Ved. E. BOMPIANI, loc. cit., p. 41.

(3) Gli indici denotano le derivate parziali rispetto alla variabile indicata.

a partire dagli elementi E_2 delle asintotiche secondo il prof. E. Bompiani, vengono date mediante la forma

$$(4) \quad p_{xx} x^3 + p_{yy} y^3 = 0 \quad (1).$$

La superficie V_2 che gode la proprietà detta prima ha nell'intorno di O un'equazione

$$(3.5) \quad z = \frac{1}{2} (p_y + q_x) xy - \frac{1}{6} (p_{xx} x^3 + 3 \lambda x^2 y + 3 \mu xy^2 + q_{yy} y^3) + \dots$$

dove λ, μ sono parametri arbitrari e i termini omissi sono in x, y almeno del quarto ordine. Le quadriche di Darboux di questa superficie (3.5) sono

$$(3.6) \quad z = \frac{1}{2} (p_y + q_x) xy + \left(\frac{2 \lambda}{p_y + q_x} x + \frac{2 \mu}{p_y + q_x} y + \tau z \right) z.$$

Le quadriche (3.6) sono tutte e sole le quadriche che contengono tutti gli elementi E_1, E_2 delle curve integrali di V_3^2 uscenti da O .

Poichè τ è il parametro del fascio di quadriche di Darboux per una V_2 caratterizzata da certi valori λ, μ , abbiamo un sistema lineare a due parametri di fasci per V_3^2 . Vogliamo naturalmente trovare un fascio che si colleghi intrinsecamente con la V_3^2 . Per far questo faremo uso di una quadrica del sistema (3.6) definita dal prof. E. Bortolotti (2).

Questa quadrica B è quell'unica superficie del sistema (3.6) che appartiene anche al fascio di quadriche determinato dalle quadriche osculatrici alle due rigate asintotiche nel punto O .

B) Troveremo l'equazione di questa quadrica B nel sistema locale scelto prima. Per le asintotiche V_3^2 valgono le equazioni

$$(3.7) \quad \begin{cases} dz = p dx + q dy \\ p_x dx^2 + (p_y + q_x) dx dy + q_y dy^2 + p_z dx dy + q_z dy dz = 0. \end{cases}$$

Nell'intorno di O possiamo scrivere per le asintotiche gli sviluppi seguenti

$$(3.8 a) \quad \begin{cases} y = ax^2 + bx^3 + cx^4 + \dots \\ z = rx^3 + sx^4 + \dots \end{cases}, \quad (3.8 b) \quad \begin{cases} x = \alpha y^2 + \beta y^3 + \gamma y^4 + \dots \\ z = \rho y^3 + \sigma y^4 + \dots \end{cases}$$

(1) Ved. E. BORTOLOTTI, loc. cit., p. 310. A. MAXIA nel suo lavoro: *Sulla geometria proiettiva differenziale di una X_3^2 in S_3* (« Rendiconti R. Accademia Nazionale dei Lincei », XXI, Roma, 1935) ha ottenuto queste direzioni mediante procedimento di Clebsch. Altre definizioni delle tangenti di Darboux ben noti nel caso olonomo danno altre terne di Darboux per V_3^2 . (Ved. A. MAXIA, loc. cit., p. 250) le quali potrebbero essere sostituite nelle nostre considerazioni al posto di (3.4). Ma il risultato finale per le quadriche di Darboux non dipende da questo fatto.

(2) E. BORTOLOTTI, loc. cit., p. 311.

ove

$$(3.9) \quad \left\{ \begin{aligned} a &= -\frac{p_{xx}}{2(p_y + q_x)}, \quad b = \frac{(3p_{xy} + 2q_{xx})p_{xx} - (p_y + q_x)p_{xxx}}{6(p_y + q_x)^2} \\ c &= \frac{N}{24(p_y + q_x)^3}, \\ N &= p_{xxxx}(p_y + q_x)^2 + p_{xx}^2(3p_{yy} + 9q_{xy} + 2q_{yz}) - \\ &\quad - (6p_{xxy} + 3q_{xxz} + 4p_{xz}q_x)p_{xx}(p_y + q_x) + \\ &\quad + (4p_{xy} + 3q_{xx})[(3p_{xy} + 2q_{xx})p_{xx} - (p_y + q_x)p_{xxx}]; \\ r &= -\frac{p_{xx}q_x}{6(p_y + q_x)}, \quad s = \frac{[3q_x(2p_{xy} + q_{xx}) - p_yq_{xx}]p_{xx} - 2(p_y + q_x)q_xp_{xxx}}{24(p_y + q_x)^2} \end{aligned} \right.$$

ed i valori per $\alpha, \beta, \gamma, \rho, \sigma$ si otterrebbero cambiando nelle formule (3.9) a in α , ecc. p in q e l'indice x in y ed y in x ma non l'indice z . Poi per la quadrica osculatrice Q_1 della rigata formata dalle tangenti costruite lungo l'asintotica (3.8 a) alle asintotiche del secondo sistema si ha

$$(3.10) \quad z = q_x xy + \left(\frac{q_{xx}}{p_y + q_x} x + \frac{q_{xy}}{p_y + q_x} y + \frac{M_1}{2q_x} \right) z,$$

dove

$$M_1 = + \frac{1}{p_y + q_x} \left[q_{xxy} - 2q_{xz}q_x - \frac{q_{yy}p_{xx} + 2(q_{xx} + p_{xy})q_{xy}}{p_y + q_x} \right]$$

e per l'altra quadrica osculatrice Q_2 si ha

$$(3.11) \quad z = p_y xy + \left(\frac{p_{xy}}{p_y + q_x} x + \frac{p_{yy}}{p_y + q_x} y + \frac{M_2}{2p_y} \right) z^{(1)},$$

dove

$$M_2 = + \frac{1}{p_y + q_x} \left[p_{xyy} - 2p_{yz}p_y - \frac{p_{xx}q_{yy} + 2(p_{yy} + q_{xy})p_{xy}}{p_y + q_x} \right].$$

Il fascio determinato dalle quadriche Q_1, Q_2 contiene una e una sola quadrica B comune al sistema (3.6); la sua equazione è

$$(3.12) \quad z = \frac{p_y + q_x}{2} xy + \left[\frac{2p_{xy}q_x + q_{xx}(p_y + q_x)}{4q_x(p_y + q_x)} x + \right. \\ \left. + \frac{2q_{xy}p_y + p_{yy}(p_y + q_x)}{4p_y(p_y + q_x)} y + \frac{M_1p_y + M_2q_x}{4p_yq_x} z \right] z.$$

(1) Dalle equazioni (3.10) rispetto (3.11) si ricava subito che Q_1 rispetto Q_2 ha con l'asintotica (lungo quale è costruita la sua rigata) il contatto del terzo ordine.

C) Prendiamo ora per la V_2 che viene data finora dall'equazione (3.5) una superficie tale che la quadrica B sia contenuta nel suo fascio delle quadriche di Darboux.

Per V_2 abbiamo questa equazione:

$$(3.13) \quad \chi = \frac{p_y + q_x}{2} xy - \frac{1}{6} \left(p_{xx} x^3 - 3 \frac{2 p_{xy} q_x + q_{xx} (p_y + q_x)}{4 q_x} x^2 y - \right. \\ \left. - 3 \frac{2 q_{xy} p_y + p_{yy} (p_y + q_x)}{4 p_y} y^2 x + q_{yy} y^3 \right) + \dots$$

Il suo fascio delle quadriche di Darboux è

$$(3.14) \quad \chi = \frac{p_y + q_x}{3} xy + \left(\frac{2 p_{xy} q_x + q_{xx} (p_y + q_x)}{4 q_x (p_y + q_x)} x + \right. \\ \left. + \frac{2 q_{xy} p_y + p_{yy} (p_y + q_x)}{4 p_y (p_y + q_x)} y + \tau \chi \right) \chi.$$

Si vede subito che questo fascio è l'unico nel sistema (3.6) pel quale la polarità fra le rette del piano tangente ($\chi = 0$) e le rette della stella con il centro nel punto di contatto (O) coincide con la polarità determinata dalla quadrica B.

Poichè questo fascio si collega intrinsecamente alla V_3^2 , possiamo prenderlo come fascio delle quadriche di Darboux della V_3^2 . Quindi la quadrica B determina il fascio delle quadriche di Darboux della V_3^2 nello stesso modo come nel caso olonomo lo determina la quadrica di Lie.

Ma possiamo trovare un'altra analogia fra la quadrica B e quella di Lie.

D) Sappiamo che finora i termini del quarto grado nell'equazione (3.13) della V_2 sono arbitrari e che possiamo prenderli in infiniti modi. Qui ci fermeremo a determinare il coefficiente C_4 di $x^2 \cdot y^2$, il quale interviene essenzialmente nell'equazione della quadrica di Lie di una superficie ⁽¹⁾.

Dalla definizione geometrica della quadrica B della V_3^2 si vede che nel caso olonomo questa quadrica coincide con entrambe le superficie Q_1 e Q_2 (ved. (3.10), (3.11)) e costituisce la quadrica di Lie. Prendiamo allora quale V_2 , che approssima in certo senso la V_3^2 , una superficie tale che B sia la sua quadrica di Lie. Otterremo per V_2 questa equazione:

$$(3.15) \quad \chi = \frac{1}{2} (p_y + q_x) xy - \frac{1}{6} \left(p_{xx} x^3 - 3 \frac{2 p_{xy} q_x + q_{xx} (p_y + q_x)}{4 q_x} x^2 y - \right. \\ \left. - 3 \frac{2 q_{xy} p_y + p_{yy} (p_y + q_x)}{4 p_y} y^2 x + q_{yy} y^3 \right) + C_4 x^2 y^2 + \dots,$$

(1) Ved. per es., il libro FUBINI-ČECH, *Geometria proiettiva differenziale*, I, 1926, p. 126.

dove

$$C_4 = \frac{1}{16 p_y q_x (p_y + q_x)} \cdot [(p_y + q_x)^2 (q_{xy} p_y + p_{yy} q_{xx} + p_{yyx} q_x - \\ - 2 q_x p_y (q_{xz} + p_{yz})) - 2 q_{xy} p_{xy} (p_y^2 + q_x^2) - p_{xx} q_{yy} (q_x - p_y)^2].$$

La dimostrazione costruttiva è immediata. Infatti la superficie

$$(3.16) \quad \begin{aligned} z &= bxy + a_1 x^3 + b_1 x^2 y + b_2 xy^2 + a_2 y^3 + \\ &+ A_1 x^4 + B_1 x^3 y + C_4 x^2 y^2 + B_2 xy^3 + A_2 y^4 + \dots, \quad (b \neq 0) \end{aligned}$$

ha in $O(0, 0, 0)$ la quadrica di Lie

$$(3.17) \quad z = bxy + \frac{b_1}{b} xz + \frac{b_2}{b} yz + \frac{1}{b^2} \left(C_4 - \frac{9a_1 a_2 + 4b_1 b_2}{2b} \right) z^2.$$

Facendo uso dell'equazione (3.12) della quadrica B e dell'equazione (3.13) con il termine $+ C_4 x^2 y^2$ per la V_2 e confrontando (3.16) e (3.17) con (3.13) risp. (3.12), otterremo per C_4 il valore scritto nella (3.15). Possiamo concludere:

Fra le infinite V_2 olonome che approssimano V_3^2 nel punto E_0 in modo tale che contengono tutti gli elementi E_1, E_2 delle curve integrali di V_3^2 uscenti da E_0 , ve ne sono anche infinite che hanno pure le stesse direzioni di Darboux come V_3^2 e la quadrica B come quadrica di Lie. (Tutte queste V_2 hanno in comune l'intorno del terz'ordine del punto E_0).

In questo modo abbiamo risposto in certo senso alla domanda naturale fino a che punto la quadrica B possa costituire l'analogo della quadrica di Lie per la varietà anolonomica V_3^2 in S_3 proiettivo ⁽¹⁾.

4. La polarità determinata dalla quadrica B fra le rette del piano tangente della V_3^2 e le rette della stella in punto tangente O può servire anche per la definizione di altre rette invarianti della V_3^2 in S_3 proiettivo facendo uso delle rette invarianti ⁽²⁾ già note in piano tangente e viceversa di quelle della stella che ha per centro il punto O . Tali rette nel piano tangente della V_3^2 o nella stella di centro O possono ottenersi mediante estensione opportuna delle definizioni delle rette invarianti ben note nel caso olonomo. Ma non sempre le differenti definizioni caratteristiche di una retta invariante della V_2 olonoma estese alla V_3^2 anolonomica danno la stessa retta ⁽³⁾.

(1) E. BORTOLOTTI, loc. cit., p. 311.

(2) Per es., le rette «canoniche» che dipendono dall'intorno del quarto ordine del punto.

(3) Così, per es., A. MAXIA ha ottenuto già le tre terne di Darboux della V_3^2 , loc. cit., p. 250.

Così, per esempio, otterremo quattro « primi » e quattro « secondi spigoli di Green ». La prima retta è quella che ha ottenuto A. Maxia facendo uso dell'estensione della definizione del prof. E. Bompiani per il « secondo spigolo di Green » della V_2 olonoma ⁽¹⁾. La seconda retta è la polare del « primo spigolo di Green », che ha ottenuto lo stesso Maxia mediante la costruzione duale, nella polarità determinata dalla quadrica B.

Altre due potremo ottenere facendo uso della definizione seguente: Il « secondo spigolo di Green » è la retta che congiunge i flessi della cubica di Strazzeri ⁽²⁾; la quale si può senz'altro estendere alla V_3^2 .

Infatti per i rami della sezione piana tangente $\zeta = 0$ con V_3^2 definita da (3.1) ⁽³⁾ valgono nell'intorno del punto O gli sviluppi:

$$(4.1) \quad \begin{cases} x = -\frac{q_{yy}}{2(q_x + 2p_y)}y^2 - \frac{q_{yyy}(q_x + 2p_y) - 3q_{yy}(p_{yy} + q_{xy})}{6(q_x + 2p_y)(q_x + 3p_y)}y^3 + \dots \\ y = -\frac{p_{xx}}{2(p_y + 2q_x)}x^2 - \frac{p_{xxx}(p_y + 2q_x) - 3p_{xx}(q_{xx} + p_{xy})}{6(p_y + 2q_x)(p_y + 3q_x)}x^3 + \dots \end{cases}$$

E quindi la cubica di Strazzeri per V_3^2 ha equazione

$$(4.2) \quad xy + a_1 x^3 + b_1 x^2 y + b_2 xy^2 + a_2 y^3 = 0$$

dove

$$a_1 = \frac{p_{xx}}{2(p_y + 2p_x)} \quad , \quad b_1 = -\frac{2[p_{xxx}(p_y + 2q_x) - 3p_{xx}(q_{xx} + p_{xy})]}{p_{xx}(p_y + 3q_x)}$$

e per a_2, b_2 valgono analoghe espressioni che otterremo cambiando nelle formule per a_1 e b_1 le lettere p in q , e l'indice x, y e viceversa.

La retta che congiunge i flessi della cubica (4.2) è

$$(4.3) \quad b_1 x + b_2 y + 1 = 0$$

e questa retta è un'altro « secondo spigolo di Green » della V_3^2 poichè differisce da quello che ha ottenuto A. Maxia. La sua polare rispetto ad B dà « primo spigolo di Green ». La costruzione duale rispetto a quella detta prima dà un altro (quarto) « primo spigolo di Green » e la sua polare rispetto ad B è il quarto « secondo spigolo di Green ». Possiamo ricavare subito che l'identità di qualsiasi due rette di queste quattro esprime la condizione necessaria e sufficiente poichè V_3^2 sia olonoma.

(1) A. MAXIA, loc. cit., p. 252.

(2) La cubica di Strazzeri è la cubica nodata nel piano tangente della V_2 di cui ogni ramo ha in comune con un ramo della sezione piana tangente (nel punto tangente) il contatto del terzo ordine.

(3) Supponiamo lo stesso sistema coordinato come nel paragrafo 3.

Dall'altra parte le definizioni delle rette canoniche di V_2 olonome estese a V_3^2 danno qualche volta rette invarianti che dipendono dall'intorno d'ordine più elevato di quello relativo nel caso olonomo. (Per es., le direttrici di Wilczynski ⁽¹⁾).

Con questi esempi volevamo mostrare la grande arbitrarietà che si presenta volendo ordinare l'intorno del terzo o quarto ordine del punto di una varietà V_3^2 facendo uso delle superficie olonome o delle analogie con queste superficie ⁽²⁾.

Meccanica. — *Sugli stati di coazione determinati in un sistema elastico per superamento del limite di elasticità.* Nota di F. LEVI, presentata ⁽³⁾ dal Socio G. FUBINI.

In una Nota pubblicata molti anni or sono in questi stessi « Rendiconti » ⁽⁴⁾ il Volterra dimostrava il seguente teorema che estende agli stati di coazione dovuti a due distinte distorsioni quella reciprocità che il teorema di Betti stabilisce fra gli stati di deformazione dovuti a due sistemi distinti di forze esterne:

« Se in un corpo elastico più volte connesso due sistemi di distorsioni « generano due sistemi di sforzi, la somma dei prodotti degli sforzi del primo « sistema per le caratteristiche del secondo sistema di distorsioni è uguale « al prodotto degli sforzi del secondo sistema per le caratteristiche del primo « sistema di distorsioni ».

È nostra intenzione applicare ora questo teorema ad una particolare coppia di distorsioni opportunamente scelte allo scopo di dimostrare come esso permetta di stabilire, nel quadro della nuova teoria dell'equilibrio elastoplastico del Colonnetti ⁽⁵⁾ un teorema la cui funzione corrisponderà, in un certo senso, a quella svolta dal teorema di Betti nell'ambito della teoria classica dell'elasticità.

Per questo, prendiamo in esame una qualsiasi struttura iperstatica nei confronti della quale siano (o si possano con sufficiente approssimazione rite-

(1) A. MAXIA, loc. cit., pp. 252, 253.

(2) La presente Nota è stata scritta nell'Istituto matematico della R. Università di Firenze ove avevo l'onore di studiare presso il prof. E. Bortolotti di cui ricordo con ringraziamenti rispettosi gli incoraggiamenti e i consigli.

(3) Nella seduta del 19 giugno 1938.

(4) V. VOLTERRA, *Sulle distorsioni dei solidi elastici più volte connessi*, « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », vol. XIV 1905 1° sem., p. 351. Cfr. anche O. SESINI, *Sulle coazioni elastiche* in « Atti della Pontificia Accademia delle Scienze Nuovi Lincei », anno LXXIX, 1926, p. 239.

(5) G. COLONNETTI, *Saggio di una Teoria generale dell'equilibrio elasto-plastico*. « Pontificia Accademia Scientiarum », Città del Vaticano, 1938.

nere) verificate le ipotesi classiche della teoria di Barré de Saint-Venant, e supponiamo di applicarvi un sistema di forze esterne che determini il raggiungimento del limite elastico nei punti più sollecitati.

La teoria dell'equilibrio elasto-plastico che il Colonnetti ha recentemente svolto in questi ed in altri « Rendiconti » ⁽¹⁾ stabilisce che l'effetto risultante delle deformazioni plastiche che appaiono in queste condizioni può identificarsi con una distorsione di Volterra di cui le caratteristiche δ (dilatazione secondo l'asse geometrico della struttura) φ (rotazione intorno all'asse di flessione) Ψ (scorrimento normale all'asse geometrico) si possono scrivere

$$\delta = \int \bar{\lambda} \cdot ds \quad \varphi = \int \bar{\mu} \cdot ds \quad \Psi = \int \bar{\gamma} \cdot ds$$

in funzione delle corrispondenti caratteristiche $\bar{\lambda} \cdot ds$, $\bar{\mu} \cdot ds$, $\bar{\gamma} \cdot ds$, della distorsione intervenuta sul tronco elementare di lunghezza ds .

All'annullarsi delle forze esterne le deformazioni plastiche e la conseguente distorsione naturalmente permangono e determinano nella struttura uno stato di coazione residuo di cui indicheremo con

$$\mathfrak{N} \quad , \quad \mathfrak{M} \quad , \quad \mathfrak{T} \quad ,$$

rispettivamente lo sforzo normale, il momento flettente e lo sforzo di taglio in corrispondenza della sezione generica.

A quella stessa struttura, e indipendentemente dalla precedente applicazione di forze esterne, supponiamo ora di imprimere, in corrispondenza di una sezione qualsiasi, una distorsione di caratteristiche

$$\delta' \quad , \quad \varphi' \quad , \quad \Psi'$$

e siano

$$\mathfrak{N}' \quad , \quad \mathfrak{M}' \quad , \quad \mathfrak{T}' \quad ,$$

le componenti dello stato di tensione che questa distorsione determina nella sezione generica.

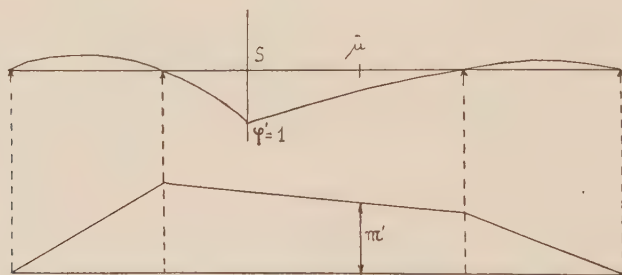
(1) G. COLONNETTI, *Sull'equilibrio elastico dei sistemi in cui si verificano anche deformazioni non elastiche*. 4 Note. « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », vol. XXV, ser. 6^a, 1937; ID., *Nuovi punti di vista sulla statica degli archi molto ribassati*. « L'Ingegnere », Roma, 1937; ID., *Sul calcolo delle deformazioni nelle travi in cemento armato*. « Il cemento armato », Milano, 1937; ID., *Analisi delle deformazioni plastiche e del conseguente stato di tensione nelle travi in cemento armato*. « Il cemento armato », Milano, 1937; ID., *Il secondo principio di reciprocità e le sue applicazioni al calcolo delle deformazioni permanenti*. « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », vol. XXVII, ser. 6^a, 1938.

Il teorema di Volterra trascritto all'inizio della presente Nota, applicato alle due distorsioni successivamente definite si scrive

$$(1) \quad \mathfrak{U} \cdot \delta' + \mathfrak{N} \cdot \varphi' + \mathfrak{T} \cdot \Psi' = \int \mathfrak{U}' \bar{\lambda} ds + \int \mathfrak{N}' \bar{\mu} ds + \int \mathfrak{T}' \bar{\gamma} \cdot ds$$

ciò che, sotto forma di teorema, può enunciarsi:

« L'integrale (esteso a tutto il corpo) della somma dei prodotti delle
« singole componenti di una distorsione ottenuta per raggiungimento del
« limite elastico in una struttura che verifichi le ipotesi di De Saint-Venant,
« per le corrispondenti componenti di tensione dovute ad una qualsiasi distor-
« sione impressa, è uguale alla somma dei prodotti delle singole componenti
« della distorsione impressa per le corrispondenti componenti di tensione
« dovute alla distorsione plastica ».



Sono particolarmente interessanti, dal punto di vista dello studio delle singole componenti dello stato di tensione interno residuo, i casi particolari di applicazione di questo teorema che si ottengono quando, delle componenti della distorsione impressa, una sola è diversa da zero ed assume valore unitario. Applicazioni queste della reciprocità fra due distorsioni allo studio degli stati di coazione che il Colonnetti aveva indicate sin dal 1928 per l'analisi degli stati di coazione dovuti a variazioni di temperatura ⁽¹⁾.

A titolo di esempio, prendiamo in considerazione la più semplice delle strutture conformi alle ipotesi di De Saint-Venant: una trave prismatica o cilindrica semplicemente appoggiata su n appoggi orizzontalmente allineati e destinata a sopportare esclusivamente carichi verticali.

Supponiamo che, sotto l'azione di una certa condizione di carico, il limite di elasticità sia stato raggiunto in certe regioni ben determinate della trave e supponiamo di aver proceduto all'analisi delle deformazioni plastiche, o più semplicemente delle curvature plastiche $\bar{\mu}$, rispetto alle quali riterremo trascurabili gli scorrimenti $\bar{\gamma}$ (per quelle stesse ragioni per cui, nella

(1) G. COLONNETTI, *Nuovo contributo alla teoria delle coazioni elastiche ed alle sue applicazioni tecniche*. « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », vol. VIII, 1928, 2° sem.

ordinaria teoria della trave inflessa si trascurano gli effetti dello sforzo di taglio per rapporto a quelli del momento flettente).

Proponiamoci allora di studiare, in applicazione del nuovo teorema di reciprocità, il momento flettente residuo \mathfrak{M} in una qualsiasi sezione S .

Per questo, imprimiamo alle due faccie di un taglio supposto praticato in corrispondenza di S , una rotazione relativa unitaria $\varphi' = 1$.

L'equazione (1) in questo caso si riduce a

$$\mathfrak{M} = \int_s \mathfrak{M}' \cdot \bar{\mu} ds$$

in base alla quale possiamo dire che basta considerare il diagramma delle $\bar{\mu}$ come un ordinario diagramma di carico perchè il diagramma dei momenti flettenti \mathfrak{M}' per la distorsione ipotetica impressa in corrispondenza di S si possa interpretare come linea d'influenza del momento flettente residuo.

Dopo di che non vi è più alcuna difficoltà a fondare sulle considerazioni che precedono una teoria generale delle linee di influenza degli sforzi residui.

Meccanica. — *Sul moto non permanente di un solido in un fluido indefinito incompressibile.* Nota di E. PISTOLESI, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Lo studio delle forze che si esercitano su di un solido che si muove entro un fluido indefinito nel caso di moto non permanente viene di solito effettuato in base al teorema dell'impulso, equiparando cioè l'impulso della reazione che il solido esercita sul fluido all'incremento di quantità di moto del fluido circostante; e analogamente per il momento d'impulso e il momento della quantità di moto. In queste considerazioni⁽²⁾ non si tiene generalmente conto in modo esplicito del comportamento del fluido all'infinito, ciò che può lasciare qualche dubbio sul rigore del procedimento. Ora, non soltanto è possibile un'ipotesi del tutto immune da ogni obiezione, ma è possibile pure dedurre interessanti conseguenze che non mi costa siano state finora messe in luce, come la definizione del centro di un profilo indipendentemente dalla sua rappresentazione conforme sul cerchio. Si può infine considerare anche il caso in cui dal solido (ala) si distacchino vortici liberi.

La presente Nota ha lo scopo di mostrare come il problema è stato da me impostato nelle mie lezioni di Aerodinamica all'Università di Pisa.

(1) Nella seduta del 19 giugno 1938.

(2) Si veda, ad es., PISTOLESI, *Aerodinamica*, e la *Aerodynamic Theory* edita da F. W. DURAND.

Non contenendo essa sostanziali novità, il suo interesse è prevalentemente didattico; ma ritengo che essa non manchi di qualche interesse anche scientifico.

Un corpo, la cui superficie di contorno indicheremo con σ , si muova in un fluido incompressibile ed indefinitamente esteso. Se il moto è ovunque irrotazionale, vale la legge di Bernoulli, che, in assenza di forze di massa, scriveremo:

$$(1) \quad p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = f(t)$$

dove φ è il potenziale di velocità e $f(t)$ è la costante di Bernoulli, funzione generalmente del tempo.

La quantità di moto \mathbf{Q} del fluido esistente in uno spazio τ compreso fra la superficie σ del corpo e una superficie Σ di controllo (es. una sfera di raggio R) è data da:

$$\mathbf{Q} = \rho \int_{\tau} \mathbf{v} d\tau = \rho \int_{\tau} \text{grad } \varphi \cdot d\tau$$

ovvero, per il teorema del gradiente:

$$\mathbf{Q} = \rho \int_{\sigma + \Sigma} \varphi \mathbf{n} d\sigma$$

dove \mathbf{n} indica il versore diretto secondo la normale e orientato verso l'esterno dello spazio τ (e quindi, su σ , verso l'interno del corpo).

La variazione che la quantità di moto \mathbf{Q} subisce nel tempuscolo dt uguaglia l'impulso delle forze applicate, ossia, nella già supposta assenza di forze di massa, delle pressioni al contorno. Se pertanto indichiamo con \mathbf{P} il risultante delle pressioni su Σ e con \mathbf{F} il risultante delle pressioni su σ (ossia l'azione dinamica del fluido sul corpo), avremo:

$$(2) \quad \mathbf{P} - \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{Q}}{dt} = -\rho \int_{\Sigma} \mathbf{v} v_n d\sigma + \rho \frac{d}{dt} \int_{\sigma} \varphi \mathbf{n} d\sigma + \rho \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \varphi \mathbf{n} d\sigma$$

dove il primo termine al secondo membro rappresenta la quantità di moto del fluido uscente da Σ e gli altri due la variazione della quantità di moto del fluido contenuto nello spazio τ . Si noti che nello scrivere la (2) si è supposto che la superficie σ del corpo sia impenetrabile al fluido, ossia che entro σ non vi siano sorgenti.

Se così non fosse, occorrerebbe aggiungere il termine $-\rho \int_{\sigma} \mathbf{v} v_{nr} d\sigma$,

dove v_{nr} indica la componente diretta secondo la normale a σ della velocità del fluido relativa a σ .

L'ultimo termine della (2), essendo Σ un contorno fisso, può scriversi $\rho \int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \mathbf{n} d\sigma$. Ma per la (1):

$$\mathbf{P} = - \int_{\Sigma} p \mathbf{n} d\sigma = \rho \int_{\Sigma} \frac{v^2}{2} \mathbf{n} d\sigma + \rho \int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \mathbf{n} d\sigma$$

e perciò:

$$(3) \quad \mathbf{F} = \rho \int_{\Sigma} \frac{v^2}{2} \mathbf{n} d\sigma + \rho \int_{\Sigma} v v_n d\sigma - \rho \frac{d}{dt} \int_{\sigma} \varphi \mathbf{n} d\sigma.$$

Ora, se la corrente è *euleriana* (campo che si estende all' ∞ , φ funzione regolare e monodroma) si ha:

$$\varphi = V_x + \frac{A}{r} + \frac{B(\theta, \lambda)}{r^2} + \dots$$

dove r, θ e λ sono le coordinate polari nello spazio. Il primo termine rappresenta una corrente traslatoria uniforme, il secondo una corrente di sorgente, che dà luogo ad un flusso finito attraverso la superficie di controllo. Se ammettiamo il fluido in quiete all' ∞ , φ tende a zero al crescere di r come $\frac{1}{r}$ e quindi la velocità tende a zero come $\frac{1}{r^2}$. Perciò nella (3) i primi due termini sono dell'ordine di $\frac{1}{R^2}$, cioè possono rendersi piccoli a piacere aumentando R ; essi pertanto sono complessivamente nulli. Segue:

$$(4) \quad \mathbf{F} = - \rho \frac{d}{dt} \int_{\sigma} \varphi \mathbf{n} d\sigma$$

che è la formula che volevamo dimostrare.

In modo analogo si dimostra, applicando il teorema del momento della quantità di moto:

$$(5) \quad \mathbf{M} = - \rho \frac{d}{dt} \int_{\sigma} (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \varphi \mathbf{n} d\sigma,$$

essendo \mathbf{O} il polo dei momenti e \mathbf{P} il punto generico della superficie σ ed essendo la derivata effettuata rispetto al tempo nello spazio fisso.

Se entro σ vi è una sorgente, occorre scrivere, in base a quanto si è prima osservato:

$$(4 a) \quad \mathbf{F} = - \rho \frac{d}{dt} \int_{\sigma} \varphi \mathbf{n} d\sigma + \rho \int_{\sigma} v v_{nr} d\sigma$$

$$(5 a) \quad \mathbf{M} = - \rho \frac{d}{dt} \int_{\sigma} (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \varphi \mathbf{n} d\sigma + \rho \int_{\sigma} (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge v v_{nr} d\sigma.$$

È noto come dalla (4) e dalla (5) si deducano i concetti e le espressioni delle *masse apparenti addizionali* e dei *momenti d'inerzia apparenti addizionali*, e come, nel caso di moto uniforme, la (4) conduca al paradosso D'Alembert.

2. Se dal corpo si diparte una superficie di discontinuità σ_i per la velocità, occorre comprendere nella σ questa superficie contata due volte in relazione alle due faccie di essa. Poichè la σ_i è superficie di discontinuità per la velocità, ma non per la pressione, il contributo di essa alla \mathbf{F} e alla \mathbf{M} è nullo; perciò le formule (4) e (5) estese a $\sigma + \sigma_i$ forniscono ugualmente la risultante delle pressioni ed il momento sul corpo. Se si astrae dal moto proprio della σ_i , il contributo che da essa deriva alle espressioni di \mathbf{F} e di \mathbf{M} si limita a quello derivante dall'accrescimento della sua estensione. Indicando con $\Delta\varphi$ la differenza di potenziale fra punti affacciati della superficie σ_i , si avrà:

$$(4\ b) \quad \mathbf{F} = -\rho \frac{d}{dt} \int_{\sigma} \varphi \mathbf{n} d\sigma + \rho \int_L \Delta\varphi \cdot \mathbf{v}_L \wedge d\mathbf{L}$$

$$(5\ b) \quad \mathbf{M} = -\rho \frac{d}{dt} \int_{\sigma} (\mathbf{P} - \mathbf{O} \wedge \varphi \mathbf{n} d\sigma + \rho \int_L (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge (\Delta\varphi \cdot \mathbf{v}_L \wedge d\mathbf{L})$$

dove con L si è indicata la linea di distacco della σ_i dal corpo, con \mathbf{v}_L la velocità dei punti di questa linea (generalmente variabile da punto a punto) e con $\Delta\varphi$ si intende la differenza di potenziale fra la faccia positiva e la faccia negativa di σ_i rispetto al senso del vettore $\mathbf{v}_L \wedge d\mathbf{L}$.

Poichè $\Delta\varphi$ è il valore della circolazione corrispondente ai punti L , che potremo chiamare Γ_L , segue il teorema di Kutta-Joukowski generalizzato.

Se si tiene conto opportunamente del moto proprio della superficie di discontinuità (superficie vorticoso) ossia delle « velocità indotte », si ottiene pure la « resistenza indotta ».

3. Le condizioni precedenti si estendono immediatamente al moto piano. In questo caso peraltro può esservi una circolazione attorno al profilo anche senza distacco attuale di vortici liberi; è necessario pertanto ridurre il campo semplicemente connesso operando in esso un taglio AB (fig. 1), che si assumerà, come al numero precedente, quale linea σ_i .

Se la circolazione Γ attorno a σ resta costante nel tempo, ripetendo il procedimento del caso spaziale e tenendo conto che la velocità v tende a zero come $\frac{1}{r}$ al crescente indefinito di r , si ottiene:

$$(6) \quad \mathbf{F} = -\rho \frac{d}{dt} \int_{\sigma} \varphi \mathbf{n} d\sigma + i\rho \Gamma \mathbf{v}_A$$

dove \mathbf{F} indica ora la forza per unità di lunghezza nel senso delle generatrici, σ il contorno del profilo e i rappresenta una rotazione di $\frac{\pi}{2}$ nel senso positivo (antiorario).

È facile vedere che se si cambia il punto A, i due termini al secondo membro della (6) cambiano ambedue, restando peraltro invariata la loro somma.

Nel caso di moto uniforme, segue dalla (6) il teorema di Kutta-Joukowski.

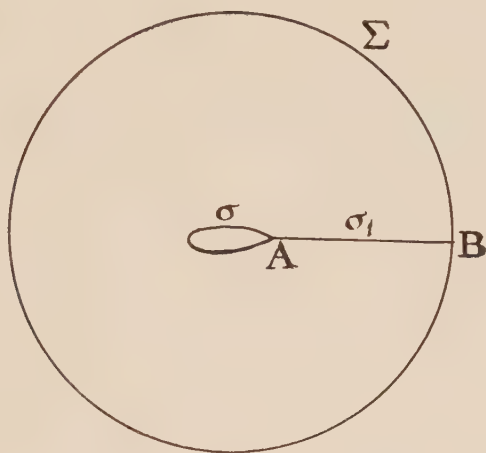


Fig. 1.

Se dal profilo si distaccano vortici liberi in conseguenza di un cambiamento nella circolazione Γ , occorre prendere come linea σ_1 la linea luogo dei vortici liberi (linea di discontinuità per la velocità, oltre che per il potenziale) e la (6) vale ancora se si prescinde dalle deformazioni proprie della σ_1 .

Tornando al caso in cui il moto non è accompagnato da variazioni della circolazione, si ponga

$$\varphi = \varphi' + \varphi''$$

dove φ' indica il potenziale della corrente euleriana e φ'' quello della corrente circolatoria. Avremo:

$$(6'') \quad \mathbf{F} = -\rho \frac{d}{dt} \int_{\sigma} \varphi' \mathbf{n} d\sigma - \rho \frac{d}{dt} \int_{\sigma} \varphi'' \mathbf{n} d\sigma + i\rho \Gamma \mathbf{r}_A.$$

Supponiamo ora di prendere come punto di riferimento della velocità un punto C del profilo, diverso da A ed anche non situato sul contorno

(fig. 2), ma rigidamente connesso al profilo, che supporremo pure rigido (le considerazioni che precedono valgono anche per profilo deformabile). Nella (6'') dovremo scrivere, in luogo di $\rho \Gamma v_A$,

$$i\rho \Gamma v_c - i\rho \Gamma \frac{d}{dt} (C - A).$$

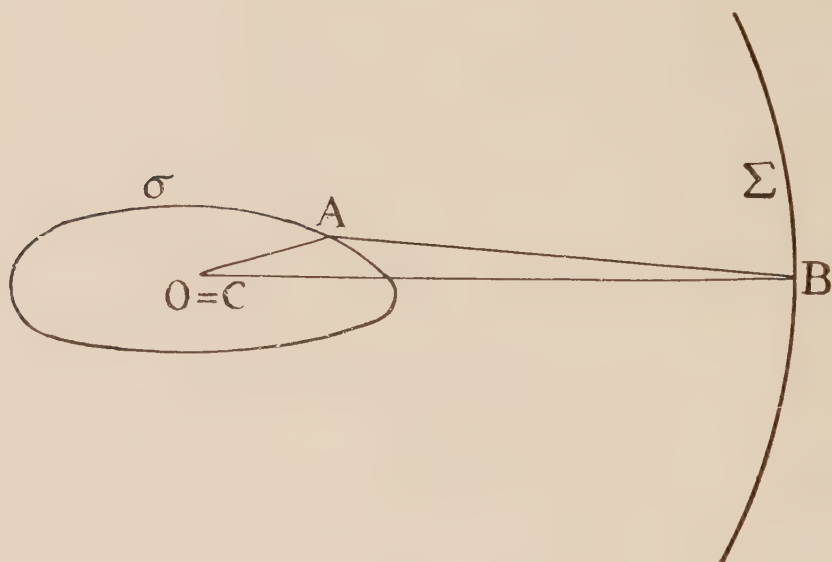


Fig. 2.

Se ora si sceglie il punto C in modo che

$$\int_{\sigma} \varphi'' n d\sigma + i\Gamma (C - A) = 0$$

ossia:

$$(7) \quad C - A = i \frac{1}{\Gamma} \int_{\sigma} \varphi'' n d\sigma$$

si avrà semplicemente:

$$(6 a) \quad \mathbf{F} = -\rho \frac{d}{dt} \int_{\sigma} \varphi' n d\sigma + i\rho \Gamma v_c.$$

Si noti che la posizione del punto C è indipendente dalla scelta iniziale del punto A. E invero se si prende come punto iniziale di riferimento un punto $A' \neq A$, $\int_{\sigma} \varphi'' n d\sigma$ si accresce di $i\Gamma (A' - A)$ e quindi:

$$C' - A' = C - A - (A' - A) = C - A'$$

da cui $C' = C$.

Il punto C è dunque un invariante del profilo ed è quello che nella teoria di v. Mises è chiamato *centro del profilo* (come sarebbe facile verificare supponendo il profilo ottenuto per trasformazione conforme del cerchio).

La (6 a) ci dice che quando non si ha variazione di circolazione, la parte « inerziale » della **F** dipendente unicamente dalla corrente euleriana, purchè si prenda come punto indicatore della velocità del profilo il centro del profilo.

In modo analogo si ha per il momento:

$$(8) \quad \mathbf{M} = -\rho \frac{d}{dt} \int_{\sigma} \varphi (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{n} d\sigma + \rho \Gamma (\mathbf{A} - \mathbf{O}) \wedge (i\mathbf{v}_A).$$

Se ora distinguiamo, come precedentemente, il potenziale della corrente euleriana φ' da quello della corrente circolatoria φ'' , potremo porre:

$$\int_{\sigma} \varphi' (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{n} d\sigma + \int_{\sigma} \varphi'' (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{n} d\sigma.$$

Ora nel secondo di questi integrali φ'' resta costante in ogni punto del contorno, comunque questo si muova; l'integrale rappresenta pertanto il momento rispetto ad O di una pressione φ'' distribuita al contorno, la cui risultante è $\int_{\sigma} \varphi'' \mathbf{n} d\sigma$. Questo momento varia nel tempo dt per lo spostarsi del profilo rispetto ad O, al quale la suddetta risultante è solidale. Ora il moto del profilo può decomporci in una rotazione intorno ad O ed in una traslazione del punto O stesso, considerato come solidale al profilo, (punto O'), traslazione che sarà $\mathbf{v}_O dt$. Se si osserva che per la rotazione il momento non cambia, si ha:

$$-\frac{d}{dt} \int_{\sigma} \varphi'' (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{n} d\sigma = -\sigma \mathbf{v}_O \wedge \int_{\sigma} \varphi'' \mathbf{n} d\sigma.$$

Se il punto O è centro C del profilo, definito dalla (7), si può scrivere:

$$(9) \quad -\rho \mathbf{v}_C \wedge \int_{\sigma} \varphi'' \mathbf{n} d\sigma = \rho \Gamma \mathbf{v}_C \wedge [i(\mathbf{C} - \mathbf{A})]$$

mentre l'ultimo termine della (8) diviene:

$$(10) \quad -\rho \Gamma (\mathbf{C} - \mathbf{A}) \wedge (i\mathbf{v}_A) = -\rho \Gamma \mathbf{v}_A \wedge [i(\mathbf{C} - \mathbf{A})].$$

La somma dei termini (9) e (10) risulta perciò:

$$\rho \Gamma (\mathbf{v}_C - \mathbf{v}_A) \wedge [i(\mathbf{C} - \mathbf{A})] = 0$$

e quindi:

$$(8a) \quad \mathbf{M}_C = -\rho \frac{d}{dt} \int_{\sigma} \varphi' (P - C) \wedge \mathbf{n} d\sigma$$

ossia: il momento delle pressioni rispetto al centro del profilo dipende solo dalla corrente euleriana e non dalla corrente circolatoria.

In altro modo: $M dt$ può essere considerato come la variazione nel tempo dt del momento rispetto ad O di una distribuzione di pressioni $\rho(\varphi' + \varphi'')$ su σ e $\rho\Gamma$ su σ_1 . La distribuzione $\rho\Gamma$, anzichè su σ_1 soltanto, ossia su AB , può immaginarsi effettuata, senza variazione nel risultato, su $AO' + O'B$ dove O' è il punto del profilo che nell'istante considerato coincide con O . Ora se il punto O' è il centro del profilo, ossia il punto C , segue dalla (7) che la risultante delle pressioni $\rho\varphi''$ su σ e di $\rho\Gamma$ su $AO' = AC$ è nulla e perciò il momento di tale distribuzione di pressioni non varia comunque il profilo si muova. D'altra parte anche la distribuzione di pressione $\rho\Gamma$ su CB non varia il suo momento rispetto ad O nel tempo dt se non per un infinitesimo di ordine superiore. Perciò la variazione del momento dipende unicamente dalla distribuzione $\rho\varphi'$, e da ciò segue la (8a).

Astronomia. — *Orbita definitiva della Cometa di Finlay.*
Nota I di M. CIMINO, presentata ⁽¹⁾ dal Socio G. ARMELLINI.

1. La Cometa periodica di FINLAY (1886, VII) facente parte della famiglia di Giove, fu scoperta nel 1886, e fu di nuovo osservata negli anni 1893, 1906, 1919 e 1926; mentre sui ritorni al perielio degli anni 1899, 1913 e 1933 manca ogni notizia. Ma, sia in relazione alla mancanza di osservazioni nel ritorno del 1913, sia per le fortissime perturbazioni che essa dovette certamente subire da parte di Giove nel 1910 per la sua estrema vicinanza a questo pianeta, la nostra attenzione è richiamata in modo particolare sulle due apparizioni consecutive del 1919 e del 1926.

Su tre osservazioni del 1919 novembre 13, 15 e 17 della Cometa 1919 d, scoperta da SASAKI ⁽²⁾ il 25 ottobre a Kyoto, furono calcolati da J. M. VINTER-HANSEN e J. BRAAE ⁽³⁾ gli elementi provvisori dell'orbita e riconosciuti assai simili a quelli della Cometa di FINLAY; frattanto, l'identità con quest'ultima veniva riconosciuta da G. FAYET ⁽⁴⁾. Altri elementi orbitali, pure provvisori su tre osservazioni del novembre 9, 12 e 15, furono calcolati con maggiore precisione da CRAWFORD, FAIRFIELD e CUMMINGS ⁽⁵⁾; infine, valendosi di 6

(1) Nella seduta del 19 giugno 1938.

(2) « Astr. Nach. », B. 210, p. 61.

(3) Ibidem, p. 79.

(4) « Cir. de l'Obs. de Marseille », 234.

(5) « The Observatory », vol. 43, p. 59.

osservazioni del novembre 13 (a Besançon); dicembre 19, 20 e 22 (a Washington e Yerkes); 1920 marzo 8 e 9 (a Bergedorf), S. HASUNUMA ⁽¹⁾ calcolava gli elementi orbitali che qui riportiamo e che risultano i migliori tra quelli calcolati su osservazioni dell'apparizione del 1919.

I.

$$\begin{aligned} T &= 1919 \text{ Oct. } 15.48261 \text{ Gr. M. T.} & \varphi &= 45^{\circ} 38' 14''.1 \\ \omega &= 318^{\circ} 8' 54''.2 & \mu &= 530''.0868 \\ \Omega &= 46^{\circ} 55' 39''.8 & \text{Ecl. } 1919.0 & P = 6.69373 \text{ anni} \\ i &= 3^{\circ} 23' 43''.8 & \Delta\lambda_2 \cos \beta_2 &= -1''.1 ; \Delta\beta_2 = -0''.1 \end{aligned}$$

che, per l'equatore dànno:

$$\begin{aligned} \omega &= 359^{\circ} 54' 17''.29 \\ \Omega' &= 5^{\circ} 41' 18''.28 \\ i' &= 25^{\circ} 52' 51''.75 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \omega \\ \Omega' \\ i' \end{aligned}} \right\} \text{Equ. } 1919.0.$$

Come *epoca di osculazione* si può assumere la data: 1920 gennaio 17.5 (T. M. Gr.).

Basandosi su questi elementi, S. KANDA ⁽²⁾ calcolava le seguenti perturbazioni da parte di Giove sulla Cometa, dal 1920 gennaio 17.5 (T.M.Gr.) al 1926 giugno 15.0 (T.U.):

II.

$$\begin{aligned} \Delta M &= -6^{\circ} 3'.6 & \Delta i &= +0^{\circ} 2'.2 \\ \Delta \omega &= +2^{\circ} 25'.1 & \Delta \varphi &= -0^{\circ} 41'.2 \\ \Delta \Omega &= -1^{\circ} 42'.8 & \Delta \mu &= -11''.68. \end{aligned}$$

Con queste perturbazioni e i suddetti elementi (I) si potè indicare per il passaggio al perielio nel 1926 la data: 1926 agosto 7.2 (T. U.); e in realtà le osservazioni sull'apparizione del 1926 dànno come epoca del detto passaggio la data del 7.8 agosto, con un ritardo di circa 0^d.6 sulla data prevista ⁽³⁾.

È invece nella rivoluzione dal 1926 al 1933 che sorgono serie divergenze di opinione tra i calcolatori delle perturbazioni subite dalla Cometa. S. KANDA trova infatti, calcolando le perturbazioni fino al 1933, la data di luglio 12 per il passaggio della Cometa al perielio, mentre P. J. HARRIS e

(1) « Astr. Nach. », B. 228, p. 87.

(2) Ibidem, pp. 87-88.

(3) « Beob.-Zirk. der Astr. Nach. », 1926 aug. 4, Nr. 27 (J. STOBBE).

M. SUMMER⁽¹⁾ danno la data del giugno 1938. Per questa divergenza tra le date indicate, A. C. D. CROMMELIN⁽²⁾ riprese in esame le due rivoluzioni 1919-1926 e 1926-1933, partendo dall'orbita (I) con una modifica di $-0''.17$ al solo moto medio e assumendo come epoca del passaggio al perielio nel 1926 la data di agosto 7.9. Con queste modifiche il calcolo delle perturbazioni fino al 1933 diede per il passaggio della Cometa al perielio la data di giugno 15.32. La differenza col risultato di HARRIS e SUMMER dipende dalle modifiche portate all'orbita di partenza; mentre sussiste intera la divergenza col risultato trovato da KANDA. Una data per il passaggio al perielio prossima alla metà del giugno 1933 sembrò pertanto più plausibile di una prossima alla metà di luglio; ma, come si disse, la Cometa non fu veduta affatto⁽³⁾.

2. Per queste notevoli divergenze, un nuovo ed indipendente calcolo delle due rivoluzioni, cioè dal 1919 al 1933, si imponeva senz'altro; lo scopo essendo non solo quello di portare un contributo alla discussione sulla purtroppo non controllabile epoca del passaggio della Cometa al perielio nel 1933, ma anche, e principalmente quello di ottenere una serie di elementi orbitali atti a fornire, — spingendo il calcolo delle perturbazioni fino al 1940, — una previsione sul prossimo ritorno dell'astro. Ma, specialmente in vista di quest'ultimo scopo, sorgeva legittimo il dubbio che gli elementi orbitali (I) non fossero sufficientemente esatti, dovendo tali elementi servire per il calcolo delle perturbazioni durante un periodo di ben venti anni. Abbiamo così pensato di servirci delle osservazioni sulle due apparizioni consecutive del 1919 e del 1926 — specialmente numerose quelle del 1919 — per calcolare un'orbita *definitiva* della Cometa; un'orbita cioè che, rappresentando bene le due apparizioni, potesse poi essere assunta con

(1) « B. A. A. Handbook », 1933, p. 24.

(2) « B. A. A. Journal », vol. 43, p. 156. Ivi si trovano i citati risultati, che, per brevità non riportiamo.

(3) Il presente lavoro mi è stato proposto dal prof. G. ARMELLINI, direttore del R. Osservatorio di Roma, il quale mi è stato largo di consigli, permettendomi inoltre di consultare liberamente la Biblioteca dell'Osservatorio. Mi è grato ora rinnovargli i miei più vivi ringraziamenti.

I calcoli sono stati eseguiti dallo scrivente nella Sede dell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo, sezione del Consiglio Nazionale delle Ricerche, che è perfettamente attrezzato, per personale specializzato e per ricchezza di mezzi a disposizione, per affrontare ogni genere di ricerca interessante le Matematiche applicate. Al direttore, prof. M. PICONE, porgo i miei più vivi ringraziamenti per l'ospitalità accordatami.

Tengo inoltre a ringraziare il direttore della *Specola Vaticana*, il Rev. P. STEIN, S. I., per avermi permesso di consultare i periodici della Biblioteca della Specola, ed il dott. A. C. D. CROMMELIN, D. Sc. F. R. A. S., in Londra, per le molte preziose notizie direttamente comunicatemi.

tranquillità per il calcolo delle perturbazioni durante un intervallo di tempo relativamente lungo.

Il nostro compito doveva perciò essere diviso in due parti: nella prima avremmo dovuto calcolare l'orbita definitiva della Cometa, basandoci sulla (I) come orbita provvisoria, sulle osservazioni del 1919 e 1926 e tenendo conto delle perturbazioni (II); nella seconda avremmo dovuto dare le perturbazioni esatte subite dalla Cometa fino al 1940, e quindi gli elementi osculatori per quest'epoca del nuovo ritorno al perielio. Senonchè, avendo assunto come orbita provvisoria la (I) e avendo condotto con tutte le dovute cure il confronto delle posizioni calcolate sull'orbita (I) con quelle date dagli osservatori, il divario tra queste e le prime risultò abbastanza notevole, se pur non eccessivo, giungendo in valore assoluto fino a 20^s circa per le ascensioni rette e a $2' 30''$ per le declinazioni. Tale divario cresceva da una parte e dall'altra man mano che ci si allontanava dall'epoca del gruppo centrale di osservazioni con le quali l'orbita provvisoria fu calcolata; ed, escluse alcune osservazioni evidentemente errate o dubbie, le rimanenti presentavano una dispersione reciproca molto piccola. Per le osservazioni del 1926 opportuni confronti mostravano che le cose andavano peggio, pur avendo, beninteso, tenuto conto delle perturbazioni date dal KANDA. Tutto ciò provava come l'orbita (I) poco si prestasse, a tutto rigore, al computo di un'orbita definitiva; e d'altra parte le stesse perturbazioni (II), calcolate del resto per il solo Giove, non potevano neppure esse assumersi come definitive per un'orbita definitiva. Era dunque necessario procedere ad un *preventivo* miglioramento dell'orbita provvisoria, oltre che ad una determinazione precisa delle perturbazioni.

Di questo preventivo miglioramento dell'orbita (I) — condotto del resto su *tutte* le osservazioni del 1919 — è oggetto la presente Nota; ma ad esso faremo precedere pure una breve critica delle osservazioni del 1919. In una prossima Nota, che sarà la continuazione della presente, daremo le perturbazioni esatte dal 1919 al 1926 calcolate sull'orbita migliorata, l'orbita definitiva della Cometa, ed infine le perturbazioni esatte dal 1926 al 1940 calcolate sull'orbita definitiva.

3. *Osservazioni del 1919.* — Sull'apparizione del 1919 si posseggono in tutto 108 osservazioni, oltre 3 che appartengono ai primi mesi del 1920. Ne diamo un elenco riassuntivo nella seguente tabella:

TABELLA I.

	Osservatorio di	Osservatore	N.	Autorità
I	Santiago del Chile	Rosauro E. Castro	7	« Astr. Nach. »; B. 210 ; p. 405.
II	Babelsberg	F. Pavel, E. Bemevitz	5	» » ; B. 211 ; p. 203.
III	Königstuhl	Max Mündler	3	» » ; » » ; p. 217.
IV	Sonneberg	C. Hoffmeister	3	» » ; B. 212 ; p. 181.
V	Vienna	H. Krumpholz	3	» » ; B. 218 ; p. 31.
VI	Minnesota	F. P. Leavenworth	2	« The Astr. Journ. »; vol. XXXII ; p. 166.
VII	Goodsell	H. C. Wilson	9	» » » ; » » ; p. 175.
VIII	Washington	E. C. Bower	7	» » » ; » » ; p. 192.
IX	Cincinnati	Everett I. Yowell	2	» » » ; vol. XXXIII ; p. 31.
X	Besançon	M. P. Chofardet	5	» » » ; » » ; p. 34.
XI	La Plata	N. Tabia, B. H. Dawson	9	» » » ; » » ; p. 46.
XII	Yerkes	G. van Biesbroeck	12	» » » ; » » ; p. 100.
XIII	Yerkes	E. E. Barnard	5	» » » ; vol. XLI ; p. 162.
XIV	Marsiglia	Michkovitch	10	« Jour. des observateurs »; vol. III; n. 4; p. 44.
XV	Parigi	M. M. Giacobini	8	» » » ; » » ; » ; p. 98.
XVI	Nizza	M. A. Schaumasse	12	» » » ; vol. IV; » ; p. 36.
XVII	Barcellona	I. Pólit	4	« Fabra Bulletin »; n. 4.
XVIII	Bergedorf	W. Baade	3	« Beob.-Zirk. der Astr. Nach. »; 1920 aprile.
XIX	Bergedorf	Schorr, Baade	2	» » » » ; 1919, n. 19, p. 32.

Nota. — Altre osservazioni, contenute in « Beob.-Zirk. der Astr. Nach. », 1 Jahrgang, 1919, sono state poi incluse dagli osservatori nei gruppi della presente tabella; perciò non le abbiamo indicate.

Tralasciando le tre osservazioni del gruppo (XVIII) che cadono nel 1920, febbraio 20; 1920, marzo 8 e 9, e che per il loro esiguo numero non si prestano per una rappresentazione di un luogo normale, il reciproco confronto delle rimanenti osservazioni mostra una piccola dispersione reciproca, che non raggiunge che raramente 1^s per le ascensioni rette e 10'' per le declinazioni. Si debbono però escludere 18 osservazioni delle quali 12 appaiono erronee nell'una o nell'altra coordinata, mentre le altre 6 sono dubbie, secondo quanto è indicato nella seguente tabella:

TABELLA II.

Erronee in ambo le coordinate	8 ^a di VII ; 4 ^a di XVII.
» in ascensione retta	3 ^a di II ; 3 ^a di VII ; 12 ^a di XII.
» in declinazione	2 ^a di IX ; 4 ^a e 6 ^a di XIV ; 1 ^a di XVII.
Errore sistematico in ascens. retta	1 ^a e 2 ^a di IX (+ 5 ^s .8 circa).
» » » declinazione	1 ^a e 2 ^a di IV (— 20'' circa).
Dubbie in ascensione retta	2 ^a e 3 ^a di IV ; 5 ^a di XII.
» in declinazione	1 ^a di I ; 1 ^a e 2 ^a di VI ; 1 ^a di IX ; 12 ^a di XII.
Scarsa approssimazione	2 ^a di II.

Di tutte queste osservazioni si è creduto opportuno non tenere alcun conto nei nostri calcoli; rimangono pertanto 90 osservazioni abbastanza ben controllate.

Queste 90 osservazioni rimaste dopo lo scarto, risultano distribuite in due periodi: dal novembre 9 al novembre 30, e dal dicembre 9 al dicembre 27 rispettivamente. La maggior parte delle osservazioni — 69 su 90 — cade però nel novembre. L'andamento degli scarti, — posizioni osservate *meno* posizioni calcolate sull'orbita (I), — mostra come, sia nel primo che nel secondo dei due suddetti periodi, tali scarti abbiano un andamento quasi lineare; il massimo scarto è per il novembre 9 circa, con + 19^s.5 in α e + 2'30'' in δ ; il minimo per il dicembre 27 circa, con — 3^s in α e — 25'' in δ , in cifre tonde.

Per la suddetta linearità nell'andamento degli scarti è stato quindi possibile calcolare, — in vista del miglioramento dell'orbita (I), — quattro *luoghi normali*, due in novembre e due in dicembre, ciascuno comprendente le osservazioni di 10 giorni circa, come mostra la seguente tabella:

TABELLA III.

Luogo normale	Peso	Data (T.M.Gr.) 1919	α 1919.0	δ 1919.0	Osservazioni
A	33	Nov. 15.02778	23 ^h 16 ^m 40 ^s .01	— 6° 21' 7''.1	Dal nov. 9.0 al nov. 20.5
B	36	Nov. 25.44720	0 33 46.79	+ 5 6 47.5	» nov. 20.5 » 30.0
C	15	Dic. 11.65207	1 55 33.12	+ 15 41 56.8	» dic. 9.0 al dic. 16.0
D	6	Dic. 21.95892	2 ^h 31 ^m 9 ^s .86	+ 19° 14' 19''.2	» dic. 16.0 » 27.0

Non essendovi elementi sufficienti per poter attribuire alle *single* osservazioni pesi differenti, furono tutte assunte con lo stesso peso; il peso di ogni luogo normale è dunque dato dal numero delle osservazioni che vi concorrono. Ed ecco infine la rappresentazione di tali luoghi normali sull'orbita (I):

TABELLA IV.

	A	B	C	D
$\cos \delta. \Delta \alpha$	+ 14 ^s .806	+ 6 ^s .974	+ 0 ^s .073	— 1 ^s .637
$\Delta \delta$	+ 129 ^{''} .47	+ 64 ^{''} .77	+ 2 ^{''} .59	— 10 ^{''} .38

4. *Miglioramento dell'orbita (I)*. Il miglioramento dell'orbita (I) è stato condotto con il classico metodo della variazione degli elementi ellittici, metodo di facile applicazione quando si possa disporre di una macchina calcolatrice. I luoghi normali scelti furono quelli della Tabella 4. Dato il breve intervallo di tempo — inferiore a due mesi — nel quale sono distribuite le osservazioni, e data pure la grande distanza della Cometa dai pianeti maggiori, non si è tenuto alcun conto delle perturbazioni da parte di questi ultimi. Ed ecco le correzioni, da aggiungere agli elementi provvisori *equatoriali* (I):

III.

$$\begin{aligned} d \omega' &= + 35''.57 & d \varphi &= + 5''.12 \\ d \Omega' &= - 16''.38 & d \mu &= - 0''.3035 \\ d i' &= + 1''.32 & d T &= - 0^d.00996. \end{aligned}$$

Gli elementi orbitali migliorati, equatoriali ed eclitticali, sono quindi:

IV.

$$\begin{aligned} T &= 1919 \text{ ottobre } 15.47265 \\ \varphi &= 45^\circ 38' 19''.22 \\ \mu &= 529''.7833 \\ \left. \begin{aligned} \omega' &= 359^\circ 54' 52''.86 \\ \Omega' &= 5^\circ 41' 1''.90 \\ i' &= 25^\circ 52' 53''.07 \end{aligned} \right\} \text{Equ. } 1919.0 & \left. \begin{aligned} \omega &= 318^\circ 10' 59''.96 \\ \Omega &= 46^\circ 53' 54''.65 \\ i &= 3^\circ 23' 40''.05 \end{aligned} \right\} \text{Ecl. } 1919.0. \end{aligned}$$

Come *epoca di osculazione* possiamo assumere la data: 1919. nov. 30.5 (T. M. Gr.).

Con tali elementi si è ottenuta infine la seguente rappresentazione dei luoghi normali :

TABELLA V.

	A	B	C	D
$\cos \delta. \Delta \alpha$	+ 0 ^s .14	+ 0 ^s .03	— 0 ^s .12	— 0 ^s .06
$\Delta \delta$	— 2 ^{''} .9	— 0 ^{''} .5	— 0 ^{''} .7	— 1 ^{''} .1

Fisica. — *Sulla teoria quantica e l'origine di alcuni sciame di raggi cosmici.* Nota di G. WATAGHIN, presentata ⁽¹⁾ dal Socio G. FUBINI.

Nel presente lavoro è esposto un tentativo di risolvere le ben note difficoltà della teoria quantica collegate col problema dell'energia propria basato su alcune idee già studiate nelle Note precedenti e su altre nuove. A tale scopo costruiamo una nuova « algebra degli stati quantici e degli osservabili », che rende convergenti i calcoli relativi alle energie proprie e conserva la validità dei risultati corretti della odierna formulazione della teoria quantica.

Notando che ogni sistema di riferimento è realizzato da una parte degli apparecchi di misura ⁽²⁾ e che perciò i coefficienti delle trasformazioni di Lorentz sono da considerarsi come degli « osservabili » siamo indotti ad ammettere che si deve sostituire il gruppo delle trasformazioni relativistiche delle coordinate x e degli impulsi p (pensati come numeri c) con un gruppo di trasformazioni unitarie tra corrispondenti operatori quantici. Queste trasformazioni fra gli osservabili x e p danno al limite $\hbar = 0$ le usuali trasformazioni relativistiche e lasciano invarianti i risultati della nuova algebra degli stati quantici (in particolare l'esistenza di un limite inferiore $r_0 = \frac{\hbar}{b}$ di intervalli misurabili e della indeterminazione supplementare negli urti con grandi energie relative).

L'osservazione dei raggi cosmici rende plausibile l'ipotesi che negli urti dei corpuscoli con energia relativa ai nostri apparecchi superiore a un valore

(1) Nella seduta del 19 giugno 1938.

(2) G. WATAGHIN, *Nature*, July 1938; « Compt.-Rend. », giugno 1938. In queste Note si esamina l'esistenza di nuove limitazioni delle nostre possibilità di definire e misurare alcune grandezze fisiche connesse colle proprietà delle « forze β ».

critico si manifestano fenomeni nuovi, come ad esempio gli sciami a stella (Explosionsshowers) studiati da Blackett e Heisenberg, o l'apparizione dell'elettrone pesante. Pare caratteristica per tali urti la partecipazione dei neutrini e la preponderanza delle forze β (interazione di Fermi). Abbiamo notato recentemente che il controllo delle leggi di conservazione, sul quale si basa ogni misura dell'impulso, risulta difficile nel caso di tali urti ultra-energetici principalmente a causa della partecipazione dei neutrini.

Le considerazioni seguenti sono basate sull'assunzione che le nostre possibilità di definire e misurare alcune grandezze fisiche sono effettivamente limitate in un nuovo modo e che sussiste una nuova indeterminazione nello spazio dei momenti, nella regione degli impulsi relativi superiori ad un valore critico b .

Per precisare le ipotesi sulle quali si basa la nuova algebra degli stati, consideriamo onde elettroniche stazionarie in un Hohlraum di volume V . Il numero delle autofunzioni dell'impulso appartenenti all'intervallo $(p, p + dp)$ è $d\chi = \frac{8\pi}{c^3} V p^2 dp$ e diverge per $p \rightarrow \infty$. Ammetteremo che, a causa della limitazione delle nostre possibilità di misura dei moduli delle differenze dei 4-vettori impulso, un osservatore Lorentziano non è in grado di distinguere fra loro gli « auto-stati » dell'operatore $-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ appartenenti a certi gruppi di $n(p) = G(p)^{-1}$ stati contigui (ove $G(p)$ è un fattore di convergenza).

Perciò risulta necessario modificare la rappresentazione dello stato quantico, inteso come insieme di dati sperimentali riferentesi al sistema atomico in istudio. Per esempio nel caso di onde piane ammettiamo che il massimo grado di conoscenza dell'energia e dell'impulso che corrisponde ad uno stato quantico dell'impulso possa essere rappresentato da convenienti combinazioni lineari ψ delle autofunzioni $\varphi(p, x)$ che rappresentano le onde piane nella teoria usuale:

$$(1) \quad \psi(p', x) = \int_k G'(p, k) \varphi(k, x) dk$$

ove $G'(p', k)$ è scelto in modo da rispecchiare la impossibilità sperimentale di distinguere gruppi di $n(p')$ stati, ad esempio:

$$(2) \quad G'(p', k) = A e^{-\frac{(p' - k)^2 - (p' - Ek)^2 \cdot \frac{1}{c^2}}{ab \Delta p}}$$

A, a sono delle costanti, b è l'impulso critico, e l'intervallo d'impulso Δp soddisfa la relazione:

$$(3) \quad \frac{8\pi}{c^3} V G(p') p^2 \Delta p = n(p) \quad p = |p'|$$

essendo ora il numero $d\zeta'$ degli stati quantici ψ compresi nell'intervallo $(p, p + dp)$ uguale a

$$(4) \quad d\zeta' = \frac{8\pi}{c^3} V G(p) p^2 dp.$$

Come si vede dalla (1), ψ è formata da una combinazione lineare di tutte le autofunzioni $\varphi(k, x)$, ma la principale contribuzione al « pacchetto di onde » ψ è data dal gruppo di $n(p')$ stati appartenenti all'intervallo Δp . Δp e $n(p)$ tendono all'infinito per $p' \rightarrow \infty$. La definizione (3) di Δp si riferisce ovviamente ad un particolare sistema di riferimento, al quale si riferisce anche $\psi(p', x)$.

Facendo uso della correlazione tra stati quantici e celle di volume h^3 dello spazio delle fasi, possiamo dire che, a causa della nuova indeterminazione nello spazio dei momenti, all'osservatore Lorentziano appaiono indistinguibili certi gruppi di $n(p)$ celle contigue di modo che queste $n(p)$ celle formano una unica cella quantica della nuova teoria. Il determinante dell'esponente della (2) può essere scritto nella forma invariante introducendo un 4-vettore $p_0 E_0$ che nel sistema Lorentziano prescelto ha come componenti $p_0 = 0$, $E_0 = mc^2$. Infatti $|p|$ è funzione di E e

$$E = \frac{1}{2mc} \left| \left(p - p_0 \right)^2 - \left(\frac{E - E_0}{c} \right)^2 \right| - mc^2.$$

Per $p' < b$ le ψ nuove sono sensibilmente ortogonali, e per esse continuano a valere i risultati soliti della odierna teoria quantica. Per $p' > b$ gli stati nuovi non sono più ortogonali. Coll'uso di questi stati si possono definire matrici finite P formate con elementi $P_{mn} = (\psi_m, p\psi_n)$ ove m, n

variano da 1 fino a $N = \frac{8\pi}{c^3} V \int_0^\infty G(p) p^2 dp$.

Per gli osservabili rappresentati da P valgono nuove regole di commutazione. La rappresentazione $(p' | P | p'')$ differisce dalla usuale $p' \delta(p' - p'')$ ecc. Analoghe ed ovvie modificazioni valgono per l'operatore Hamiltoniano e per le equazioni di movimento. Una particolare importanza acquista l'operatore invariante

$$(x' t' | D | x'' t'') = \sum_n \psi_n^*(x' t') \psi_n(x'' t'')$$

che sostituisce la $\frac{1}{r} [\delta(r + ct) - \delta(r - ct)]$ di Jordan Pauli e l'analoga funzione introdotta dall'autore per le onde elettroniche.

I risultati relativi alle energie proprie e agli urti con grandi energie (formole de Klein e Nishina, Moller ecc.) vengono tutti modificati nel senso già indicato nelle Note sui fattori di convergenza. Tuttavia alcuni dei risultati della attuale teoria quantica relativi ad urti ultraenergetici conservano una validità approssimata per energie relative grandi quanto si vuole quando si tratta di urti con angolo di diffusione sufficientemente piccolo.

Notiamo infine una importante conseguenza della non ortogonalità degli stati quantici: la possibilità di una spiegazione dei processi di emissione di molte particelle, del tipo del fenomeno degli sciami ad esplosione (studiato da Blackett e da Heisenberg). Ricordiamo che nella elettrodinamica quantica odierna la probabilità dei processi di emissione di molte particelle risulta estremamente piccola perchè essi appaiono come processi di ordine elevato nella teoria delle perturbazioni. Ma le regole di selezione dalle quali si deduce che nel primo ordine solo un fotone può essere emesso, derivano dall'ortogonalità e dalle proprietà peculiari delle autofunzioni dell'oscillatore armonico. Nella teoria qui proposta, per stati corrispondenti ad un impulso medio $p' > b$, queste regole non valgono più. Ne consegue che la probabilità per l'emissione di molti fotoni [nel calcolo del primo ordine della teoria delle perturbazioni] risulta dello stesso ordine della probabilità di emissione di un fotone. Un risultato analogo si ottiene per l'emissione di molti elettroni (sciami a stella o « explosions-showers »).

Fisiologia (Chimica biologica). — *Ricerche sperimentali sul liquido seminale*. — V. *Pressione osmotica, conduttività elettrica, e concentrazione in ioni H^+ del liquido seminale umano* ⁽¹⁾. Nota di V. ZAGAMI, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Continuando le ricerche sul liquido seminale, di cui in precedenti Note ⁽³⁾ abbiamo riferito i valori del pH, una nuova serie di indagini è stata da noi diretta ad accertare la pressione osmotica, la conduttività elettrica, e la concentrazione in ioni H^+ del liquido seminale umano.

Per quanto infatti è a nostra conoscenza, mancano del tutto nella letteratura ricerche in tal senso.

Il liquido seminale, proveniente da quattro soggetti normali, in perfette condizioni dal punto di vista delle funzioni sessuali, e dell'età di 24-36 anni, è stato raccolto, nell'accoppiamento normale, con la tecnica già precedentemente descritta.

Le determinazioni sono state eseguite da una a sedici ore dopo la raccolta del liquido, come per ogni esperienza è specificato nella seguente tabella.

La pressione osmotica è stata determinata col metodo crioscopico per mezzo del noto apparecchio di Beckmann, in cui il tubo crioscopico e il bulbo del termometro erano di dimensioni ridotte, da permettere agevolmente la determinazione su di 1 cmc. di liquido.

La conduttività elettrica è stata determinata mediante il ponte di Wheatstone secondo il metodo di Kohlrausch, servendosi di un vaso di resistenza di piccole dimensioni, di cui si controllava frequentemente la capacità di resistenza con soluzione 0,1 N di KCl.

Le determinazioni sono state fatte sempre tenendo il vaso di resistenza in un bagno di acqua a temperatura costante di 20° C.

La determinazione del pH è stata fatta pure sempre a 20° C. col metodo elettrometrico, servendosi al solito della siringa-elettrodo a chinidrone di Mislowitzer.

Nella seguente tabella sono presentati i risultati ottenuti.

Bisogna anzitutto dire, che i valori, specie quelli relativi alla concentrazione osmotica totale, sono alquanto differenti a seconda del tempo tra-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica biologica della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 3 giugno 1938.

(3) V. ZAGAMI, *Ricerche sperimentali sul liquido seminale*. — I. *Sul valore del pH del liquido seminale umano normale*. «Rendiconti R. Accademia Nazionale Lincei», XXV, 268, 1937; II. *Sul valore del pH del liquido seminale di gallo*. «Ibidem», XXVI, 123, 1937; III. *Sulle variazioni del pH del liquido seminale umano in dipendenza della temperatura e della diluizione*. «Ibidem», in corso di pubblicazione; IV. *Sul valore del pH del liquido seminale di cane*. «Ibidem», in corso di pubblicazione.

scorso fra la raccolta del liquido seminale e l'esame di esso, e perciò meritano di essere presentati tenendo esatto conto di questo fattore.

Considerando soltanto i campioni di liquido seminale esaminati entro la prima ora dalla raccolta si hanno i seguenti valori:

Numero progress. delle esperienze	Riposo sessuale (approssi- mativo) ore	Quantità di liquido seminale cmc.	Periodo di tempo trascorso fra la raccolta e la determina- zione ore	Abbassa- mento del punto di congelazione Δ C.	Conduttività elettrica specifica (a 20° C.) in mhos K. 10—4	pH (a 20° C.)
<i>Soggetto n. 1</i>						
1	48	3.2	1	0° 57	91.67	7.50
2	48	3.0	1	0° 56	88.04	7.40
3	36	2.8	1	0° 56	94.47	7.44
4	36	2.2	1	0° 56	93.87	7.48
5	60	2.7	1	0° 56	93.46	7.40
6	30	2.5	1	0° 58	90.20	7.43
7	60	3.2	2	0° 61	96.48	7.51
8	30	3.0	2	0° 60	98.08	7.46
9	16	2.5	3	0° 62	97.42	7.34
10	48	3.2	4	0° 67	100.10	7.34
11	8	2.0	5	0° 67	104.50	7.41
12	48	2.8	12	0° 66	93.81	7.46
13	48	2.5	12	0° 60	98.72	7.36
14	48	3.0	12	0° 64	95.41	7.27
15	96	4.0	16	0° 62	100.30	7.29
16	48	3.9	16	0° 66	106.40	7.40
<i>Soggetto n. 2</i>						
17	24	4.8	1	0° 56	106.47	7.35
18	24	5.0	1	0° 56	107.50	7.37
<i>Soggetto n. 3</i>						
19	96	3.4	16	0° 78	101.50	7.57
20	48	3.9	16	0° 76	107.90	7.47
21	72	3.6	16	0° 74	101.30	7.35
<i>Soggetto n. 4</i>						
22	96	4.1	16	0° 76	95.03	7.23
23	80	3.6	16	0° 74	97.80	7.27

l'abbassamento del punto di congelamento è stato di $\Delta = 0.56 - 0.58$ C. nel liquido seminale proveniente dal soggetto n. 1, e di $\Delta = 0.56$ in quello proveniente dal soggetto n. 2;

la conduttività elettrica specifica, espressa in inhos, alla temperatura di 20° C., è stata di $K = 88.04 \times 10^{-4} - 94.47 \times 10^{-4}$ nel liquido del soggetto n. 1, e di $K = 106.47 \times 10^{-4} - 107.50 \times 10^{-4}$ nel liquido del soggetto n. 2;

il pH, infine, sempre alla temperatura di 20° C., è stato di $7.40 - 7.50$ nel liquido del soggetto n. 1, e di $7.35 - 7.37$ nel liquido del soggetto n. 2.

Rispetto ai suddetti valori osservati, come abbiamo detto, nei campioni di liquido seminale esaminati nella prima ora dalla raccolta, quelli osservati nei campioni, pur provenienti da uno stesso soggetto (soggetto n. 1), ma esaminati dopo varie ore (2-16 ore) dalla raccolta, si presentano sensibilmente differenti: decisamente più elevata si mostra la concentrazione osmotica totale, potendosi osservare un valore di $\Delta = 0.60 - 0.62$ nei campioni esaminati dopo 2-3 ore, e di $\Delta = 0.67$ nei campioni esaminati dopo 4-5 ore; anche la conduttività elettrica si presenta in tal caso sensibilmente più elevata, mentre il valore del pH, come già abbiamo notato anche nelle precedenti Note, tende ad abbassarsi.

Nel liquido del soggetto n. 3, esaminato dopo 16 ore dalla raccolta, si sono riscontrati i seguenti valori:

$$\Delta = 0.74 - 0.78 \quad ; \quad K = 101.30 \times 10^{-4} - 107.90 \times 10^{-4} \quad ; \\ \text{pH} = 7.35 - 7.57 \quad ;$$

e nel liquido del soggetto n. 4, parimenti esaminato dopo 16 ore dalla raccolta, i seguenti:

$$\Delta = 0.74 - 0.76 \quad ; \quad K = 95.03 \times 10^{-4} - 97.80 \times 10^{-4} \quad ; \\ \text{pH} = 7.23 - 7.27$$

Le differenze connesse con il periodo di tempo trascorso tra la raccolta del liquido seminale e l'esame di esso debbono senza dubbio ascriversi a modificazioni di natura chimica e chimico-fisica, avvenute in seno al liquido e connesse presumibilmente con l'attività degli spermatozoi e con azioni enzimatiche, che restano da chiarire.

Certo i valori che consideriamo come i più prossimi ai normali sono quelli accertati sul liquido esaminato nella prima ora dalla raccolta, i quali peraltro mostrano che lievi differenze possono anche esistere tra i campioni di liquido provenienti da soggetti diversi.

Ma meritano considerazione anche i valori accertati sul liquido esaminato dopo varie ore dalla raccolta, appunto perchè avvalorano il nostro concetto, che cioè le determinazioni delle varie costanti chimico-fisiche del

liquido seminale debbono essere eseguite il più presto possibile dopo la raccolta del liquido stesso, per ottenere effettivi valori normali, e perchè suggeriscono problemi varî, che meritano di essere svolti.

Le presenti ricerche continuano ad essere da noi estese e sviluppate in vario senso. Intanto, concludendo, rimane in base ad esse fissato, che:

1° il liquido seminale umano per l'accertamento delle sue varie costanti chimico-fisiche, oltre ad essere raccolto e conservato al riparo assoluto dall'aria, deve essere esaminato il più presto possibile dopo la raccolta a fine di ottenere valori più prossimi ai normali;

2° il liquido seminale umano, esaminato nella prima ora dopo la raccolta, presenta un abbassamento del punto di congelamento fra $0^{\circ}.56$ e $0^{\circ}.58$ C., una conduttività elettrica specifica (a 20° C.) fra 88.04×10^{-4} e 107.50×10^{-4} mhos, e un pH (sempre a 20° C.) fra 7.35 e 7.50;

3° il liquido seminale umano, esaminato dopo varie ore (2-16 ore) dalla raccolta, presenta una concentrazione osmotica totale, una conduttività elettrica, e una concentrazione in ioni H^{+} sensibilmente più elevata di quella che di norma si ha nel liquido esaminato nella prima ora dalla raccolta.

Fisiologia (Chimica biologica). — *Ricerche sperimentali sul liquido seminale*. — VI. *Pressione osmotica, conduttività elettrica, e concentrazione in ioni H^{+} del liquido seminale di cane*⁽¹⁾.
Nota di V. ZAGAMI, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Riferiamo nella presente Nota, a seguito delle precedenti, una serie di indagini diretta ad accertare la pressione osmotica, la conduttività elettrica, e la concentrazione in ioni H^{+} del liquido seminale di cane.

Le ricerche sono state eseguite sul liquido seminale, raccolto, col metodo della vagina artificiale secondo la tecnica già precedentemente descritta⁽³⁾, da tre cani in ottime condizioni generali e di nutrizione, e in periodo di sicura efficienza sessuale.

Le determinazioni della concentrazione osmotica totale, della conduttività elettrica specifica, e del pH sono state eseguite il più presto possibile dopo la raccolta, con la stessa tecnica e con gli stessi metodi adoperati per il liquido seminale umano, e già esposti nella precedente Nota⁽⁴⁾.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica biologica della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 19 giugno 1938.

(3) V. ZAGAMI, *Ricerche sul liquido seminale*. — IV. *Sul valore del pH del liquido seminale di cane*. «Rendiconti R. Accademia Nazionale Lincei», in corso di pubblicazione.

(4) V. ZAGAMI, *Ricerche sperimentali sul liquido seminale*. — V. *Pressione osmotica, conduttività elettrica, e concentrazione in ioni H^{+} del liquido seminale umano*. «Ibidem», in corso di pubblicazione.

Nell'annessa tabella sono presentati i risultati ottenuti, che possono essere così riassunti:

l'abbassamento del punto di congelamento (Δ) è stato, in media, di $0^{\circ}.605$ C., nel liquido seminale del cane n. 1, di $0^{\circ}.595$ in quello del cane n. 2, e di $0^{\circ}.583$ in quello del cane n. 3;

la conduttività elettrica specifica, espressa in mhos, è stata, in media, a 20° C., di 138.0×10^{-4} nel liquido del cane n. 1, di 129.1×10^{-4} in quello del cane n. 2, e di 134.4×10^{-4} in quello del cane n. 3;

il pH, infine, è stato, pure a 20° C., in media, di 6.76 nel liquido del cane n. 1, di 6.67 in quello del cane n. 2, e di 6.70 in quello del cane n. 3.

Come già abbiamo fatto a proposito del liquido seminale umano, anche per quello di cane ci limitiamo per ora a presentare semplicemente i valori numerici, senza alcuna discussione ed interpretazione, poichè ciò potrà essere fatto indubbiamente con maggiore precisione e con più ampiezza allorquando il nostro programma di lavoro sarà maggiormente svolto, e i risultati di nuove indagini saranno venuti ad aggiungersi a quelli finora presentati.

Molte sono infatti ancora le ricerche, che in varia direzione bisogna condurre, per potere avere una sufficiente conoscenza delle proprietà chimiche e chimico-fisiche di questo importantissimo liquido dell'organismo, alle quali ovviamente è legata la motilità e la vitalità degli spermatozoi. Solo da una esatta conoscenza di tali proprietà potranno derivare nozioni fondamentali di indiscutibile interesse scientifico, nonchè pratico, specie nel campo della fecondazione artificiale.

Concludendo, rimane fissato per intanto, che il liquido seminale di cane, raccolto col metodo della vagina artificiale, ed esaminato il più presto possibile dopo la raccolta, presenta, in media, un abbassamento del punto di congelamento (Δ) di $0^{\circ}.583 - 0^{\circ}.605$ C., una conduttività elettrica specifica, a 20° C., di $129.1 \times 10^{-4} - 138.0 \times 10^{-4}$ mhos, e un pH, pure a 20° C., di 6.67 — 6.76.

TABELLA.

Numero progres- sivo delle espe- rienze	Riposo sessuale	Durata del coito fittizio min.	Quantità di liquido seminale eliminato cmc.	Abbassa- mento del punto di congelamento Δ C°.	Conduttività elettrica spe- cifica (a 2° C.) in mhos	pH (a 20° C.)
---	--------------------	---	---	---	--	------------------

Soggetto n. 1.

1	2 giorni	12'	5.9	0° 59	141.9 × 10 ⁻⁴	6.75
2	2 »	10'	7.0	0° 62	140.9 »	6.86
3	2 »	10'	7.1	0° 64	140.6 »	6.88
4	1 »	9'	4.5	0° 58	135.1 »	6.97
5	1 »	9'	6.0	0° 64	131.1 »	7.00
6	1 »	8'	5.2	0° 63	135.5 »	6.80
7	7 »	9'	7.5	0° 63	139.6 »	6.88
8	90 min.	10'	4.2	0° 63	140.5 »	6.87
9	1 giorno	13'	5.0	0° 56	133.2 »	6.72
10	80 min.	11'	4.2	0° 60	141.5 »	6.78
11	70 »	9'	2.2	0° 66	135.4 »	7.09
12	2 giorni	15'	6.0	0° 60	138.7 »	6.60
13	90 min.	11'	4.3	0° 60	146.6 »	6.52
14	1 giorno	13'	5.0	0° 56	136.0 »	6.53
15	3 »	9'	6.0	0° 59	140.9 »	6.55
16	2 »	11'	7.9	0° 61	140.8 »	6.74
17	4 »	10'	6.0	0° 55	129.7 »	6.62
18	8 »	11'	8.5	0° 60	135.2 »	6.57
MEDIE . . .				0° 605	138.0 × 10 ⁻⁴	6.76

Soggetto n. 2.

1	2 giorni	27'	1.7	0° 65	132.5 × 10 ⁻⁴	6.67
2	2 »	27'	1.7	0° 62	128.2 »	6.53
3	3 »	20'	2.0	0° 57	131.6 »	6.62
4	8 »	30'	2.2	0° 54	124.2 »	6.87
MEDIE . . .				0° 595	129.1 × 10 ⁻⁴	6.67

Soggetto n. 3.

1	5 giorni	12'	6.1	0° 63	134.6 × 10 ⁻⁴	6.45
2	2 »	9'	4.2	0° 54	135.8 »	6.77
3	2 »	8'	3.6	0° 58	132.7 »	6.88
MEDIE . . .				0° 583	134.4 × 10 ⁻⁴	6.70

Botanica (Fisiologia vegetale). — *Fenomeni di attivazione nell'accrescimento vegetale* ⁽¹⁾. Nota II. di S. DOJMI DI DELUPIS, presentata ⁽²⁾ dal Socio E. CARANO.

Precedenti studi sperimentali ⁽³⁾ mi hanno condotto alla elaborazione dell'ipotesi che a contatto di particelle colloidali saturate con ioni Ca le piante acquistano il potere di attivare il proprio accrescimento attraverso modificazioni che le piante stesse sono capaci di indurre a mezzo dell'idrogeno nella composizione ionale dei colloidi nel substrato. Questa ipotesi non può evidentemente ritenersi fondata se non risulti accertato che l'attivazione di crescita sia congiunta a stimolazioni che, per effetto di medesimi fenomeni di induzione, ricevono determinate reazioni o funzioni « endogene » fisiologicamente essenziali per l'organismo vegetale.

Per questo accertamento mi è sembrato anzitutto interessante fermare l'attenzione sulla nutrizione delle piante e precisamente sulla assimilazione del calcio e del fosforo, di cui le funzioni specifiche definiscono, come è ben noto, in modo dominante la potenza di accrescimento delle piante.

Le ricerche sono state effettuate sul materiale ricavato nelle prove che ho illustrate nella precedente Nota. L'assimilazione dei principî nutritivi è stata esaminata secondo il medesimo procedimento con cui è stato analizzato l'accrescimento: il raffronto di eventuali cambiamenti nelle proporzioni di elementi assorbiti dal frumento coltivato due volte di seguito su permutite calcica e su sabbia di quarzo dà modo di rilevare, in base al comportamento differenziale delle piante, la reattività funzionale interna dell'organismo vegetale di fronte alle modificazioni indotte dalla coltura nel substrato e in corrispondenza alla attivazione dell'accrescimento.

TABELLA I.

Substrato	Per 100 gr. di sostanza organica secca					
	Fosforo, γ P_2O_5			Calcio, mgr CaO		
	1 ^a coltura	2 ^a coltura	Diff.	1 ^a coltura	2 ^a coltura	Diff.
Permutite. . . .	2000	2330	+ 330	894	817	— 77
Sabbia di quarzo.	2800	2570	— 230	1156	410	— 746

(1) Lavoro eseguito presso la R. Stazione Sperimentale di Bieticoltura di Rovigo.

(2) Nella seduta del 3 giugno 1938.

(3) Vedi questi « Rendiconti », vol. XXVII, fasc. 11, p. 588.

Le determinazioni del calcio sono state eseguite secondo l'usuale metodo per precipitazione con ossalato ammonico e titolazione con permanganato; quelle del fosforo secondo il metodo messo ultimamente a punto da R. Herrmann e Fr. Sindlinger ⁽¹⁾ per le misure colorimetriche a mezzo del fotometro di Pulfrich.

Nella tabella I si riportano i dati dell'assorbimento radicale, con le corrispondenti differenze nei due momenti successivi di coltivazione, e nella tabella II le quantità di ioni Ca e H presenti nella permutite all'inizio della 1^a coltura e all'inizio e fine della seconda coltura.

TABELLA II.

	Milliequivalenti su 100 gr. di permutite	
	H	Ca
Inizio prove	2.5	40.0
Fine prima coltura.	8.1	34.4
Fine seconda coltura	10.7	31.8

In base ai dati sperimentali, l'assorbimento di ambedue gli elementi risulta in prima semina più basso nel frumento coltivato su permutite che nel frumento coltivato su sabbia di quarzo.

In seconda coltura su permutite, in coincidenza di una deposizione di ioni H al posto di ioni Ca su colloidi, l'assunzione del fosforo non segna che lievi differenze in meno rispetto all'assorbimento radicale su sabbia di quarzo, mentre l'assimilazione del calcio assume valori quasi due volte maggiori su substrato di permutite.

Differenziamenti significativi si notano inoltre, per uno stesso substrato, fra i due successivi momenti di coltivazione: su permutite l'assunzione del fosforo risulta superiore, e quella del calcio appena lievemente inferiore in seconda coltura che in prima coltura; su sabbia di quarzo invece le proporzioni di ambedue gli elementi e soprattutto del calcio diminuiscono in seconda coltura.

In base a questo esame comparativo, l'assorbimento degli elementi appare orientarsi, per la coltura su sabbia, in senso sfavorevole all'accrescimento, mentre per la coltura su permutite l'assorbimento stesso manifesta tendenze conformi alle leggi dell'accrescimento e corrispondenti alle funzioni specifiche degli elementi nella nutrizione vegetale. A questo proposito giova richiamarsi da una parte alle numerose constatazioni riguardanti le influenze

(1) « Bodenk. u. Pflanzenernäh. », 4 (49), 1937, p. 1.

inibitrici di disquilibri nell'assunzione del calcio sull'attività funzionale delle piante, e dall'altra parte alle rilevazioni sperimentali concernenti le stimolazioni inducibili ai processi di crescita da incrementi nell'assorbimento del fosforo; stimolazioni cui danno particolare rilievo i recentissimi studi di P. Pratesi⁽¹⁾ e di V. Ignatieff e H. Wasteneys⁽²⁾ sulla presenza, distribuzione e concentrazione delle fosfatasi nelle piante e sul ruolo dei processi di fosforilazione e defosforilazione non solo nella demolizione ma anche nella sintesi dei carboidrati.

Se la diversa orientazione delle funzioni alimentari, quale si determina essenzialmente per la diversità di substrato, si ricollega con le risultanze sperimentali illustrate nella precedente Nota sui differenziamenti di peso in sostanza organica, si trae la deduzione che, in presenza di colloidi saturati con ioni Ca, la « potenza di crescita » e l'attività radicale di assunzione degli elementi nutritivi si sviluppano coordinate con la progressiva deposizione sui colloidi di ioni idrogeno in sostituzione a ioni calcio rimossi in quantità equivalenti allo stato di carbonato precipitato.

Si hanno buone ragioni per ammettere che con questa attività funzionale delle piante nel campo di forza del substrato colloidale esterno — attività di natura eminentemente polare ed essenzialmente legata alla presenza di un « vettore » dell'idrogeno, — si stabiliscano condizioni di regolazione conformi alle leggi generali di equilibrio dei sistemi fisico-chimici.

La facoltà di indurre, a mezzo dell'idrogeno, lo scambio ionico nel substrato conferisce alle piante stesse il potere di provocare un « rilassamento » delle forze elettrostatiche dei colloidi che, per la stessa coesione con cui tengono il calcio e il fosforo in stato di ioni legati, tendono ad esercitare una azione restrittiva sull'assunzione radicale degli elementi stessi e, causa l'attenuazione degli stimoli di cui gli elementi sono capaci, sulla potenza di crescita delle piante. Con lo scambio ionico ambedue gli elementi nutritivi si liberano automaticamente dal legame colloidale e restano a disposizione delle piante in momenti successivi di crescita, grazie non solo al passaggio del calcio allo stato di carbonato, che ne ripristina, conformemente alle leggi elementari di solubilità chimica, le quantità sottratte nella fase liquida, ma grazie anche alla deposizione dell'idrogeno in seno ai colloidi per cui si rende parzialmente irreversibile la dissociazione del fosforo dal legame colloidale.

Questa parziale irreversibilità, che consente una crescente assunzione radicale del fosforo, appare evidente dalla seguente tabella III dove sono indicate le quantità di P_2O_5 in γ per 100 gr. di permutite, quali risultano in base a determinazioni eseguite su estratti acquosi, che sono stati ricavati

(1) « La Chim. e L'Ind. », XVII, n. 8, 1935, p. 559; « Ann. Chim. Appl. », vol. 27, 1937, p. 309, p. 321 e p. 382; « Enzymologia », vol. 4, 1937, p. 242.

(2) « Biochem J. », vol. 30, 1936, p. 1171.

per centrifugazione previa agitazione per 2 ore e mezza di gr. 50 di permutite con 250 cc. di acqua distillata esente di CO_2 .

TABELLA III.

	$\gamma \text{P}_2\text{O}_5$ per 100 gr. di permutite	
	Valori	Differenze
Inizio prove	1433	—
dopo la 1 ^a coltura	1900	+ 467
dopo la 2 ^a coltura	2560	+ 1127

I dati sperimentali, confrontati con i valori della Tabella II, dimostrano, a conferma di precedenti ricerche⁽¹⁾, che, con l'aumentare della deposizione fitogenica di ioni H in seno ai colloidi, le quantità di fosforo nella fase liquida aumentano malgrado la crescente asportazione radicale.

La trattazione teorica dei risultati porta adunque ad ammettere che, in seguito alle modificazioni indotte dalle piante nella composizione ionale del substrato colloidale, l'assunzione radicale del calcio e del fosforo sottostà ad una regolazione suscettibile di indurre stimoli favorevoli a reazioni e funzioni fisiologiche interne dell'organismo vegetale.

Questo risultato conclusivo comprova la esistenza di fenomeni esogeni di autoattivazione nell'accrescimento vegetale.

(1) « Atti R. Ist. Ven. Scienze Lett. ed Arti », 96, II, 1936-37, p. 603.

Botanica (Fisiologia vegetale). — *Fenomeni di attivazione nell'accrescimento vegetale*⁽¹⁾. Nota III di S. DOJMI DI DELUPIS, presentata⁽²⁾ dal Socio E. CARANO.

Al fine di verificare i fenomeni di attivazione, segnalati in precedenti lavori⁽³⁾⁽⁴⁾, e di tentarne possibilmente una prima analisi teorica, ho dato corso ad una nuova serie di ricerche, in cui, ferme restando tutte le altre modalità di procedura sperimentale, si è variata la posizione iniziale di equilibrio nel substrato di permutite. Tali variazioni sono consistite nella saturazione con ioni Ca e H in diverse proporzioni e nell'aggiunta di CaCO_3 atto a rendere reversibile lo scambio ionico per rimozione dell'idrogeno. Le condizioni di substrato, realizzate secondo questi criteri, corrispondono ai seguenti distinti gruppi di prove, che sono state condotte su frumento in vasi Neubauer:

- A) permutite-Ca: saturazione con 40 m. e. Ca e 2.5 m. e. H;
- B) permutite-Ca·H: saturazione con 28.9 m. e. Ca. e 13.6 m. e. H;
- C) permutite-Ca + CaCO_3 : aggiunta di 0.5 % di carbonato di calcio precipitato alla permutite-Ca. (gruppo A);
- D) permutite-Ca·H + CaCO_3 : aggiunta di carbonato di calcio 0.5 % alla permutite del gruppo B.

Per confronto è stata assunta, come nelle precedenti ricerche, la sabbia pura di quarzo (gruppo E).

Con riferimento al valore 100 di colture standard su sabbia di quarzo, si riportano nel seguente prospetto, per le differenti posizioni iniziali di substrato, i differenziamanti in sostanza organica prodotta in prima e seconda coltura:

Substrato	1 ^a coltura	2 ^a coltura	Diff. %
A) Permutite-Ca.	42	61	+ 47
B) Permutite-Ca·H.	53	59	+ 11
C) Permutite-Ca + CaCO_3	31	52	+ 67
D) Permutite-Ca·H + CaCO_3	39	55	+ 42
E) Sabbia di quarzo	100	67	— 33

(1) Lavoro eseguito presso la R. Stazione Sperimentale di Bieticoltura di Rovigo.

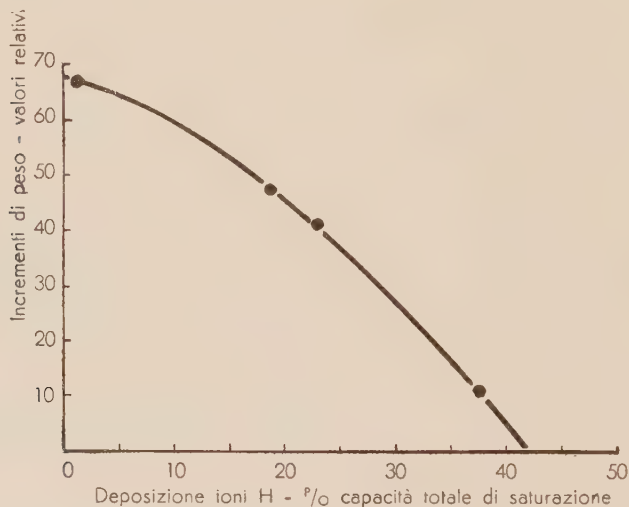
(2) Nella seduta del 3 giugno 1938.

(3) Questi «Rendiconti», vol. XXVII, fasc. 11, p. 588.

(4) Ibid., fasc. 12, p. 685.

I risultati sperimentali fanno anzitutto notare una fedele riproduzione dei fenomeni precedentemente segnalati: i pesi di sostanza organica nella seconda coltura di frumento, mentre diminuiscono su sabbia di quarzo nella misura del 33 %, aumentano invece su permutite nella misura variabile dall'11 al 67 %.

Questi incrementi di peso, messi in relazione con le quantità di H presente nella permutite alla fine della seconda coltura, si dispongono in una serie ordinata che si lascia tradurre in una regolare curva, come appare dal seguente diagramma, dove sono riportate le differenze percentuali dei pesi corrispondenti alle quantità di idrogeno nella permutite, espresse in percento della capacità totale di saturazione.



Secondo la curva teorica, gli aumenti di peso, massimi a percentuali minime di idrogeno, divengono sempre minori col crescere delle proporzioni dell'ione, per annullarsi quando le quantità raggiungono circa il 40 % della capacità totale di saturazione della permutite.

Per potere considerare queste rilevazioni sperimentali nel loro giusto valore, giova ricollegarle ad un esame dell'accrescimento (inteso in senso assoluto) e al decorso della deposizione fitogenica dell'idrogeno in tempi successivi di coltivazione. Per quanto riguarda l'accrescimento assoluto, significativi appaiono i valori della prima coltura: il massimo peso si ha su permutite-Ca·H che su 100 gr. contiene 15.7 m. e. di H, il minimo peso su permutite Ca+CaCO₃, in corrispondenza a 1.2 m. e., pesi intermedi per la permutite-Ca e permutite Ca·H + CaCO₃, di cui le proporzioni di H raggiungono rispettivamente 5.7 e 9.7 m. e.

Per quanto concerne il decorso della deposizione di H in tempi successivi di coltivazione, si riportano qui appresso gli aumenti progressivi riscontrati nella permutite-Ca e nella permutite-Ca·H, di cui le proporzioni iniziali di H risultano per 100 grammi rispettivamente di 2.5 e 13.6 m. e.:

Substrato		1 ^a coltura	2 ^a coltura
Permutite-Ca	m. e. H	7.8	1.3
Permutite-Ca·H	m. e. H	2.1	— —

I dati indicano chiaramente che la deposizione dell'H decresce tanto più rapidamente quanto maggiore è la proporzione dell'idrogeno stesso nel substrato colloidale annullandosi quando le quantità dell'ione raggiungono il 40% circa della capacità totale di saturazione della permutite.

Riassumendo si constata che a crescenti quantità di idrogeno nella permutite tendono contemporaneamente ad abbassarsi e la deposizione dell'ione e gli incrementi dei pesi, mentre l'accrescimento assoluto continua costantemente ad aumentare. Questo risultato fa riconoscere un tipo di fenomeni che presenta una grande analogia con l'*autocatalisi* quale si manifesta comunemente nelle reazioni biochimiche. Difatti l'elemento attivatore, rappresentato dall'idrogeno (che è il biocatalizzatore per eccellenza nel metabolismo vegetale), si produce durante le reazioni nel sistema, mentre la presenza di un « vettore » fa sì che l'attivazione di crescita non si arresti con la sospensione della deposizione dell'attivatore, ma perduri come « effetto residuo » e sia quindi suscettibile di accumularsi in momenti successivi dell'attività funzionale delle piante.

In base ai risultati sperimentali è da ritenersi che l'attivazione di crescita persista e continui a prodursi, risolvendosi in un progressivo aumento di peso, finchè l'idrogeno continua a depositarsi. Poichè questa deposizione si svolge in conformità alle leggi di scambio e distribuzione di ioni nei sistemi polari, è da supporre che la produzione di nuovi stimoli venga automaticamente a cessare solo quando la concentrazione dell'H nel colloide abbia raggiunto il cosiddetto « punto di equivalenza », a cui l'H, attivato dalle piante, non può più essere interamente assorbito dai colloidi. Dato il carattere reversibile dei processi di scambio ionico, la cessazione degli stimoli non può essere che transitoria: il fatto stesso, che la deposizione dell'H sui colloidi avviene dietro rimozione di ioni Ca allo stato di carbonato precipitato, dà modo che si ripristinino le volute condizioni affinché l'attivazione dell'accrescimento possa riprendere. Un arresto persistente nella produzione di nuovi impulsi e l'annullamento graduale di ogni effetto residuo subentrano quindi soltanto per esaurimento di scorte di calcio atte a determinare la reversibilità delle reazioni.

Così definiti, in accordo con le leggi dello scambio ionico, i fenomeni di attivazione appaiono essenzialmente il risultato di una successione di equilibri instabili e reversibili che si stabiliscono durante l'accrescimento a contatto fisico del sistema radicale delle piante con le particelle colloidali del substrato. Gli equilibri stessi risulterebbero controllati: da una costante biologica, la capacità delle piante a produrre idrogeno attivo, da una costante fisica esterna, la capacità totale di assorbimento dei colloidi e dalle costanti del sistema che caratterizzano l'andamento delle reazioni di scambio ionico. Alle combinazioni di tali costanti corrisponderebbero definite orientazioni del potere di accrescimento e del comportamento delle piante.

Secondo il movimento ionico, la distribuzione di ioni Ca e H nei vari momenti di crescita e l'equilibrio del sistema con la CO_2 , a cui si riallacciano la precipitazione del Ca e la reversibilità dei processi di scambio, l'attivazione dell'accrescimento potrà subire inibizioni temporanee o persistenti.

In condizioni di eccesso di anidride carbonica, essendo automaticamente soppressa la precipitazione del calcio, sono inibite la rimozione del calcio e la deposizione dell'idrogeno; e tali condizioni perdurando i processi di scambio si rendono reversibili: ioni H vengono rimossi da ioni calcio per cui si annullano parzialmente o totalmente gli effetti residui di stimolo e si determina una perdita di rendimento (« caduta di gradiente ») degli stimoli successivi, quando, svanito l'eccesso di CO_2 , l'attività polare delle piante riprende. Alla caduta di gradiente fa automaticamente riscontro una depressione dell'accrescimento, anche per lo stato di iperfunzionalità e relativo sforzo energetico cui soggiacciono le piante, affinché venga raggiunto l'equilibrio elettrostatico corrispondente alle costanti del sistema.

Secondo questa elaborazione teorica, il potere di autoattivazione dell'accrescimento si sviluppa nelle piante a contatto fisico di particelle colloidali sempre che il sistema sia in equilibrio con l' CO_2 e tutto l'idrogeno attivato migri e si depositi in seno ai colloidi. Il raggiungimento di queste condizioni in natura è favorito: dalla circolazione dell'aria nella sfera di azione delle radici, dalla predominanza numerica di ioni Ca nel « gruppo attivo » del vettore colloidale e dalla presenza di calcare, quale scorta dell'elemento scambiabile con l'attivatore biologico.

Risulta così che i fenomeni esogeni di autoattivazione nell'accrescimento si manifestano in corrispondenza a condizioni esterne di substrato, che si considerano di influenza decisiva non solo sull'accrescimento e sviluppo delle diverse specie ma sui grandi fenomeni che definiscono i lineamenti floristici e la struttura fisionomica della vegetazione spontanea e delle formazioni agrarie organizzate con la coltivazione.

Storia e bibliografia della Scienza. — *Cimelii di scienza Lincei ritrovati.* Nota di G. GABRIELI, presentata⁽¹⁾ dal Socio E. CARANO.

Il compito, che da un ventennio mi sono liberamente e di mia iniziativa proposto, di raccogliere quanto più mi sia possibile notizie e documenti sulla storia della prima romana Accademia Lincea, quella di Federico Cesi, degli anni 1603-1630, mi ha condotto a redigere via via ed a pubblicare qua e là, in maggior parte nei « Rendiconti » e « Memorie » della Classe di scienze morali ecc. di questa R. Accademia Nazionale — che sola ormai porta il gran nome Linceo, — una sessantina di Note e studi, prevalentemente bibliografici, in preparazione ed illustrazione del *Carteggio* o corrispondenza accademica e scientifica tra quei primi Lincei, quelli diciam così Cesiani, del quale la nostra Accademia ha iniziato, per mia cura, la pubblicazione integrale⁽²⁾.

Nel corso di questi vent'anni ho avuto occasione di segnalare qua e là alcuni documenti dell'attività scientifica di quelli accademici Lincei, colleghi di Federico Cesi e di Galileo; documenti di cui non si ha più alcuna notizia, ignorandosi dove e se esistano ancora.

Nel volume IX dell' « Archivio di storia della Scienza », 1928, sotto il titolo: *Alla ricerca di alcuni Cimelii Lincei*, raccoglievo appunti informativi sull'Astrolabio Linceo o planisferio costruito nel 1603 dal Linceo Anastasio De Filiis ternano; — sul ms. originale del *Tesoro Messicano*, cioè sul testo e le tavole che Nardo Antonio Recchi da Montecorvino estrasse dalla grande opera di Fr. Hernandez sulla Flora e la Fauna del Messico, e che servirono di base alla edizione Lincea, per cura dei Lincei Giovanni Schreck, Giovanni Faber, Fabio Colonna, F. Cesi, del *Rerum Medicarum Novae Hispaniae Thesaurus* (1628, 1630, 1649, 1651, secondo i vari frontespizi che gli furono apposti); — sulla preziosa opera intorno ai Funghi: tre grandi volumi, ammirati e descritti dal Lancisi nella biblioteca del papa Albani, di *Icones Fungorum*, raccolte disegnate e descritte dal Cesi e dal linceo Giovanni Ecchio; — finalmente sulla Storia naturale della Cina, opera del Linceo e missionario gesuita Schreck o Terrenzio, morto a Pechino nel 1630, intitolata *Plinius Indicus*, in due volumi, iconograficamente illustrata: — tutte e quattro opere scientifiche, specialmente naturalistiche dei primi Lincei, perdute o distrutte, o come che sia a tutt'oggi irreperibili.

Un anno dopo, nel 1929, su questi medesimi « Rendiconti » vol. X, 531-538, davo notizia e saggio iconografico (avendoli avuti qui in grazioso prestito, a mia disposizione per vari mesi) di *Due codici di piante miniate nella*

(1) Nella seduta del 3 giugno 1938.

(2) Nelle « Memorie » della Classe di Sc. mor. ecc., ser. 6^a, vol. VII, fasc. 1^o.

Biblioteca Reale di Windsor. A proposito di Cimelii Lincei; in uno dei quali illustravo brevemente il primo libro messicano latino indigeno di erbe medicinali del Messico, o *Libellus de medicinalibus Indorum herbis*, che è una copia, appartenuta al linceo Cassiano Dal Pozzo, di un ms. originale conservato nel fondo Barberini della Biblioteca Vaticana, e che la Smithsonian Institution di Washington, dietro le mie indicazioni, sta per riprodurre in facsimile a colori e pubblicare: *The Badanian Manuscript, an Aztec Herbal « Codex Barberini Latin 24I »* (Vatican Library), a cura di Emily W. Emmart.

In altra occasione, nella pubblicazione giubilare *Casinensia* dell'Abbazia di Montecassino (1929), illustrai un documento, a torto ritenuto linceo, della biblioteca del Museo Campano di Capua: *Di un manoscritto probabilmente Cassinese di materia medica attribuito al Linceo N. Antonio Stelliola*.

Oggi ho l'onore d'informare l'Accademia di alcuni altri Cimeli, veramente Lincei questi, di recente per buona sorte ritrovati e identificati.

I. L'esemplare Cesiano del *Tesoro Messicano*.

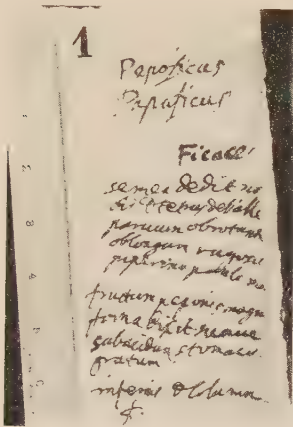
In Bologna, nella privata libreria del prof. Emilio Chioyenda, titolare di Botanica e direttore dell'Orto botanico in quella R. Università, si trova da pochi anni una copia del *Tesoro Messicano* che ha sui margini numerose postille autografe di Federico Cesi.

Questo volume, rilegato in pergamena, in perfetto stato di conservazione, venuto per acquisto da una vendita pubblica nel 1936 (per sua e nostra fortuna) nelle mani dell'attuale proprietario, che ne dava una prima notizia alla R. Accademia Modenese di Scienze, lettere ed arti (negli « Atti e Memorie », 5, I, p. xxxviii), è proprio l'esemplare appartenuto al Cesi; il quale in questa sua copia personale, formatasi man mano che i fogli di stampa eran tirati, registrava di suo pugno sui margini le sue osservazioni, appunti, riferimenti ecc., quasi tutti, naturalmente, nella parte o sezione botanica del libro, o della Flora Messicana.

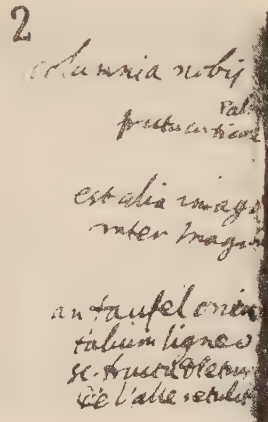
La importanza bibliografica, storica e scientifica di questo prezioso cimelio, che ci mette nella immediata intimità intellettuale del Principe fondatore dell'Accademia ed, avendo la data del 1649, risulta perciò stesso completato, ricucito e rilegato circa un ventennio dopo la morte di F. Cesi (1630), sarà ampiamente e degnamente illustrata dal prof. Chioyenda in una prossima apposita pubblicazione, a cui egli attende, e dove saranno trascritte tutte le postille originali del Cesi ⁽¹⁾.

(1) Fra le molte osservazioni e induzioni comunicatemi dal prof. Chioyenda nel primo esame di questo Cimelio, è interessante rilevarne qui una; secondo la quale, dalle frequenti postille dove ricorrono citazioni e riferimenti ad *O* e *C*, *Orig. et Coru*^o, sembra si possa dedurre che il Cesi avesse alla mano due codici diversi del ms. del *Tesoro Messicano*: uno quello del Recchi, l'originale, ed un secondo invece di Enrico Corvino, il farmacista e fitognoste olandese in Roma, amico e compagno delle escursioni di erborizzazione dei Lincei e sul quale ci proponiamo di tornare.

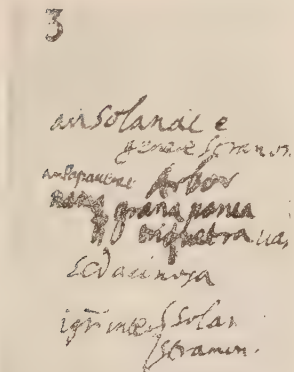
Noi ci limitiamo a riprodurre qui, col consenso del prof. Chioyenda, tre fotografie, da lui stesso favoritemi, di tre postille tra le meno brevi di cui il volume è costellato, aggiungendovi la trascrizione, anch'essa fornitami dal Chioyenda.



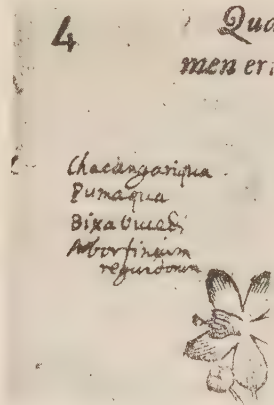
P. 99, cap. LXXX: Papoficus Papaficus Ficacea semen dedit nobis D. Petrus de Valle paruum obrotundum oblongum rugosum piperino paulo sim. fructum peponis magna forma dixit suave subacidum stomacho gratum inferius D. Columna scripturus.



P. 75, cap. XLII: Columnia nobis Palma fructu corticoso est alia imago inter imagines an Faufel orientalium ligneo sc. fructu D. Petrus de Valle retulit.



P. 74, cap. XLI: an Solanac e genere Stramonii an papaverac Arbor namque grana parva triquetra nasc. sed acinosa igitur inter { solan stramon.



P. 74, cap. XLI: Chacangaripua Pumaqua Bixa Ouiedi Arbor finium regundorum.

II. L' *Hortus Eystettensis*.

Questa celebre pubblicazione, che magnificamente raffigura ed illustra il giardino botanico del vescovo principe di Eichstatt in Baviera, Giovanni Currado, e che l'ODESCALCHI (129-131) ed il CARUTTI (187), non avendola mai veduta, scambiarono per opera botanica di Giovanni Faber, è noto lavoro di Basilio Besler, o almeno a lui attribuito (vedine la descrizione nel *Thesaurus* del PRITZEL), stampato, probabilmente a Norimberga, nel 1612-13, in folio grande, con varie centinaia di superbe tavole in rame magistralmente disegnate ed incise, ed in alcuni esemplari, come in quello della Biblioteca di Stato in Berlino indicato dal Pritzel, anche artisticamente colorate.

Ora di questa grande opera, nel natale del 1615, il linceo e cancelliere perpetuo dell'Accademia G. Faber da Bamberga aveva donato al Principe Federico Cesi un esemplare, inscrivendovi una dedica autografa, com'egli stesso ebbe cura di registrare nella chiusa del verbale della solenne adunanza accademica del 26 gennaio 1616: « *Viderunt dicti Lyncei eodem die meam inscriptionem quam praefixi operi illi botanico seu "Horto Eystettensi", quem dono miseram in festis nataliciis excellentissimo Principi et Lynceorum Lyceo* ». (*Verbali e Cronaca della prima Accademia Lincea*, pp. 498=38).

Questo esemplare, venduto nell'incanto della Biblioteca Albani (1856: vi era entrato quasi certamente con il fondo Puteano, o libreria di Cassiano Dal Pozzo, che l'*Hortus* acquistò dagli eredi del Cesi; vedi più oltre), passò nelle mani del libraio romano Aureli, che a sua volta lo vendè alla signora Chiapusso Voli di Susa; presso gli eredi della quale invano io, di tutto informato, ne feci ripetute ricerche anni addietro (1929) per mezzo del Linceo-prof. Mattiolo e di altri. Detto esemplare è ora nelle mani del medesimo prof. Chiovenda, che lo ha acquistato per l'Istituto Botanico di Bologna dal libraio torinese Bourlot, e che lo ha ben riconosciuto per quel medesimo, avendolo per fortunato caso veduto, prima che lo comprasse la Chiapusso Voli, in una libreria qui a Roma, e ricordando bene d'averne letto, in un foglio davanti al frontespizio, la dedica manoscritta all'Accademia Lincea: foglio e dedica che però non appaiono più in questo esemplare oggi bolognese, riscontrato manchevole anche di varie tavole e d'alcuni fogli all'inizio.

Ma che desso sia proprio la copia regalata dal Faber al Cesi, il Chiovenda non ha dubbio, sia perchè ne rammenta ancora e riconosce la rilegatura, quale egli vide quando la dedica autografa Faberiana non ne era stata asportata; sia per il bollo della biblioteca Albani, nitidissimo ancor oggi, in calce al frontespizio; sia perchè questo frontespizio nello spazio tra le due righe *variis orbis terrae partibus, singulari studio collectarum quae* ha ancora alcune macchioline d'inchiostro, evidentemente impressevi, da uno scritto non del tutto asciutto di una pagina di contro; ed il Chiovenda ricorda distin-

tamente che proprio nel centro del foglio di dedica, da lui osservato, era tracciato in stampatello più grande e macroscopico il nome del Principe Cesi nella iscrizione latina.

A conferma di questa ragionevole congettura possiamo addurre un'altra iscrizione e dedica della medesima opera, di mano del medesimo Faber, in un altro esemplare dell'opera medesima venuto di recente sotto i nostri occhi: cimelio Linceo anch'esso ⁽¹⁾.

Altre quattro copie dell'*Hortus Eystettensis* si trovano infatti a Roma: tre nella Biblioteca Vaticana, una nella Lancisiana, e non del tutto simili; onde le descriveremo brevemente.

a) Una è nel fondo Chigiano (S. 79), rilegata in tutta pelle rossa, in due volumi, con all'inizio del primo nove carte non numerate, contenenti: (c. 1), frontespizio effigiato, rappresentante il Paradiso terrestre; (cc. 2-4), lettera dedicatoria: *Reverendo Illustr... Johanni Currado Episcopo Eystettensi... II Kal. Mart. MDCXII*; (c. 5), *Ad nobilem et benevolum lectorem...*; (cc. 6-7), *Privilegia*; (c. 8), *Autores, qui citantur*, con nel verso il ritratto di B. Besler; (c. 9), *Ordo collectarum arborum et fruticum vernalium*, etc.

b) L'esemplare Barberino (X, I, 14-15) ha, al confronto del Chigiano, in fronte a ciascuna delle due principali sezioni o tomi una propria antiporta effigiata, disegnata di altra mano del frontespizio unico, e con entro un grande ovale mediano la scritta: PLANTARUM HORTI EYSTEET | TENSIS. CLASSIS VERNA; nell'altro: CLASSIS AESTIVA. È anche questo in due volumi rilegati in mezza pergamena; e contiene, come il Chigiano, tavole e testo alternati: il testo dirimpetto alle figure. Questo è quasi sicuramente l'esemplare di proprietà di Giovanni Faber, che lo ebbe in dono dai Fugger suoi patroni, e che, rimasto tra i suoi libri, alla sua morte, fu acquistato dal Cardinale e Linceo Francesco Barberini ⁽²⁾.

(1) A proposito di Cimelii e rarità Lincei, rammentiamo il « Primo saggio d'impressione delle tavole del *Tesoro Messicano* » nel 1613, offerto al vescovo di Bamberg, Giovanni Gottifredo di Aschhausen, di cui si conosce un unico esemplare nello stampato Barberino VI, 175, della Biblioteca Vaticana, da noi descritto in « Rendiconti Lincei », ser. 6^a, vol. VI, 1930, pp. 227-229.

(2) Tra le carte del Faber, da me elencate in « Arch. Soc. Rom. stor. patr. », LI, pp. 8-10 dell'estratto *L'Archivio degli Orfani* ecc., troviamo compreso, tra le opere miniate ed illustrate, questo esemplare dell'*Hortus*; del quale (a c. 150 della filza 412 dell'Archivio degli Orfani) si trova memoria della compera fattane, dopo la morte del Faber, dal card. Barberini, in data 13 gennaio 1631, per 160 scudi: « prezzo di doi libri di fiori intitolati *Horti Eystettensi* in folio reale ».

Di questo esemplare fa menzione nel *Tesoro Messicano* (p. 410) il Terrenzio: *Celeberrimus Eystettensis Hortus (qui liber regijs plane sumptibus excusus et affabre elegantissime depictus manu, apud Joannem Fabrum Lynceum Bambergensem, Horti Pontificis Praesidem, Illustrissimorum Dominorum Fuccaronum donum extat...)*.

La qual citazione, attestando presso il Faber una copia miniata dell'*Hortus Eystettensis*, mentre quella che oggi è ancora nel Fondo Barberino, acquistato dal Linceo card. Fran-

c) Il terzo esemplare *Vaticano*, della *Racc. Gener. Scienz.*, S. 4.6, rilegato in tutta pergamena impressa a fregi incolori, contiene le sole tavole, senza testo interposto. La lettera dedicatoria è ridotta a una sola carta: *Reverendissimo et Illustrissimo Principi ac Domino Dn. Johanni Christophoro Episcopo Eystettensi*, in data X Kal. Sept. MDCXIII. Seguono due carte di privilegi, di Francia e del Belgio. Nella lettera si spiega come, morto il vescovo Giovanni Currado, poichè l'opera sontuosa aveva trovato *multos admiratores, ac forte paucos emptores*, si pensò di fare questa edizione, o tiratura, ridotta alle sole tavole. — Nel verso del piatto primo della rilegatura si legge questa iscrizione manoscritta: *D. O. M. | Sedente Paulo V Pont. vere opt. vere max. | sub felicissimis auspiciis | Scipionis Burghesii S. R. E. Card. amplissimi | Bibliothecarii apostolici sum. poenitentiarii | Germanae tam super. quam inferior. | Protectoris dignissimi | Humillimi sui in Sedem Apostolicam cultus | Et debitae gratitudinis signum | Florilegium hoc antiquiss. et celeberrimae | Orbis et Urbis Bibliothecae Vaticanae | Obtulit et intulit | in ipso S. Joannis Baptistae festo suo natalicio die | anno Christi MDCXVII | Joannes Faber Bambergensis medicus et Si. Dom. | Nostri simpliciaris ingrediens aetatis suae annum 44um.* Le ultime due linee della iscrizione sono autografe del donatore, che, come abbiain detto, era appunto il linceo Faber.

d) L'esemplare *Lancisiano* (XXXVII, 2, 9-10), in due volumi anch'esso, rilegato in tutta pelle, molto danneggiato dall'umidità, ha in particolare varie tavole in tutto o in parte accuratamente colorate. Ha soltanto le tavole, senza il testo, che però per le tavole 3-8 del volume primo o *Plantae Vernales*, è stato aggiunto a mano sul verso della tavola, e per le 1-2 è scritto sopra un foglio staccato. Ma la maggior singolarità di questo esemplare è nelle prime pagine del volume primo: nel frontespizio ha la data d'edizione MDCXIII, ma l'ultima asta del numero è stata aggiunta a mano. Segue la dedica a Giovanni Cristoforo, con la data 23 agosto 1613, poi l'avvertenza *ad Lectorem*, poi i privilegi, ciascuno duplicato: quello francese (13 luglio 1613), quello belga (31 maggio), quello olandese (23 luglio): da ultimo, l'elenco degli autori citati e il ritratto del Besler; con in fondo ad ognuna delle quattro sezioni, di cui l'opera consta, l'indice latino e tedesco delle piante.

cesco, è tutta in nero, ci farebbe indurre che il Faber avesse presso di sè, di sua proprietà, due esemplari dell'opera, uno dei quali colorato: sarebbe quest'ultimo quello Lancisiano?

La pianta a cui si riferisce il Terrenzio nel passo su citato è il *Melocactus*, inciso nell'*Hort. Eystett.* nella *Class. Autumn.*, IV ordo, fol. 1 v. Esso (ci precisa il prof. Chiovenda) è oggi denominato *Melocactus Placentiformis* (Lehmann De Candolle = *Melocactus Besleri* Link et Otto); mentre il *Tepenexcomitol* del *Tes. Mess.* è oggi detto *Echinocactus obvallatus* (Moçino et Sessé) De Cand. Le due piante, indicate nella nota del Terrenzio, di Pena e Lobel e di Clusio, sono dette oggi ambedue *Melocactus communis* Link et Otto (= *Cactus Melocactus* Linn.).

Da questa nostra descrizione sommaria dei quattro esemplari romani dell'*Hortus Eystettensis*⁽¹⁾ risulta chiaramente che la pubblicazione fu fatta in due tirature o tipi; un tipo primitivo, completo di tavole e testo, con dedica a Giovanni Currado e data II Kal. Mart. 1612; ed un secondo di sole tavole, dedicato a Giovanni Cristoforo in data X Kal. Septem. 1613. L'esemplare donato all'Accademia dei Lincei, oggi nell'Istituto Botanico di Bologna, appartiene al tipo primitivo, completo di tavole e testo, con tavole tutte in nero, ma disgraziatamente mancante di una decina di esse, di tre fogli iniziali, e del foglio staccato contenente, come dicemmo, la dedica del Faber a Federico Cesi; il quale foglio con dedica il prof. Chiovenda pensa sia stato tolto dalla sig.ra Chiapusso Voli, che all'opera s'interessava solo per i disegni dal lato artistico; o piuttosto, come io penso, dagli eredi, che forse avran temuto una diminuzione di prezzo dell'opera per eventuale contestazione di proprietà.

Siamo grati, in ogni caso, alla sorte, che ha messo ed assicurato in buone mani questo cimelio linceo.

III. L'*Erbario tedesco di Maynz* della biblioteca di Federico Cesi.

Nella Biblioteca Nazionale di Napoli, sotto il n. d'inventario 2840, già nella sala delle Quattrocentine (oggi S. A. VIII. D. 32; vecchia posizione G. 8), il chiaro collega comm. Burgada mi segnalò, anni addietro, un incunabulo di singolare valore. Rilegato in tutta pergamena, ha nel fondo dell'ultima carta, stampato in rosso il seguente colof.: *Disser Herbarius ist tzu | Mencz gedruckt und geen | det uff dem XXVIII dage des mercz. Anno M.CCCC.LXXXV*». Segue un'insegna, sotto cui si legge, scritto a penna, un nome: P. Scheifter. Questo pregiato volume, per vari riguardi interessante, apparteneva al fondatore dell'Accademia dei Lincei ed alla prima Biblioteca Accademica, come si ritrae dal bollo ovale con la lince gradiente e con la nota scritta *Ex Bibliotheca Lincea Friderici Caesii* ecc., impresso nel recto della prima pagina a destra del testo, rimpetto a un altro stemma impresso a sinistra: quello della Biblioteca Albani.

(1) Il prof. Chiovenda m'informa che a Padova, in quell'Istituto Botanico, si conserva un esemplare dell'edizione 1613, giudicata dal Pritzel rarissima. Essa ha il frontespizio del Paradiso terrestre, la prefazione *Spectatori et lectori* firmata Steinhander, il frontespizio dell'*Ordo collectarum arborum et fruticum vernalium* con sul verso il *Buxus* e le due *Syringae*. Anche questa copia è tutta in nero, ed incompleta. Altri esemplari dell'*Hortus Eystettensis* nelle Biblioteche d'Italia, oltre i sei qui indicati e brevemente descritti, ignoro se e quanti esistano. Ho pregato il Centro nazionale d'informazioni bibliografiche di farne inchiesta. Intanto il chiarissimo collega Boselli della Nazionale Centrale di Firenze m'informa che un esemplare esiste colà (Pal. 9, B-A, 1-2), in tre volumi, con le tavole in nero e la data 1613.

Medesima data, in tre volumi, hanno le Nazionali di Milano, Napoli, Venezia: in due volumi le Universitarie di Bologna, Napoli, Padova, Pavia, Pisa: tutte con testo e tavole non colorate.

Questo volume, oltre che per la sua importanza bibliografica ⁽¹⁾, e per esser appartenuto a F. Cesi, è singolarmente interessante per alcune glosse turche manoscritte: una a fol. 3^a, in margine a sinistra, che dice: « fogli 356; numero delle piante... »; ed un'altra in fine sotto la figura d'una pianta disegnata a penna, che riproduciamo. Questa seconda più lunga postilla in carattere molto minuto nè tutta decifrabile, inscritta avanti che il botanico possessore del libro aggiungesse alla pianta (disegnata da lui stesso o da altri?) le radici, dice: « Questa è la pianta *Hilâlîyyeh*..., esce, è di piccole dimensioni, a fiori gialli; poi, maturando, produce semi a forma di mezzaluna » (*hilâl*, che è piuttosto « falce di luna »).

I dizionari turchi danno *Hilâlîyyeh* come corrispondente di *Celidonia*, ma nell'Erbario, a cap. 435 c'è già una descrizione e figurazione della *Celidonia*, diversa da quella qui in fondo effigiata, e che (mi scrive il prof. Chiovenda, a cui ne avevo trasmessa la fotografia) rappresenta certamente il *Chelidonium Majus* L. con fiori e frutti, a cui il disegnatore ha senz'altro aggiunto le radici. I semi della *Celidonia* sono un po' curvi, e ricordano perciò un po' la prima fase o falce lunare, presentando nel punto concavo ciò che ha nome « arillo ».

(1) La storia bibliografica dei primi Erbari a stampa è per vari riguardi e riflessi interessante, nè abbastanza studiata in Italia, dove pur si ebbe il primo incunabolo del genere. Abbiamo invece sull'argomento importanti lavori bibliografici inglesi e tedeschi, in particolare: ARNOLD C. KLEBS, *Herbals of the XVth Century*, 1917-18, e l'introduzione al *Catalogue of Early Herbals*, cioè della collezione del dott. K. BECHER, in « Bulletin XII della Libreria "L'Art Ancien" », Lugano, 1925; e W. L. SCHREIBER, *Die Kräuterbücher des XV. und XVI. Jahrhunderts*, München, 1925.

Il primo libro a stampa di questo argomento è il così detto *Apuleius Barbarus*, *Herbarium Pseudo-Apuleio*, la cui editio princeps fu fatta a Roma nel 1481 da Gio. Fil. de Lignamine da su un codice del secolo IX dell'abbazia di Montecassino (Cod. Casin. 97): stampa e ms. di recente riprodotti fotograficamente da F. W. T. Hunger in una magnifica edizione in folio del Brill di Leida, 1936. I medesimi tipi e le medesime figure in legno del Lignamine trovo nell'*Herbarium Apulei Platonici ad Marcum Agrippam* dell'esemplare Corsiniano 49, E, 22, senza data nè luogo di stampa.

Secondo incunabolo del genere è il così detto *Herbarius Latinus*, stampato a Mainz da Peter Schoeffer nel 1484, di cui una copia è nella Palatina di Parma. E terzo è appunto questo Erbario tedesco od *Hortus Sanitatis* [per Jo. Wonneken von Cube], impresso a Mainz [P. Schoeffer], 1485, descritto nel *Catalogue of books printed in the XVth century now in the Brit. Mus.*, London, 1908, I, pp. 35-36 (non ancora compreso nel grande *Gesamtkatalog der Wiegendrucke*).

Esso è stato ristampato in facsimile dal dott. C. Wolf u. Sohn a Monaco nell'autunno del 1924 in 300 esemplari col titolo *Hortus Sanitatis Deutsch Peter Schöffer Mainz 1485*.

Del nostro incunabolo risultano esistenti in Italia, nei depositi dello Stato, altri due esemplari: uno nella Nazionale di Milano, l'altro nella Universitaria di Pavia; tutte e tre disgraziatamente mutili: quelli di Napoli e di Milano all'inizio, quello di Pavia all'inizio ed alla fine. L'Ambrosiana ha l'edizione del 1613.



Forse la figura che è data nel volume, e che è del tutto diversa da questa disegnata dall'anonimo in fondo al libro, sarà o una pianta fantastica, o una falsa identificazione, o anche una malvagia riproduzione. Perciò probabilmente essa fu disegnata in calce al volume, appunto perchè la figura del testo non sodisfaceva l'anonimo possessore del libro.

« Che sia questo volume — soggiunge il Chiovenda — appartenuto a quel G. B. Raimondo presso cui il Colonna vide l'Erbario arabo, di cui parla nell'*Ecphrasis* o *Minus cognitarum* ecc., p. 142 ? ». Ecco qui testualmente il passo in parola: « *Hoc autem verum esse (Eupatorium) non sine gaudio in Arabico Herbario manuscripto in quatuor tomos diviso apud nobilem et doctissimum Jo. Bapt. Raimundum Romae reperimus, dum Hyssopi historiam quaeremus... Illius auctor Ahamad ben Abdessamad etc...* »

Accennando a questo passo del Colonna in altra mia Nota, identificavo l'« Erbario arabo » segnalato dal botanico napoletano, con la nota opera sui *Semplici*, di Ibn Baitār. Oggi non sono sicuro di questa identificazione: e mi domando dove siano andati a finire i quattro volumi mss. arabi veduti dal Colonna: certo essi non sono a Firenze, dove passarono i codici arabi di proprietà del Raimondi.

IV. Raccolgo qui da ultimo alcune notizie spicciole su volumi di proprietà dei Lincei, o ad essi relativi, di singolar valore, ancora esistenti.

a) L'esemplare Vaticano (R. I. IV, 1607) del trattato *De aëris transmutationibus* di G. B. Della Porta, *Romae, apud B. Zannettum, 1610* (cfr. la nostra Nota B. 10, 47), ha, in calce al frontespizio, la scritta autografa del Cesi: *Illmi Federici Caesii Montis Coelij Marchionis—Donum Bibliothecae Vaticanae*: proviene dunque direttamente dal Principe e istitutore dell'Accademia, sebbene il donatore non si qualifichi come tale.

Sulla sua ricca libreria, o *Bibliotheca Lyncea*, trarremo in altra Nota, dai documenti dell'Archivio linceo, copiose notizie, con un primo elenco delle opere che vi appartenevano, e che sono state identificate in private o pubbliche collezioni di oggi.

Chiuderò questi brevi cenni segnalando uno di questi volumi, per noi e per il nostro scopo di particolare importanza, che mi è stato anch'esso indicato dal medesimo prof. Chiovenda, così benemerito delle memorie Lincee, tra i libri del fondo Bertoloni nella biblioteca dell'Istituto Botanico dell'Università di Bologna.

Esso è la nota opera del CLUSIUS, *Rariorum plantarum Historia*, Anversa, 1601, ed ha, oltre al bollo della prima Biblioteca lincea, numerose note marginali autografe di Federico Cesi, nella sua mano di scritto minuta e abbastanza regolare, anche con qualche tabelletta relativa alle forme e colori di fiori e semi.

Anche di questo volume il Chiovenda darà minuta descrizione ed illustrazione.

b) L'esemplare Lancisiano (XXVI, 712) del *Phytobasanos* di Fabio Colonna, *Neapoli, apud Jo. Jacobum Carlinum et Antonium Pacem, 1592*, apparteneva al Colonna stesso, il quale vi tracciò di suo pugno annotazioni, aggiunte e correzioni (di cui tenne conto Giov. Bianchi nella edizione da lui curatane a Firenze, 1744), ed anche nei fogli di guardia, notizie varie personali di famiglia ed altre.

Alla minuta descrizione che si fa del cimelio in *Flora Romana, 176-177*, aggiungiamo qui soli due particolari:

la data della morte della zia: « Cornelia Colonna mia zia benedetta è andata in paradiso a dì 21 aprile 1617, hore 14, et prega nostro Signore per me, che fu di venerdì »;

e l'epitafio (ignoro se edito) di M. Antonio Colonna, il vittorioso di Lepanto, nell'archivio (o galleria?) del celebre cardinal Ascanio.

M. Ant. Columnae Epith. in Tablino Ascanii Cardin. Columnae:

De classe victa barbarum
 ionio in mari
Patriae triumphum merens
 Antonius tulit:
Non ut celebris ille innotescat
 magis,
Per ora quando minus
 omnium volet,
Sed ut Columnae posteram
 gentem domus
Ad tale pictum excitet paries
 decus.
Ascanius unicus superstes
 filius
Patris triumpho memoriae
 locum dicat.

c) Un'ultima segnalazione bibliografica lincea. Nella mia nota *Lincei e Linceabili napoletani: amici e corrispondenti della prima Accademia Lincea a Napoli*, di recente presentata all'altra Classe della nostra Accademia, ho raccolto alcune notizie su *Fra Donato D'Eremita* da Rocca d'Evandro, converso domenicano, speziale e fitognoste nella celebre farmacia napoletana di Santa Caterina a Formello, morto verso il 1630, vissuto in frequente rapporto con i Lincei di Napoli e quelli di Roma, abile disegnatore, autore di alcuni trattati farmaceutici da lui stesso iconograficamente illustrati (*Elixir vitae*, Napoli, 1624; *Antidotario*, Napoli, 1630), e in particolare d'una tavola della *Granadilla* o Fior di Passione (*Passiflora incarnata* L.), da lui disegnata e

fatta incidere in due edizioni: una dedicata al Linceo Giovanni Faber (Napoli, 1619), l'altra al Linceo Fabio Colonna (ibid. 1622).

Di queste due tavole nessun esemplare, per quel che io sappia, si conserva nelle biblioteche d'Italia; e solo m'è noto, perchè segnalato dal Pritzel, quello della Biblioteca Banksiana nel British Museum. Avendone fatta eseguire copia fotografica, da aggiungere agli altri cimelii Lincei custoditi nell'Archivio storico Linceo di questa Biblioteca Accademica, ho il piacere di metterla qui sotto gli occhi dei signori Lincei e degli altri studiosi di storia e iconografia della botanica.

Su questo Fra Donato in particolare pubblicherò tra breve nel periodico *Memorie Domenicane* una Nota biografica e bibliografica, che spero sarà di qualche interesse per la storia della coltura scientifica napoletana nel Seicento. Ivi illustrerò le due tavole della Granadilla, che riproduco qui da quel periodico, col benevolo permesso di quella Direzione.

U. A.



Atti dei Lincei – Rend. d. Cl. d. Sc.
fis. mat. e nat., Vol. XXVII.

G. GABRIELI – *Cimelii di scienza
Lincei ritrovati.*

TVNERA VIX NORANT CHRISTI CRVDELIA VATES
PRASCIA CVM TELIVS PROTVLIT ANTE NOTAS.

Granadi glia ouero Fior della Passione

AA. Frutto rotondo come
piccolo melo Appio, di
color uerd cinereo.

Cum sitis in bre paramento
Ciment i granati come quello
del granato, di. fane a più nelle
bianchite et trapiante che in pare
il fimo, come qual e nero grande compresso
tate, punnato di a i budi

B. I granati sono del dory in granate del Granato,
di vito odore della fene, di melle
P. di vapor delle melle, che
a due a due obliquamente
in bre fronsi oranzate
di fone cau nella base
dal cui mezzo i bre
ne pistato escione
dalla cana parte
del frutto di dore
bianco et carillo
ginefo.

C. Come sopra
della fe. a grande
zza nero, come
da parte di aco em
presso, et da una parte
vni dell'auito, et poco
di uero

D. Fiore con doppo ordine
de' raggi



All Ill^{mo} Signore il Signor Fabio Colonna linceo
Pad^{re} Oss^{mo}

Volle l'Eterno Artefice Ill^{mo} Sg^{lo} mio di quanto agli occhi nostri uisibile si se rappresentia, & di quanto parimento sotto il
uider non cade, che una pianta non nelle nostrali parti: ma nelle più remote del Mondo colà nel Quito Regno del
Perù nascente con le mani della Natura, mirabile imagine, ci spiegarle gli strumeti, di adoprarsi douano nella sanissima pas-
sione dell'Inocentiss^{imo} suo Fig^{lio} Signor nro, nel cui Fiore la Corona si uede sotto di essa gli intagliati raggi, sopra di essa la Corona,
Cyria sopra i Chiodi, il suo e tipie forma la Canà, qui Coprioli ne duognano le Funi, e la sua Foglia finalm^{te} la Lanca ne addita;
stipendo, e più me uago di Natura artificio ordinato dal suo grà Fautore: e qsta Pianta uirginea & Clemande, di radice fibrosa
e perenne, di lunghi fiameti, & di spessi nodi, di foglie, di Caprioli, e di fiori adornata, fiorisce più uita l'Estate; il Fiore, che di
Nariso e di Mele odora nel suo primo spuntare si rassomiglia a qsta della Nigella, & paria aperto qual egli si sia di tantamete
dimostra; le foglie hano odore di Xiride, di gusto alquanto acuto, e finalm^{te} il frutto e rotondo, ma trifido, di acido sapore grato
al gusto che solue leggiem^{te} il uentre, molto più di qsta Pianta, che ió diligenza appresso di me si coltiua, a' 15. dice io,
potrei: ma bastere che questo p hora, come picciol segno della mia antica affettione, ella ne ricua, e le bacio le mani
dal Consento di Santa Chatarina a Formello di Napoli a 70. di Ottobre. 1622.

Depo fissata la pianta produce il frutto di Agosto come di sopra e dipinto et descritto.

Fra Donato d'Erasmata

INDICE DEL VOLUME XXVII, SERIE VI. — RENDICONTI

Primo Semestre 1938.

INDICE PER AUTORI

A

- ABETTI G. — « Altezza della cromosfera del 1937 e andamento del ciclo solare ». 317.
- ALIBRANDI A. — « Nuova conferma sperimentale per la necessaria partecipazione della via afferente congenita al meccanismo dei riflessi condizionati ». 479.
- ID. — « Sull'efficacia della parola parlata per l'elaborazione del riflesso condizionato dell'ammiccamento nel cane ». 595.
- ANDRISSI G. L. — « La radiazione del Sole a Roma dal 1933 al 1936 ». 356, 564.
- ARAGONA G. — « Nuove osservazioni sull'ormone pancreatico iperglicemizzante ». 481.
- ARMELLINI G. — « I problemi fondamentali della Cosmogonia e la legge di Newton ». 609.
- metrico di Montecastello, presso Alessandria, nell'agosto 1934 ». 498.
- BARBIERI U. — « La grande anomalia geoidica nella Valle Padana ». 614.
- ID. — « Estensione dell'anomalia geoidica in Val Padana, e l'isoanomala zero per la gravità ». 619.
- BARONI A. — « Sui telluromercaptani ». 238.
- BIOCCA E. — « Coltura in serie del "Trypanosoma Brucei" nell'embrione di pollo ». 452.
- BLANC G. A. — « Interpretazione geochimica delle formazioni quaternarie di Grotta Romanelli (Terra d'Otranto). — I. Dati del problema e metodo di ricerca ». 189.
- ID. — « Interpretazione geochimica delle formazioni quaternarie di Grotta Romanelli (Terra d'Otranto). — II. I complessi colloidali ». 429.
- BOAGA G. — « Campagna gravimetrica in Sardegna ». 232.
- BOGDAN C. P. — « Sopra una classe di V_3 che ammettono una infinità di superficie quasi-asintotiche dipendente da una funzione arbitraria ». 62.
- BOGGIO T. — « Sulla curvatura di una superficie e di una varietà ». 12.
- ID. — « Sulle soluzioni di un sistema di equazioni con derivate parziali ». 529.
- BOMPIANI E. — « Sulle varietà anolonomie. — I. Alcuni teoremi generali ». 37.
- ID. — « Sulle varietà anolonomie. — II. Le V_3^2 di S_3 proiettivo ». 45.
- BORGATTI G. — Vedi MORUZZI G.
- BRUNELLI G. e CANNICCI G. — « Le caratteristiche biologiche del lago Tana ». 319.

B

- BADESCU R. — « Semplificazioni ed estensioni del metodo di Picone per l'integrazione delle equazioni lineari alle derivate parziali del 2° ordine di tipo iperbolico ». 540, 624.
- BAGLIONI S. — « Determinazione microchimica dell'azoto solubile totale e delle frazioni ureica ed aminica (azotemia totale, ureoazotemia ed aminoazotemia) nel sangue ». 429.
- BARBIERI U. — « Stazione astronomico-geodetica eseguita sul vertice trigono-

C

- CABRAS A. — « Risoluzione di un problema relativo alle sollecitazioni impresse sui sistemi continui ». 541.
- CAJUS JACOB. — « Sulla generalizzazione di una formula di Cisotti e sua applicazione allo studio dei movimenti lenti di un fluido comprimibile ». 176.
- CANNICCI G. — Vedi BRUNELLI G.
- CAPRARO V. — « Tiroxinizzazione e beriberi sperimentale ». 414.
- ID. — « Espressione e valutazione del "quoziente beriberico Qb" ». 415.
- ID. — « Castrazione e beriberi sperimentale nei colombi ». 419.
- ID. — « Sul valore del pH del secreto delle vescichette seminali di ratto albino ». 486.
- CARNERA L. — « Risultati tratti dallo studio delle variazioni di latitudine negli anni 1936 e 1937 ». 421.
- CARTOVITCH N. — « Sul calcolo effettivo del periodo del moto perturbato in in caso tipico di prima approssimazione ». 65.
- CATTANEO C. — « Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli sforzi ». Nota I. 342.
- ID. — « Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli sforzi ». Nota II. 434.
- ID. — « Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli sforzi ». Nota III. 474.
- CAVINATO A. — « Il permiano nel territorio di Orroli (Sardegna) ». 586.
- CEDRANGOLO F. — Vedi QUAGLIARIELLO G.
- CHISINI O. — « Un più generale teorema d'esistenza dei piani multipli ». 535.
- CIMINO M. — « Orbita definitiva della cometa di Finlay ». Nota I. 668.
- COLONNETTI G. — « Il secondo principio di reciprocità e le sue applicazioni al calcolo delle deformazioni permanenti ». Nota I. 75.
- ID. — « Il secondo principio di reciprocità e le sue applicazioni al calcolo delle deformazioni permanenti ». Nota II. 79, 173.

- COLONNETTI G. — « Il secondo principio di reciprocità e le sue applicazioni al calcolo delle deformazioni permanenti ». Nota III. 79, 221.
- CORRADETTI A. — « Una nuova classificazione degli "*Haemosporidiidea*" basata sull'esistenza di un ciclo schizogonico dei Plasmodi nelle cellule dei tessuti ». 31.
- ID. — « Su alcune fasi del ciclo schizogonico del "*Plasmodium gallinaceum*" e del "*Plasmodium cathemerium*" ». 121.
- CROCCO G. A. — « I fattori della stabilità statico-cinetica nei motovelivoli ». 189, 267.
- ID. — « Il coefficiente balistico dei velivoli ». 498.

D

- DANTONI G. — « Sui sistemi di risultanti ». 342, 397.
- DE MIRA FERNANDES A. — « Equazioni di struttura dei gruppi di Lie ». 631.
- DOJMI DI DELUPIS S. — « Fenomeni di attivazione nell'accrescimento vegetale ». Nota I. 588.
- ID. — « Fenomeni di attivazione nell'accrescimento vegetale ». Nota II. 595, 685.
- ID. — « Fenomeni di attivazione nell'accrescimento vegetale ». Nota III. 595, 689.

E

- ENRIQUES F. — « Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari ». 493.

F

- FAEDO S. — « Sulle superficie razionali a sezioni iperpiane canoniche e su un paradosso relativo alle loro singolarità ». Nota I. 173, 197.
- ID. — « Sulle superficie razionali a sezioni iperpiane canoniche e su un paradosso relativo alle loro singolarità ». Nota II. 173, 276.

- FAMIANI V. — « Sul ritmo normale di alcune secrezioni ». 310, 376.
- FEDELE M. — « Il sistema nervoso degli "Ascidacea" nel piano di organizzazione dei Cordati ». 370.
- FINZI A. — « Sulla riduzione a forma normale delle equazioni gravitazionali dell'Einstein ». 324.
- FRANZINI T. — « Sul funzionamento di un tubo a protoni ». 292.
- FROLA E. — « Il problema di Cauchy in grande, e le equazioni alle derivate parziali lineari a coefficienti costanti ». 518.
- FULCHIGNONI E. — « Sul meccanismo dell'epilessia sperimentale riflessa per stimoli luminosi ». 122.
- ID. — Vedi MARTINO G.

G

- GABRIELI G. — « Cimelii scientifici linnei ritrovati ». 595, 693.
- GARCÍA G. — « Le equazioni generali della dinamica relativista ristretta ». 23.
- GHERARDELLI G. — « Un'osservazione sulle serie di equivalenza sopra una curva algebrica riducibile ». 71.
- ID. — « Sulla costruzione delle serie di equivalenza sopra una curva algebrica riducibile ». 471.
- GIACOMELLO G. — « La struttura degli acidi coleيني determinata con l'analisi Patterson ». 101.
- ID. — « Struttura di alcuni triterpeni. Nota preliminare ». 574.
- GIALANELLA L. — « Nuove ricerche sull' "ammasso del Sole" ». Nota II. 356, 403.
- GIGANTE D. — « Sulla perdita percentuale di peso nella morte per inanizione e per ipoalimentazione ». 311.
- GIORGIO G. — « Sul magnetometro di Rogowski ». 427.
- GOIDÀNICH G. — « Nuove osservazioni sul "disseccamento dei germogli" dei pioppi ». 592.
- GUARESCHI C. — « Il nucleo delle ghiandole salivari delle larve di "*Chironomus plumosus*" studiato in campo

oscuro, a luce polarizzata e con la reazione di Feulgen ». 297.

- GUARESCHI P. — « Sul coefficiente di compressibilità dei solidi ». 90.
- ID. — « Sul coefficiente di conducibilità termica dei gas ». 92.

H

- HAIMOVICI M. — « Sui ds^2 binari con data curvatura totale ». 281.
- ID. — « Sulle superficie totalmente geodetiche negli spazi di Finsler ». 474, 633.

K

- KRALL G. — « Propagazioni ondose e trasmissione d'energia in una rete idraulica ». 348.
- ID. — « Stabilità e propagazioni ondose in una rete idraulica con turbine a regolatore isodromico ». 437.

L

- LAMPARIELLO G. — « Sulla composizione dei movimenti secondo il Poincaré ». 27.
- ID. — « Moti stazionari nei problemi dinamici del Liouville ». 545.
- LEVI F. — « Sugli stati di coazione determinati in un sistema elastico per superamento del limite di elasticità ». 658.

M

- MANZONI-ANSIDEI R. e ROLLA M. — « Sullo spettro di assorbimento del pirrolo, tiofene e furano nel medio ultrarosso ». 410.
- MARCUS EF. — « Interpretazione geometrica dell'equazione $\frac{\partial^2 \log \beta \gamma}{\partial u \partial v} + \beta \gamma = 0$ e qualche proprietà delle congruenze di rette del fascio canonico ». 145.
- MARTINO G. e FULCHIGNONI E. — « Il fenomeno dell'agevolazione nell'epilessia riflessa da stricnizzazione occipitale, sotto l'azione di stimoli

luminosi condizionati. Nota preliminare ». 125.

MATTIOLI G. D. — « Sulla riduzione di rango dei sistemi pfaffiani ». 74, 149.

MISSIROLI A. — « Sullo sviluppo dei parassiti malarici ». 33.

MOISIL GR. C. — « Richiami geometrici sul metodo di integrazione di Hadamard-Théodoresco. Nota I. ». 537.

MORIN U. — « Sulla unirazionalità dell'ipersuperficie algebrica del quinto ordine ». 330.

MORUZZI G. e BORGATTI G. — « L'azione del bromo sullo sviluppo dell'organismo ». 303.

N

NEGODI G. — « Cariologia dei generi "*Aposeris*" e "*Hyoseris*" ("*Compositae-Cichorieae*") ». 34, 117.

O

ORRÙ A. — « Sulle variazioni delle costanti chimico-fisiche dell'acqua dopo che vi è stato immerso il tuorlo dell'uovo di gallina ». Nota II. 34.

P

PAUC CHR. — « Extension aux variétés holonomes V_n^{n-1} de quelques propriétés de surfaces et des V_3^2 ». 74, 155.

ID. — « Images d'ensembles ordonnés. Polygones. Courbes ». 166.

PEOLA P. — « Probabile esistenza del Paleolitico nelle isole Egee e vicende geologiche di queste durante il Quaternario ». 364.

PERRI T. — « Ricerche su un ciclo di modificazioni istologiche della tiroide di ratto albino maschio ». 137, 185.

PERRIER C. e SEGRÉ E. — « Alcune proprietà chimiche dell'elemento 43 ». 579.

PIONTELLI R. — « Influenza degli ultrasuoni sul "potenziale di scarica" dell'idrogeno ». 357.

PIONTELLI R. — « Influenza degli ultrasuoni sui potenziali di scarica dell'idrogeno, dell'ossigeno e del cloro ». 581.

PISTOLESI E. — « Sul moto non permanente di un solido in un fluido indefinito incompressibile ». 661.

POPA I. — « Osservazioni sopra la linea parabolica di una superficie ». 73.

ID. — « Sulla geometria proiettivo-differenziale delle famiglie di superficie ». 333.

PRINCIPI P. — « Intorno all'origine di alcune terre bianche della Valle del Nestore (Umbria) ». 113.

PYLARINOS O. — « Sur les congruences de droites normales à une même surface ». 338.

Q

QUAGLIARIELLO G. e CEDRANGOLO F. — « Solubilità di acidi grassi e di gliceridi nella bile e nei sali biliari ». 503.

R

ROLLA M. — Vedi MANZONI-ANSIDEI R.

RUBINI R. — « Sul valore del tasso glicemico in colombi di razza diversa ». 246.

RUBINI R. — « Sul comportamento del pH dell'urina umana durante la giornata ». 306.

S

SALINI U. — « Sopra un fascio di quadriche definito in un punto di una superficie ». 19.

SALVATORI A. — « Sul contenuto in cloro di organi e tessuti del ratto in rapporto all'età ». 243.

SBRANA F. — « Sopra alcune questioni relative alle curve piane e sghembe ». 286.

SCARPA O. — « Equazioni per il calcolo termodinamico delle forze elettromotrici delle pile a gas ». 3.

SCARPA O. — « L'effetto Volta nelle leghe metalliche solide ». Nota I (con la collaborazione per la parte sperimentale del dott. C. ROSSI). 6.

ID. — « L'effetto Volta nelle leghe metalliche solide ». Nota II (con la collaborazione per la parte sperimentale del dott. C. ROSSI). 11, 57.

SEGRE B. — « Famiglie di ipersuperficie isoparametriche negli spazi euclidei ad un qualunque numero di dimensioni ». 203.

ID. — « Sui sistemi di equazioni a derivate parziali d'ordine qualunque, con una sola funzione incognita, lineari ed a coefficienti costanti ». 208.

SEGRÉ E. — Vedi PERRIER C.

SEVERI F. — « Intorno alla teoria delle serie di equivalenza sulle curve riducibili ». 53.

SIGNORINI R. — La piega dei Monti Lagoni e Libro Aperto nell'Appennino Modenese ». 108.

SOLARINO G. — « Sulle alterazioni istologiche del sistema nervoso centrale e periferico nel beri-beri sperimentale aviario. Nota preliminare ». 380.

SONA L. — « Sopra alcune configurazioni rigide di filamenti vorticosi perpendicolari a un piano ». Nota I. 80.

ID. — « Sopra alcune configurazioni rigide di filamenti vorticosi perpendicolari a un piano ». Nota II. 85, 182.

STELLA A. — « Nuovi studi sul giacimento di stagno del Campigliese ». 506.

T

TOLOTTI C. — « Sul problema di Cauchy nel caso non analitico ». 212.

V

VENTURELLI L. — « La statica einsteiniana nell'interno di una massa fluida gravitante ». 224.

VIGNAUX J. C. — « Sur les fonctions polygènes d'une et de plusieurs variables complexes duales et de variables biduales ». Nota I. 514.

VIGNAUX J. C. — « Sulle funzioni poligene di una variabile bicomplessa duale ». Nota II. 540, 641.

VIGNOLI L. — « Leucoplasti lipidici delle Agavi ». 451.

VILLA M. — « Sopra una classe di V_k , situate sui coni di Veronese, che posseggono un sistema ∞_{3^k-5} di quasi-asintotiche $\gamma_{1,3}$ ». 74, 217.

ID. — « Proprietà differenziale caratteristica dei coni proiettanti le varietà che rappresentano la totalità delle quadriche di uno spazio lineare ». 540.

VYCICHLO F. — « Contributi alla geometria proiettiva delle varietà anolonyme. — I. Teorema topologico per le V_n^m di S_n ». 646.

ID. — « Contributi alla geometria proiettiva delle varietà anolonyme. — II. V_3^2 in S_3 . Fascio di Darboux, quadrica di Lie, spigoli di Green ». 652.

W

WATAGHIN G. — « Sopra un sistema di equazioni gravitazionali del primo ordine ». Nota II. 570.

ID. — « Sulla teoria quantica e l'origine di alcuni sciame di raggi cosmici ». 675.

WATSON G. N. — « Tabellazione di una particolare funzione definita da un integrale improprio ». 525.

Z

ZAGAMI V. — « Azione dei vaghi sul metabolismo dei glicidi. — I. Sul comportamento del glicogeno epatico, cardiaco e muscolare in seguito alla vagotomia bilaterale nei colombi ». 129.

ID. — « Azione dei vaghi sul metabolismo dei glicidi. — II. Sul comportamento del glicogeno cardiaco, epatico e muscolare in seguito a somministrazione di insulina nei colombi vagotomizzati ». 188, 249.

ID. — « Ricerche sperimentali sul liquido seminale. — III. Sulle variazioni del

- pH del liquido seminale umano in dipendenza della temperatura e della diluizione ». 488.
- ZAGAMI V. — « Ricerche sperimentali sul liquido seminale. — IV. Sul valore del pH del liquido seminale di cane ». 597.
- ID. — « Ricerche sperimentali sul liquido seminale. — V. Pressione osmotica, conduttività elettrica, concentrazione in ioni H del liquido seminale umano ». 603, 679.
- ID. — « Ricerche sperimentali sul liquido seminale. — VI. Pressione osmotica, conduttività elettrica, e concentrazione in ioni H⁺ del liquido seminale di cane ». 682.
- ZANABONI O. — « Relazioni tra azione interna e deformazioni, negli involucri a doppia curvatura ». 85.
- ID. — « Sulla trascurabilità dei lavori di deformazione del taglio e dello sforzo assiale, rispetto a quello dei momenti ». 557.
- ZEULI M. — « Sul pendolo di lunghezza variabile ». 444.
-

INDICE PER MATERIE

A

- Astronomia.** — (Astrofisica). « Altezza della cromosfera nel 1937 e andamento del ciclo solare ». ABETTI G. 317.
- « La radiazione del Sole a Roma dal 1933 al 1936 ». ANDRISSI G. 356, 564.
- « I problemi fondamentali della Cosmogonia e la legge di Newton ». Nota II. ARMELLINI G. 609.
- « Risultati tratti dallo studio delle variazioni di latitudine negli anni 1936 e 1937 ». CARNERA L. 421.
- « Orbita definitiva della cometa di Finlay ». Nota I. CIMINO M. 668.
- « Nuove ricerche sull' " ammasso del Sole " ». Nota II. GIALANELLA L. 356, 403.

B

- Biologia.** — « Le caratteristiche biologiche del lago Tana ». BRUNELLI G. e CANNICCI G. 319.
- « Il sistema nervoso degli " Ascidiacea " nel piano di organizzazione dei Cordati ». FEDELE M. 370.
- « Nuove osservazioni sul " disseccamento dei germogli " dei pioppi ». GOIDÀNICH G. 592.
- « Il nucleo delle ghiandole salivari delle larve di "*Chironomus plumosus*" studiato in campo oscuro, a luce polarizzata e con la reazione di Feulgen ». GUARESCHI C. 297.
- Bollettino bibliografico.** — 36, 259, 390, 468, 607.
- Botanica.** — « Cimelii scientifici lineei ritrovati ». GABRIELI G. 595, 693.

- Botanica.** — « Cariologia dei generi " Aposeris " e " Hyoseris " (Compositae - Cichorieae). NEGODI G. 34, 117.
- (Citologia vegetale). « Leucoplasti lipidici delle Agavi ». VIGNOLI L. 451.

C

- Chimica.** — « Sui telluromercaptani ». BARONI A. 238.
- « La struttura degli acidi coleinici determinata con l'analisi Patterson ». GIACOMELLO G. 101.
- « Struttura di alcuni triterpeni ». Nota preliminare. ID. 574.
- « Sullo spettro di assorbimento del pirrolo, tiofene e furano nel medio ultrarosso ». MANZONI-ANSIDEI R. e ROLLA M. 410.
- (Chimica biologica). « Solubilità di acidi grassi e di gliceridi nella bile e nei sali biliari ». QUAGLIARIELLO G. e CEDRANGOLO F. 503.
- Chimica Fisica.** — « L'effetto Volta nelle leghe metalliche solide ». Nota I (con la collaborazione per la parte sperimentale del dott. C. ROSSI). SCARPA O. 6.
- « L'effetto Volta nelle leghe metalliche solide ». Nota II (con la collaborazione per la parte sperimentale del dott. C. ROSSI). ID. 11, 57.

Commemorazioni. — 383, 455.

Comunicazioni varie. — 257, 389.

E

- Elettrochimica.** — « Influenza degli ultrasuoni sul " potenziale di sca-

rica " dell'idrogeno ». PIONTELLI R. 357.

Elettrochimica. — « Influenza degli ultrasuoni sui potenziali di scarica dell'idrogeno, dell'ossigeno e del cloro ». ID. 581.

— « Equazioni per il calcolo termodinamico delle forze elettromotrici delle pile a gas ». SCARPA O. 3.

F

Fisica. — « Sul funzionamento di un tubo a protoni ». FRANZINI T. 292.

— « Sul magnetometro di Rogowski ». GIORGI G. 427.

— « Sul coefficiente di compressibilità dei solidi ». GUARESCHI P. 90.

— « Sul coefficiente di conducibilità termica dei gas ». ID. 92.

— « Sopra un sistema di equazioni gravitazionali del primo ordine ». Nota II. WATAGHIN G. 570.

— « Sulla teoria quantica e l'origine di alcuni sciami di raggi cosmici ». ID. 675.

Fisiologia. — « Nuova conferma sperimentale per la necessaria partecipazione della via afferente congenita al meccanismo dei riflessi condizionati ». ALIBRANDI A. 479.

— « Sull'efficacia della parola parlata per l'elaborazione del riflesso condizionato dell'ammiccamento nel cane ». ID. 595.

— (Chimica biologica). « Nuove osservazioni sull'ormone pancreatico iperglicemizzante di G. Martino ». ARAGONA G. 481.

— « Determinazione micro-chimica dell'azoto solubile totale e delle frazioni ureica ed aminica (azotomia totale, ureo-azotemia ed aminoazotemia) nel sangue ». BAGLIONI S. 429.

— (Chimica biologica). « Tiroxinizzazione e beriberi sperimentale ». CAPRARO V. 414.

— (Chimica biologica). « Espressione e valutazione del " quoziente beriberico Qb " ». ID. 415.

— (Chimica biologica). « Castrazione e

beriberi sperimentale nei colombi ». ID. 419.

Fisiologia. — (Chimica biologica). « Sul valore del pH del secreto delle vescichette seminali di ratto albino ». ID. 486.

— (Fisiologia vegetale). « Fenomeni di attivazione nell'accrescimento vegetale ». Nota I. DOJMI DI DELUPIS S. 588.

— (Fisiologia vegetale). « Fenomeni di attivazione nell'accrescimento vegetale ». Nota II. ID. 595, 685.

— (Fisiologia vegetale). « Fenomeni di attivazione nell'accrescimento vegetale ». Nota III. ID. 595, 689.

— « Sul ritmo normale di alcune secrezioni ». FAMIANI V. 310, 376.

— « Sul meccanismo dell'epilessia sperimentale riflessa per stimoli luminosi ». FULCHIGNONI E. 122.

— « Sulla perdita percentuale di peso nella morte per inanizione e per ipoalimentazione ». GIGANTE D. 311.

— « Il fenomeno dell'agevolazione nell'epilessia riflessa da stricninizzazione occipitale, sotto l'azione di stimoli luminosi condizionati ». Nota preliminare. MARTINO G. e FULCHIGNONI E. 125.

— « Sulle variazioni delle costanti chimico-fisiche dell'acqua dopo che vi è stato immerso il tuorlo dell'uovo di gallina ». Nota II. ORRÙ A. 34.

— « L'azione del bromo sullo sviluppo dell'organismo ». MORUZZI G. e BORGATTI G. 303.

— « Ricerche su un ciclo di modificazioni istologiche della tiroide di ratto albino maschio ». PERRI T. 137, 185.

— « Sul valore del tasso glicemico in colombi di razza diversa ». RUBINI R. 246.

— (Chimica biologica). « Sul comportamento del pH dell'urina umana durante la giornata ». ID. 306.

— « (Chimica biologica). Sul contenuto in cloro di organi e tessuti del ratto in rapporto all'età ». SALVATORI A. 243.

— « Azione dei vaghi sul metabolismo dei glicidi. — I. Sul comportamento del glicogeno epatico, cardiaco e musco-

lare in seguito alla vagotomia bilaterale nei colombi ». ZACAMI V. 129.

- Fisiologia.** — « Azione dei vaghi sul metabolismo deiglicidi. — II. Sul comportamento del glicogeno cardiaco, epatico e muscolare in seguito a somministrazione di insulina nei colombi vagotomizzati ». ID. 188, 249.
- (Chimica biologica). « Ricerche sperimentali sul liquido seminale. — III. Sulle variazioni del pH del liquido seminale umano in dipendenza della temperatura e della diluizione ». ID. 488.
- « Ricerche sperimentali sul liquido seminale. — IV. Sul valore del pH del liquido seminale di cane ». ID. 597.
- « Ricerche sperimentali sul liquido seminale. — V. Pressione osmotica, conduttività elettrica e concentrazione in ioni H del liquido seminale umano ». ID. 603, 679.
- « Ricerche sperimentali sul liquido seminale. — VI. Pressione osmotica, conduttività elettrica, e concentrazione in ioni H^+ del liquido seminale di cane ». ID. 682.

G

- Geodesia.** — « Stazione astronomico-geodetica eseguita sul vertice trigonometrico di Montecastello, presso Alessandria, nell'agosto 1934 ». BARBIERI U. 498.
- « La grande anomalia geoidica nella Valle Padana ». ID. 614.
- « Estensione dell'anomalia geoidica in Val Padana, e l'isoanomala zero per la gravità ». ID. 619.
- « Campagna gravimetrica in Sardegna ». BOAGA G. 232.
- Geologia.** — (Geochimica). « Interpretazione geochemica delle formazioni quaternarie di Grotta Romanelli (Terra d'Otranto). — I. Dati del problema e metodo di ricerca ». BLANC G. A. 189.
- « Interpretazione geochemica delle formazioni quaternarie di Grotta Roma-

nelli (Terra d'Otranto). — II. I complessi colloidali ». ID. 429.

- Geologia.** — « Il permiano nel territorio di Orroli (Sardegna) ». CAVINATO A. 586.
- (Geologia storica). « Probabile esistenza del Paleolitico nelle isole Egge e vicende geologiche di queste durante il Quaternario ». PEOLA P. 364.
- « La piega dei Monti Lagoni e Libro Aperto nell'Appennino Modenese ». SIGNORINI R. 108.
- « Nuovi studi sul giacimento di stagno del Campigliese ». STELLA A. 506.

M

- Matematica.** — « Semplificazioni ed estensioni del metodo di Picone per l'integrazione delle equazioni lineari alle derivate parziali del 2° ordine di tipo iperbolico ». BADESCU R. 540, 624.
- « Sopra una classe di V_3 che ammettono una infinità di superficie quasi-asintotiche dipendente da una funzione arbitraria ». BOGDAN C. P. 62.
- « Sulla curvatura di una superficie e di una varietà ». BOGGIO T. 12.
- « Sulle soluzioni di un sistema di equazioni con derivate parziali ». ID. 529.
- « Sulle varietà anolonyme. — I. Alcuni teoremi generali ». BOMPIANI E. 37.
- « Sulle varietà anolonyme. — II. Le V_3^2 di S_3 proiettivo ». ID. 45.
- « Sul calcolo effettivo del periodo del moto perturbato in un caso tipico di prima approssimazione ». CARTOVITCH N. 65.
- « Un più generale teorema d'esistenza dei piani multipli ». CHISINI O. 535.
- (Algebra). « Sui sistemi di risultanti ». DANTONI G. 342, 397.
- « Equazioni di struttura dei gruppi di Lie ». DE MIRA FERNANDES A. 631.
- « Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari ». ENRIQUES F. 493.
- « Sulle superficie razionali a sezioni iperpiante canoniche e su un paradosso

relativo alle loro singolarità ». Nota I. FAEDO S. 173, 197.

- Matematica.** — « Sulle superficie razionali a sezioni iperpiane canoniche e su un paradosso relativo alle loro singolarità ». Nota II. ID. 173, 276.
- « Sulla riduzione a forma normale delle equazioni gravitazionali dell'Einstein ». FINZI A. 324.
- (Analisi matematica). « Il problema di Cauchy in grande, e le equazioni alle derivate parziali lineari a coefficienti costanti ». FROLA E. 518.
- (Geometria algebrica). « Un'osservazione sulle serie di equivalenza sopra una curva algebrica riducibile ». GHERARDELLI G. 71.
- (Geometria algebrica). « Sulla costruzione delle serie di equivalenza sopra una curva algebrica riducibile ». ID. 471.
- « Sui ds^2 binari con data curvatura totale ». HAIMOVICI M. 281.
- « Sulle superficie totalmente geodetiche negli spazi di Finsler ». ID. 474, 633.
- Interpretazione geometrica dell'equazione $\frac{\partial^2 \log \beta \gamma}{\partial u \partial v} + \beta \gamma = 0$ e qualche proprietà delle congruenze di rette del fascio canonico ». MARCUS EF. 145.
- « Sulla riduzione di rango dei sistemi pfaffiani ». MATTIOLI G. D. 74, 149.
- « Richiami geometrici sul metodo di integrazione di Hadamard-Théodoresco ». Nota I. MOISIL GR. C. 537.
- « Sulla unirazionalità dell'ipersuperficie algebrica del quinto ordine ». MORIN U. 330.
- « Extension aux variétés holonomes V_n^{n-1} de quelques propriétés des surfaces et des V_3^2 ». PAUC CHR. 74, 155.
- « Images d'ensembles ordonnés. Polygones. Courbes ». ID. 166.
- « Osservazioni sopra la linea parabolica di una superficie ». POPA I. 73.
- « Sulla geometria proiettivo-differenziale delle famiglie di superficie ». ID. 333.

Matematica. — « Sur les congruences de droites normales à une même surface ». PYLARINOS O. 338.

- « Sopra un fascio di quadriche definito in un punto di una superficie ». SALINI U. 19.
- « Sopra alcune questioni relative alle curve piane e sghembe ». SBRANA F. 286.
- « Famiglie di ipersuperficie isoparametriche negli spazi euclidei ad un qualunque numero di dimensioni ». SEGRE B. 203.
- « Sui sistemi di equazioni a derivate parziali d'ordine qualunque, con una sola funzione incognita, lineari ed a coefficienti costanti ». ID. 208.
- (Geometria algebrica). « Intorno alla teoria delle serie di equivalenza sulle curve riducibili ». SEVERI F. 53.
- « Sul problema di Cauchy nel caso non analitico ». TOLOTTI C. 212.
- « Sur les fonctions polygènes d'une et de plusieurs variables complexes duales et de variables biduales ». Nota I. VIGNAUX J. C. 514.
- « Sulle funzioni poligene di una variabile bicomplessa duale ». Nota II. ID. 540, 641.
- « Sopra una classe di V_k , situate sui coni di Veronese, che posseggono un sistema $\infty 3k-5$ di quasi-asintotiche $\gamma_{1,3}$ ». VILLA M. 74, 217.
- « Proprietà differenziale caratteristica dei coni proiettanti le varietà che rappresentano la totalità delle quadriche di uno spazio lineare ». ID. 540.
- « Contributi alla geometria proiettiva delle varietà anolonomie. — I. Teorema topologico per le V_n^m di S_n ». VYCICHLO F. 646.
- « Contributi alla geometria proiettiva delle varietà anolonomie. — II. V_3^2 in S_3 : Fascio di Darboux, quadrica di Lie, spigoli di Green ». ID. 652.
- « Tabellazione di una particolare funzione definita da un integrale improprio ». WATSON G. N. 525.

Meccanica. — « Risoluzione di un problema relativo alle sollecitazioni im-

presse sui sistemi continui». CABBAS A. 541.

Meccanica. — « Sulla generalizzazione di una formula di Cisotti e sua applicazione allo studio dei movimenti lenti di un fluido comprimibile », CAJUS JACOB. 176.

— « Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli sforzi ». Nota I. CATTANEO C. 342.

— « Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli sforzi ». Nota II. ID. 434.

— « Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli sforzi ». Nota III. ID. 474.

— « Il secondo principio di reciprocità e le sue applicazioni al calcolo delle deformazioni permanenti ». Nota I. COLONNETTI G. 75.

— « Il secondo principio di reciprocità e le sue applicazioni al calcolo delle deformazioni permanenti ». Nota II. ID. 79, 173.

— « Il secondo principio di reciprocità e le sue applicazioni al calcolo delle deformazioni permanenti ». Nota III. ID. 79, 221.

— « I fattori della stabilità statico-cinetica nei moto velivoli ». CROCCO G. A. 189, 267.

— « Il coefficiente balistico dei velivoli ». ID. 498.

— « Le equazioni generali della dinamica relativista ristretta ». GARCIA G. 23.

— « Propagazioni ondose e trasmissione d'energia in una rete idraulica ». KRALL G. 348.

— (Idraulica). « Stabilità e propagazioni ondose in una rete idraulica con turbine a regolatore isodromico ». ID. 437.

— « Sulla composizione dei movimenti secondo il Poincaré ». LAMPARIELLO G. 27.

— « Moti stazionari nei problemi dinamici del Liouville » ID. 545

— « Sugli stati di coazione determinati in un sistema elastico per superamento del limite di elasticità ». LEVI F. 658.

Meccanica. — « Sul moto non permanente di un solido in un fluido indefinito incompressibile » PISTOLESI E. 661.

— « Sopra alcune configurazioni rigide di filamenti vorticosi perpendicolari a un piano ». Nota I. SONA L. 80.

— « Sopra alcune configurazioni rigide di filamenti vorticosi perpendicolari a un piano ». Nota II. ID. 85, 182.

— « La statistica einsteiniana nell'interno di una massa fluida gravitante ». VENTURELLI L. 224.

— « Relazioni tra azione interna e deformazioni, negli involucri a doppia curvatura » ZANABONI O. 85.

— « Sulla trascurabilità dei lavori di deformazione del taglio e dello sforzo assiale, rispetto a quello dei momenti ». ID. 557.

— « Sul pendolo di lunghezza variabile ». ZEULI M. 444.

Microbiologia. — « Coltura in serie del « Trypanosoma brucei » nell'embrione di pollo ». BIOCCA E. 452.

P

Parassitologia. — « Una nuova classificazione degli « *Haemosporidiidea* » basata sull'esistenza di un ciclo schizogonico dei Plasmodi nelle cellule dei tessuti ». CORRADETTI A. 31.

— « Su alcune fasi del ciclo schizogonico del « *Plasmodium gallinaceum* » e del « *Plasmodium cathemerium* ». ID. 121.

— « Sullo sviluppo dei parassiti malarici ». MISSIROLI A. 33.

Patologia. — « Sulle alterazioni istologiche del sistema nervoso centrale e periferico nel beri-beri sperimentale aviario. Nota preliminare ». SOLARINO G. 380.

Pedologia. — « Intorno all'origine di alcune terre bianche della Valle del Nestore (Umbria) ». PRINCIPI P. 113.

Personale Accademico. — 35, 256, 389, 467, 604.

Premi in corso di assegnazione. — 139.

Presentazione di libri. — 35, 138,
256, 389, 467, 604.

Presentazione di Note e Memorie.—
35, 138, 256, 389, 467, 604.

Presentazione di plichi suggellati.
— 138, 604.

Radioattività. — «Alcune proprietà chimiche dell'elemento 43». Nota II.
PERRIER C. e SEGRÈ E. 579.

Relazioni di Commissioni. — 257,
604.

Relazioni sui temi dati. — 35, 605.
